目　录

第一章　函　数

在自然科学、工程技术，甚至在某些社会科学中，函数是被广泛应用的数学概念之一，其重要意义远远超出了数学范围．在数学中函数处于基础的核心地位．函数不仅是贯穿于中学《代数》的一条主线，它也是数学分析这门课程研究的对象．

中学数学应用"集合"与"对应"已经给出了函数概念，并在此基础上讨论了函数的一些简单性质．本章除对中学《代数》的函数及其性质重点复习外，根据本课与后继课的需要，将对函数作深入的讨论．

§1.1　函　　数

一、函数概念

在一个自然现象或技术过程中，常常有几个量同时变化，它们的变化并非彼此无关，而是互相联系着．这是物质世界的一个普遍规律．下面列举几个有两个变量互相联系着的例子：

例 1. 真空中自由落体，物体下落的时间 t 与下落的距离 s 互相联系着．如果物体距地面的高度为 h，

$$\forall t\in\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]^{①}$$

都对应一个距离 s．已知 t 与 s 之间的对应关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

① 当 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$时，由 $s=\frac{1}{2}gt^2$，有 $s=h$，即物体下落到地面．

其中 g 是重力加速度，是常数.

例 2. 球的半径 r 与该球的体积 V 互相联系着. $\forall r\in[0, +\infty)$ 都对应一个球的体积 V. 已知 r 与 V 之间的对应关系是

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3,$$

其中 π 是圆周率，是常数.

例 3. 某地某日时间 t 与气温 T 互相联系着(如图 1.1). 对 13 时至 23 时内任意时间 t 都对应着一个气温 T. 已知 t 与 T 的对应关系用图 1.1 中的气温曲线表示. 横坐标表示时间 t，纵坐标表示气温 T. 曲线上任意点 $P(t, T)$ 表示在时间 t 对应着的气温是 T.

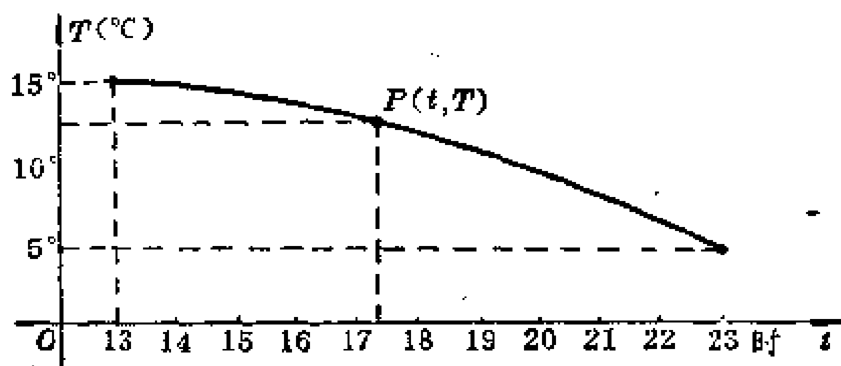


图 1.1

例 4. 在标准大气压下，温度 T 与水的体积 V 互相联系着. 实测如下表:

温　度 (百度表)	0	2	4	6	8	10	12	14
体　积 (cm³)	100	99.990	99.987	99.990	99.998	100.012	100.032	100.057

对 $\{0,2,4,6,8,10, 12, 14\}$ 中每个温度 T 都对应一个体积 V 已知 T 与 V 的对应关系用上面表格表示.

例 5. $\forall x\in\mathbb{R}$ 都对应一个数 $y=\sin x$，即 x 与 y 之间的对应关

系是

$$y=\sin x.$$

例 6. $\forall x\in(-5,\pi]$都对应一个数 $y=3x^2+x-1$，即 x 与 y 之间的对应关系是

$$y=3x^2+x-1.$$

上述前四个实例，分属于不同的学科，实际意义完全不同. 但是，从数学角度看，它们与后两个例子却有共同的特征：都有一个数集和一个对应关系，对于数集中任意数 x，按照对应关系都对应 $\mathbf{R}$ 中唯一一个数. 于是有如下的函数概念：

定义 设 A 是非空数集. 若存在对应关系 f，对 A 中任意数 x $(\forall x\in A)$，按照对应关系 f，对应唯一一个 $y\in\mathbf{R}$，则称 f 是定义在 A 上的**函数**，表为

$$f:A\longrightarrow\mathbf{R}.$$

数 x 对应的数 y 称为 x 的**函数值**，表为 $y=f(x)$. x 称为**自变量**，y 称为**因变量**. 数集 A 称为函数 f 的**定义域**，函数值的集合 $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$ 称为函数 f 的**值域**.

根据函数定义，不难看到，上述六例皆为函数的实例.

关于函数概念的几点说明：

1. 用符号"$f:A\longrightarrow\mathbf{R}$"表示 f 是定义在数集 A 上的函数，十分清楚、明确. 特别是在抽象的数学学科中使用这个函数符号更显得方便. 但是，在数学分析中，一方面要讨论抽象的函数 f；另一方面又要讨论大量具体的函数. 在具体函数中需要将对应关系 f 具体化，使用这个函数符号就有些不便. 为此在本书中约定，将"f 是定义在数集 A 上的函数"用符号"$y=f(x),x\in A$"表示. 当不需要指明函数 f 的定义域时，又可简写为"$y=f(x)$"，有时甚至笼统地说"$f(x)$是 x 的函数(值)". 严格地讲，这样的符号和叙述混淆了函数与函数值. 这仅是为了方便而作的约定.

2. 在函数概念中，对应关系 f 是抽象的，只有在具体函数中，对应关系 f 才是具体的．例如，在上述几个例子中：

例 1，f 是一组运算：t 的平方乘以常数 $\frac{1}{2}g\left(s=\frac{1}{2}gt^2\right)$.

例 2，f 是一组运算：r 的立方乘以常数 $\frac{4}{3}\pi\left(V=\frac{4}{3}\pi r^3\right)$.

例 3，f 是图 1.1 所示的曲线．

例 4，f 是所列的表格．

为了对函数 f 有个直观形象的认识，可将它比喻为一部"数值变换器"．将任意 $x\in A$ 输入到数值变换器之中，通过 f 的"作用"，输出来的就是 y．不同的函数就是不同的数值变换器(如图 1.2)．

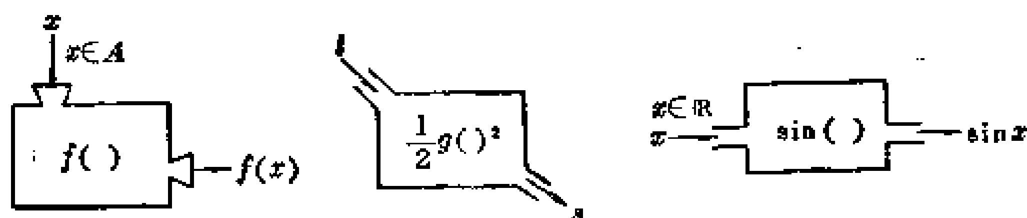


图 1.2

3. 根据函数定义，虽然函数都存在定义域，但是常常并不明确指出函数 $y=f(x)$ 的定义域，这时认为函数的定义域是自明的，即定义域是使函数 $y=f(x)$ 有意义的实数 x 的集合 $A=\{x|f(x)\in\mathbf{R}\}$．例如，函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 没有指出它的定义域，那么它的定义域就是使函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 有意义的实数 x 的集合，即闭区间 $[-1,1]=\{x|\sqrt{1-x^2}\in\mathbf{R}\}$．

具有实际意义的函数，它的定义域要受实际意义的约束．例如，上述的例 2，半径为 r 的球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 这个函数．从抽象的函数来说，r 可取任意实数；从它的实际意义来说，半径 r 不能取负数．因此，它的定义域是区间 $[0,+\infty)$．

4. 函数定义指出："$\forall x\in A$，按照对应关系 f，对应唯一一个

$y\in\mathbf{R}$"，这样的对应就是所谓单值对应．反之，一个 $y\in f(A)$ 就不一定只有一个 $x\in A$，使 $y=f(x)$．这是因为，在函数定义中只是说，一个 $x\in A$，按照对应关系 f，只对应唯一一个 $y\in\mathbf{R}$，并没有说：不同的 x 对应不同的 y，即不同的 x 可能对应相同的 y．例如，函数 $y=\sin x$．$\forall x\in\mathbf{R}$，按照对应关系 sin，对应唯一一个 $y=\sin x\in\mathbf{R}$，反之，对 $y=1$，却有无限多个 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\in\mathbf{R}$，$k\in\mathbf{Z}$，按照对应关系 sin，都对应着 1，即

$$\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1,\qquad k\in\mathbf{Z}.$$

二、函数的四则运算

函数定义包含两个要素：对应关系与定义域．因此，定义两个函数相等和四则运算需要同时考虑这两个要素．

定义 设两个函数 f 与 g 分别定义在数集 A 与 B．

1．若 $A=B$，且 $\forall x\in A$，有 $f(x)=g(x)$，则称函数 f 与 g 相等，表为 $f=g$．

2．若 $A\cap B\neq\varnothing$，则函数 f 与 g 的和 $f+g$、差 $f-g$、积 fg 分别定义为

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\qquad x\in A\cap B.$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x),\qquad x\in A\cap B.$$
$$(fg)(x)=f(x)g(x),\qquad x\in A\cap B.$$

3．若 $(A\cap B)-\{x\mid g(x)=0\}\neq\varnothing$，则函数 f 与 g 的商 $\frac{f}{g}$ 定义为

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\qquad x\in(A\cap B)-\{x\mid g(x)=0\}.$$

例如，函数 $f(x)=x$，$x\in\mathbf{R}$；$g(x)=x(\sin^2x+\cos^2x)$，$x\in\mathbf{R}$．有相同的定义域 $\mathbf{R}$．尽管这两个函数的解析式不同，但是 $\forall x\in\mathbf{R}$，

有

$$x=x(\sin^2x+\cos^2x).$$

于是，函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=x(\sin^2x+\cos^2x)$ 相等.

例如，函数 $f(x)=x+1, x\in\mathbb{R}$；$g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$，$x\in\mathbb{R}-\{1\}$. 尽管这两个函数，$\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$，有

$$x+1=\frac{x^2-1}{x-1},$$

但是这两个函数定义域不相等. 于是，这两个函数不相等.

例如，函数 $f(x)=\ln(1-x)$，$x\in(-\infty,1)$；$g(x)=\sqrt{1-x^2}$，$x\in[-1,1]$.

$$(-\infty,1)\cap[-1,1]=[-1,1).$$

$$(-\infty,1)\cap[-1,1]-\{x\mid g(x)=0\}=[-1,1)-\{-1,1\}$$
$$=(-1,1).$$

于是，函数 f 与 g 的和、差、积、商分别是

$$(f+g)(x)=\ln(1-x)+\sqrt{1-x^2},\qquad x\in[-1,1).$$
$$(f-g)(x)=\ln(1-x)-\sqrt{1-x^2},\qquad x\in[-1,1).$$
$$(fg)(x)=\sqrt{1-x^2}\ln(1-x),\qquad x\in[-1,1).$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x^2}},\qquad x\in(-1,1).$$

例如，函数 $y=x$ 自乘 n 次，再乘以常数 c，就是幂函数 $f(x)=cx^n$，它的定义域是 $\mathbb{R}$. 有限多个幂函数的和就是多项式函数(按降幂排列)

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,\qquad x\in\mathbb{R},$$

其中 $n\in\mathbb{N}$，$a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是常数，且 $a_0\neq0$.

三、函数的图象

函数的图象能将函数的几何性态表现得十分明显. 即使对那

些能用解析式表示的函数，为了对它有个直观形象的了解，也常常将它的图象描绘出来.

设函数 $y=f(x)$ 定义在数集 A. 坐标平面上的点集

$$G(f)=\{(x,y)\mid x\in A, y=f(x)\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 在数集 A 上的**图象**，简称函数 $y=f(x)$ 的图象. 显然，坐标平面上一个点集 G 是某个函数的图象的必要充分条件是，平行 y 轴的每条直线与点集 G 至多有一个交点.

有些特殊的函数并不是用解析式给出的，其对应关系是用"一句话"给出的，用特定的符号予以表示，然后再描绘出它的图象，函数的几何性态可一目了然. 例如：

1. "$\forall x\in\mathbf{R}$，对应的 y 是不超过 x 的最大整数." 显然，$\forall x\in\mathbf{R}$ 都对应唯一一个 y. 这是一个函数(如图 1.3)，表为 $y=[x]$，即

$$[2.5]=2,\quad [3]=3,\quad [0]=0,\quad [-\pi]=-4.$$

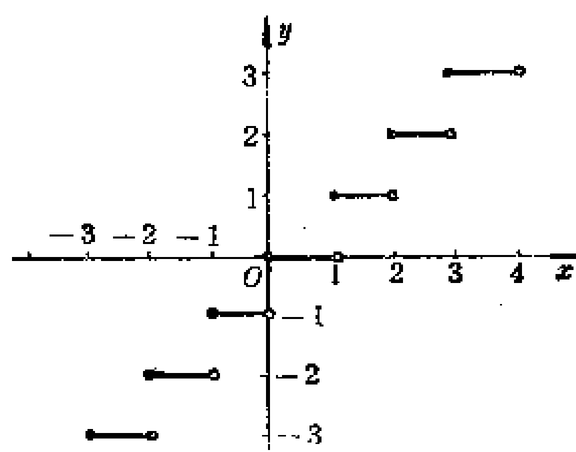


图 1.3

2. "$\forall x\in\mathbf{R}$，对应的 $y=x-[x]$." 这是一个函数(如图 1.4)，表为 $y=\{x\}$，即

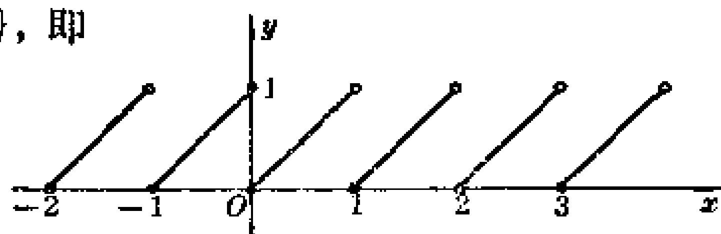


图 1.4

$\{2.5\}=2.5-[2.5]=2.5-2=0.5.$

$\{5\}=5-[5]=5-5=0.$

$\{-3.14\}=-3.14-[-3.14]=-3.14-(-4)=0.86.$

3. “$\forall x>0$，对应 $y=1$；$x=0$，对应 $y=0$；$\forall x<0$，对应 $y=-1$.”显然，$\forall x\in\mathbf{R}$，都对应唯一一个 y. 这是一个函数(如图 1.5)，表为 $y=\operatorname{sgn}x$，即

$$y=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

图 1.5

因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，总有

$$|x|=x\operatorname{sgn}x,$$

所以 $\operatorname{sgn}x$ 起了 x 的符号的作用. 因此，这个函数称为**符号函数**①.

4. “当 x 是有理数时，对应 $y=1$；当 x 是无理数时，对应 $y=0$.”显然，$\forall x\in\mathbf{R}$ 都对应唯一一个 y. 这是一个函数，表为 $y=D(x)$，即

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}.\end{cases}$$

这个函数称为**狄利克莱函数**②(如图 1.6). 因为数轴上有理点与无理点都是稠密的，所以它的图象不能在数轴上准确地描绘出来. 图 1.6是示意图.

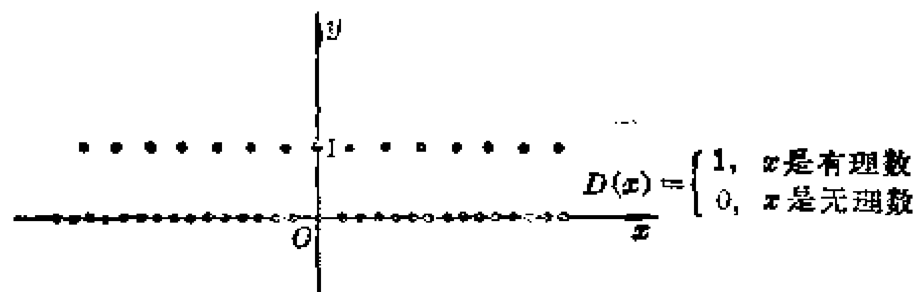


图 1.6

① sgn 是拉丁文 signum(符号)的缩写.

② 狄利克莱(Dirichlet，1805—1859)德国数学家.

四、数列

数列是一类特殊的函数，并且是一类很有用的函数.

定义 定义在自然数集N上的函数 $f(x)$ 称为**数列**.

$\forall n\in\mathrm{N}$，设 $f(n)=a_n$. 因为自然数能够按照大小顺序排列起来，所以数列的值域 $\{a_n|n\in\mathrm{N}\}$ 中的数也能够相应地按照自然数 n 的顺序排列起来，即

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots. \tag{1}$$

a_n 称为数列(1)的第 n 项或通项. 将数列(1)简单地表为 $\{a_n\}$. 自变量 n 与其函数值(因变量) a_n 之间的对应关系 f 如下表:

自变量	1	2	3	4	5	6	…	10	…	100	…	1000	…
函数值	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	…	a_{10}	…	a_{100}	…	a_{1000}	…

数列之例:

1. $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$: $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots$.

2. $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$: $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \cdots, \dfrac{n}{n+1}, \cdots$.

3. $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$: $-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \cdots, \dfrac{(-1)^n}{n}, \cdots$.

4. $\left\{\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}\right\}$: $1, 0, 1, 0, \cdots, \dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}, \cdots$.

5. $\{n!\}$: $1!, 2!, 3!, 4!, \cdots, n!, \cdots$.

6. $\sqrt{2}$ 的不足近似值，精确到 1, 0.1, 0.01, 0.001, … 的数列是

$$1,\quad 1.4,\quad 1.41,\quad 1.414,\quad 1.4142,\quad 1.41421, \cdots.$$

若 $\forall k\in\mathrm{N}$，有 $a_{k+1}-a_k=d$(常数)，$a_1=a$，则称数列 $\{a_n\}$ 是**等差数列**，d 为**公差**. 于是，公差为 d 的等差数列是

$$a, a+d, a+2d, \cdots, a+(n-1)d, \cdots.$$

若 $\forall k\in\mathbf{N}$，有 $a_{k+1}=qa_k$，q 是常数，$a_1=a$，则称数列 $\{a_n\}$ **是等比数列，q 为公比.** 于是，公比为 q 的等比数列是

$$a,aq,aq^2,\cdots,aq^{n-1},\cdots.$$

练习题 1.1

1. 设 $f(x)=\frac{|x-2|}{x+1}$ 求 $f(0),f(2),f(-2),f(1),f\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. 设 $\varphi(x)=2^{x-2}$，求 $\varphi(2)$，$\varphi(-2),\varphi\left(\frac{5}{2}\right),\varphi(a)-\varphi(b)$，$\varphi(a)\varphi(b)$，$\frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}$.

3. 设 $F(x)=x^2-3x+7$，求 $F(2+h),\frac{F(2+h)-F(2)}{h}$.

4. 设 $\psi(t)=ta^t\ (a>0)$，求 $\psi(0),\psi(1),\psi(t+1)$，$\psi(t+1)+1,\psi\left(\frac{1}{t}\right)$，$\frac{1}{\psi(t)}$.

5. 确定下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{3x+4}$.　　(2) $y=\sqrt{2+x-x^2}$.

(3) $y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.　　(4) $y=\arcsin(2x+1)$.

(5) $y=\frac{1}{|x|-x}$.　　(6) $y=\ln(2x+1)+\sqrt{4-3x}$.

(7) $y=\ln\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$.　　(8) $y=x^3+e^{x-1}+\frac{\ln x}{x-4}$.

(9) $y=\frac{1}{e^x-e^{-x}}$.　　(10) $y=\sqrt{\cos x}$.

6. 正方形的周长集合 L 与其面积集合 A 之间的对应是否是函数？三角形的周长集合 l 与其面积集合 S 之间的对应是否是函数？为什么？

7. 下列函数是否相等，为什么？

(1) $f(x)=\frac{x}{x}$　与 $\varphi(x)=1$.

(2) $f(x)=2\lg x$ 与 $\varphi(x)=\lg x^2$.

(3) $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}$ 与 $\varphi(x)=x-3$.

(4) $f(x)=\frac{\pi}{2}x$ 与 $\varphi(x)=x(\arcsin x+\arccos x)$.

8. 证明：若 $\varphi(x)=\ln x$，则 $\varphi(x)+\varphi(x+1)=\varphi[x(x+1)]$.

9. 证明：若 $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$，其中 $a>0$，则

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

10. 证明：若 $\varphi(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$，则 $\varphi(a)+\varphi(b)=\varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.

11. 如果等边三角形的面积为 1，连结这个三角形各边的中点得到一个小三角形，又连结这个小三角形的各边中点得到一个更小的三角形，如此无限继续下去，求出这些三角形面积的数列.

12. 写出无理数

$$\pi=3.141592653\cdots,$$
$$e=2.718281828\cdots,$$

的有理数不足近似值数列与过剩近似值数列，使其精确到 1，0.1，0.01，0.001，….

13. 证明：若 $f(x)=ax+b$，且 $\{x_n\}$ 是等差数列，则 $\{f(x_n)\}$ 也是等差数列.

14. 证明：若 $\{a_n\}$ 是等比数列，且 $a_n>0$，$n=1, 2, \cdots$，则 $\{\ln a_n\}$ 是等差数列.

15. 已知函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的图象（在区间 $[a,b]$ 上可随意画一条曲线，有的点函数值为正，有的点函数值为负），描绘下列函数的图象：

(1) $y_1=|f(x)|$.

(2) $y_2=\frac{1}{2}\{f(x)+|f(x)|\}$.　　(3) $y_3=\frac{1}{2}\{f(x)-|f(x)|\}$.

16. 已知函数 $y_1=f(x)$，$y_2=g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的图象（在区间 $[a,b]$ 上可随意画两条曲线，使其相交），描绘下列函数的图象：

(1) $y=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\}$.

(2) $y=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\}$.

§1.2 四类具有特殊性质的函数

"函数 $f(x)$ 定义在数集 A"与"函数 $f(x)$ 在数集 A 有定义"，这两句话是有不同含意的. 通常人们认为，前者是指数集 A 是函数 $f(x)$ 的定义域；后者是指数集 A 是函数 $f(x)$ 定义域的子集，后者可能是前者.

一、有界函数

定义 设函数 $f(x)$ 在数集 A 有定义. 若函数值的集合

$$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$$

有上界(有下界、有界)，则称函数 $f(x)$ 在 A **有上界**(**有下界**、**有界**)，否则称函数 $f(x)$ 在 A **无上界**(**无下界**、**无界**).

由已知的数集有上界，有下界和有界的定义，不难写出函数 $f(x)$ 在 A 有上界，有下界和有界的肯定叙述，同时也容易写出它们的否定(即无上界，无下界和无界)叙述. 现将它们列表对比如下：

函数 $f(x)$ 在 A 有上界	$\exists b\in\mathbf{R}, \forall x\in A$, 有 $f(x)\leqslant b$
函数 $f(x)$ 在 A 无上界	$\forall b\in\mathbf{R}, \exists x_b\in A$, 有 $f(x_b)>b$
函数 $f(x)$ 在 A 有下界	$\exists a\in\mathbf{R}, \forall x\in A$, 有 $f(x)\geqslant a$
函数 $f(x)$ 在 A 无下界	$\forall a\in\mathbf{R}, \exists x_a\in A$, 有 $f(x_a)<a$
函数 $f(x)$ 在 A 有界	$\exists M>0, \forall x\in A$, 有 $\lvert f(x)\rvert\leqslant M$
函数 $f(x)$ 在 A 无界	$\forall M>0, \exists x_M\in A$, 有 $\lvert f(x_M)\rvert>M$

显然，函数 $f(x)$ 在数集 A 有上界(有下界)必有无限多个上界(无限多个下界).

函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 有界的几何意义是，函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图象位于以二直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 为边界的带形区域

之内(如图 1.7)。

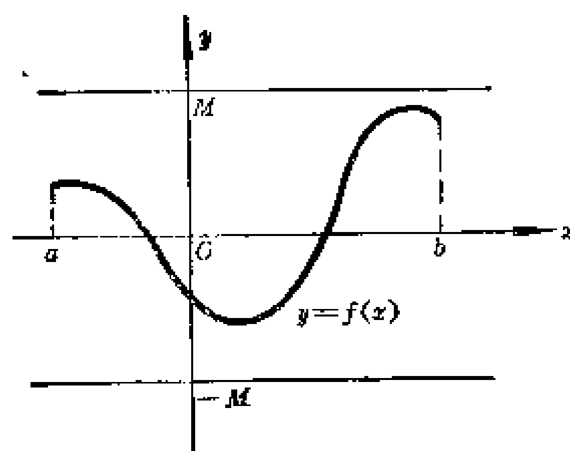


图 1.7

例 1. 正弦函数 $y=\sin x$ 与余弦函数 $y=\cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 有界(如图 1.8与图 1.9)

事实上,$\exists M=1>0$, $\forall x\in\mathbf{R}$,有

$$|\sin x|\leqslant 1 \quad 与 \quad |\cos x|\leqslant 1.$$

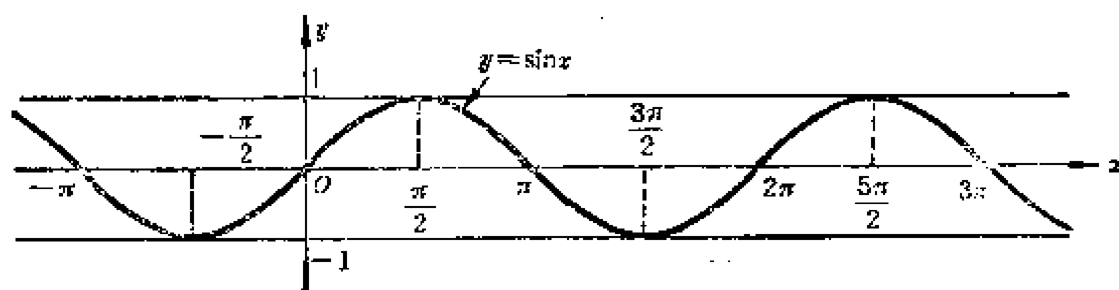


图 1.8

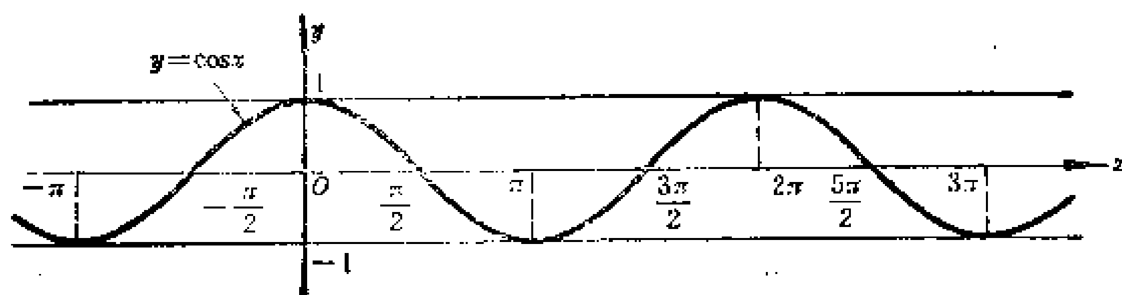


图 1.9

例 2. 反正切函数$y=\mathrm{arctg}x$与反余切函数 $y=\mathrm{arcctg}x$ 在 $\mathbf{R}$ 有界(如图 1.10 与图 1.11).

事实上，$\exists M=\frac{\pi}{2}>0, \forall x\in\mathbf{R}$，有$|\mathrm{arctg}x|<\frac{\pi}{2}$，

与 $\exists M=\pi>0, \forall x\in\mathbf{R}$，有$|\mathrm{arcctg}x|<\pi$

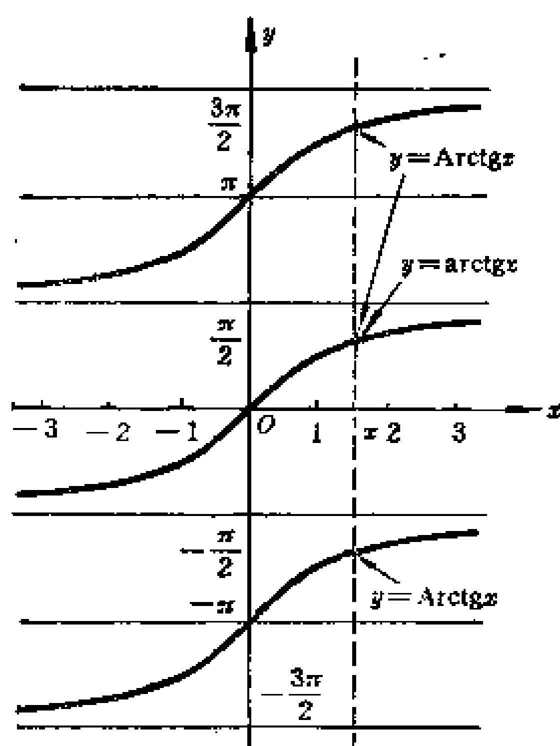


图 1.10

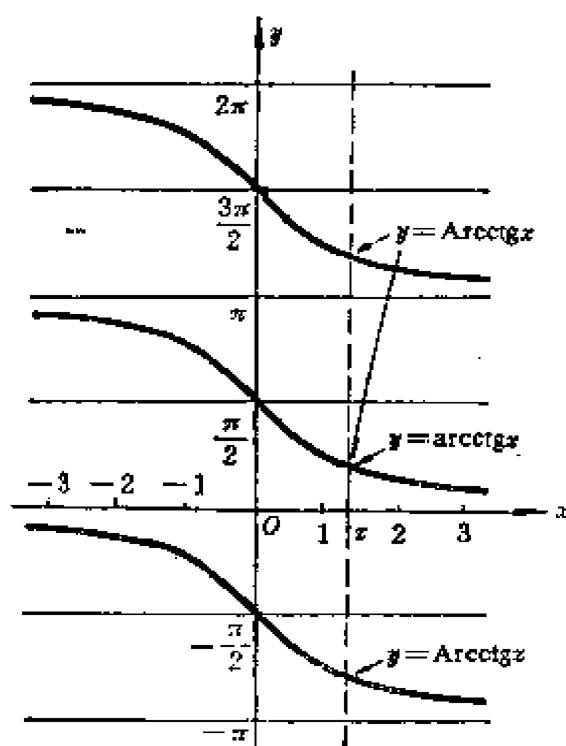


图 1.11

例 3. 数列$\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$与$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$有界.

事实上，$\exists M=1>0, \forall n\in\mathbf{N}$，有

$$\left|\frac{1+(-1)^n}{2}\right|\leqslant 1.$$

与 $\exists M=2>0, \forall n\in\mathbf{N}$，有

$$\left|\frac{n+1}{n}\right|\leqslant 2.$$

例 4. 指数函数 $y=a^x(0<a\neq 1)$ 在 $\mathbf{R}$ 有下界无上界(如图 1.12)；对数函数 $y=\log_a x(0<a\neq 1)$ 在区间$(0,+\infty)$既无上界也

无下界(如图 1.13).

事实上, $\exists P=0$, $\forall x\in \mathbf{R}$, $\forall a:0<a\neq 1$, 有$0<a^x$, 即指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 有下界.

$\forall q>0$, $\exists x_q\in \mathbf{R}$, 有 $a^{x_q}>q$(当 $0<a<1$ 时, 取 $x_q<\log_a q$; 当 $a>1$时, 取 $x_q>\log_a q$), 即指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 无上界.

同法可证, $\forall a:0<a\neq 1$, 对数函数 $y=\log_a x$在区间$(0,+\infty)$既无上界也无下界.

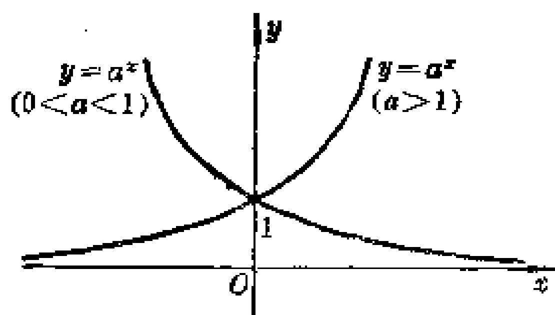


图 1.12

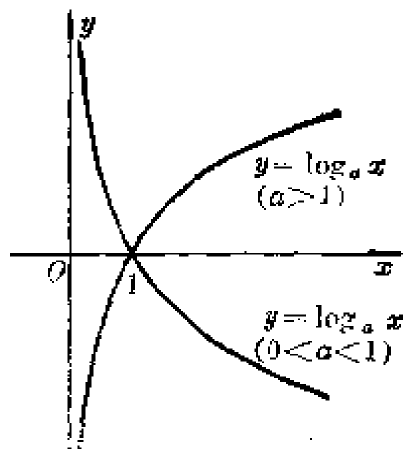


图 1.13

例 5. 数列$\{n\}$有下界无上界; 数列$\{(-1)^n n\}$既无上界也无下界.

事实上, $\forall a\leqslant 1$, 都是数列$\{n\}$的下界; $\forall b>0$, $\exists n_0\in \mathbf{N}$, 有 $n_0>b$, 即数列$\{n\}$有下界无上界.

$$\forall b>0,\begin{cases}\exists k\in \mathbf{N}, \text{有}\ (-1)^{2k}2k=2k>b,\\ \exists k\in \mathbf{N}, \text{有}\ (-1)^{2k+1}(2k+1)=-(2k+1)<-b,\end{cases}$$

即数列$\{(-1)^n n\}$既无上界也无下界.

二、单调函数

定义 设函数 $f(x)$在数集A有定义. 若 $\forall x_1,x_2\in A$, 且$x_1<x_2$, 有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad (f(x_1)>f(x_2)),$$

称函数 $f(x)$在 A 严格增加(严格减少)．上述不等式改为

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad (f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

称函数 $f(x)$在 A 单调增加(单调减少)．

函数 $f(x)$在 A 严格增加、严格减少与单调增加、单调减少，统称为函数 $f(x)$在 A 单调．严格增加与严格减少统称为严格单调．若 A 是区间，此区间称为函数 $f(x)$的单调区间．

例6. 1) 指数函数 $y=a^x$，当 $a>1$ 时，在 $\mathbf{R}$ 严格增加；当 $0<a<1$ 时，在 $\mathbf{R}$ 严格减少(如图 1.12)．

2) 对数函数 $y=\log_a x$，当 $a>1$ 时，在区间$(0,+\infty)$严格增加；当 $0<a<1$ 时，在区间$(0,+\infty)$严格减少(如图1.13)．

3) 反正切函数 $y=\operatorname{arctg}x$ 在 $\mathbf{R}$ 严格增加(如图 1.10)

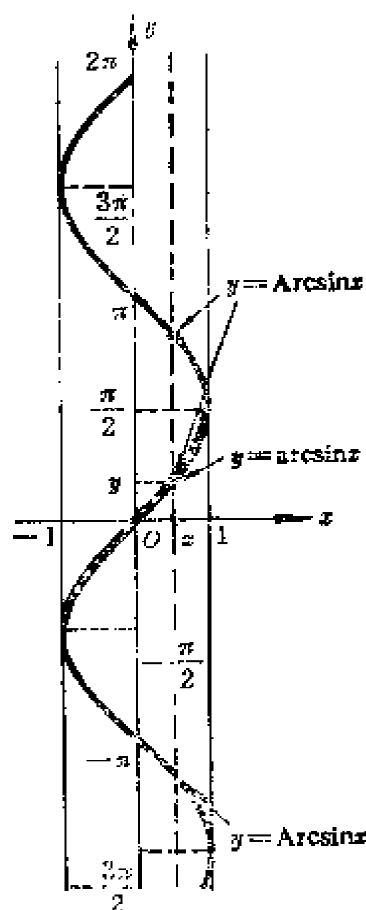


图 1.14

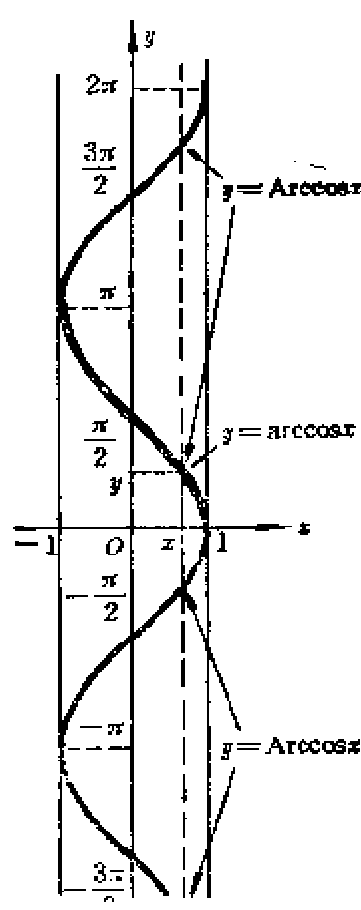


图 1.15

4) 反余切函数 $y=\text{arcctg}x$ 在 $\mathbf{R}$ 严格减少(如图1.11).

5) 反正弦函数 $y=\arcsin x$ 在区间 $[-1,1]$ 严格增加(如图1.14).

6) 反余弦函数 $y=\arccos x$ 在区间 $[-1,1]$ 严格减少(如图1.15).

例 7. 函数 $y=[x]$ 与 $y=\text{sgn}x$ 在 $\mathbf{R}$ 都是单调增加(如图1.3与图1.5).

事实上, $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$, 且 $x_1<x_2$, 有

$$[x_1]\leqslant[x_2] \quad 与 \quad \text{sgn}x_1\leqslant\text{sgn}x_2.$$

例 8. 数列 $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$, $\{n!\}$, $\left\{-\frac{1}{n^2}\right\}$ 都是严格增加; 数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$, $\{-n\}$ 都是严格减少.

三、奇函数与偶函数

定义 函数 $f(x)$ 定义在数集 A. 若 $\forall x\in A$, 有 $-x\in A$, 且

$$f(-x)=-f(x) \quad (f(-x)=f(x)),$$

则称函数 $f(x)$ 是**奇函数**(**偶函数**).

如果点 (x_0,y_0) 在奇函数 $y=f(x)$ 的图象上, 即 $y_0=f(x_0)$, 则

$$f(-x_0)=-f(x_0)=-y_0,$$

即 $(-x_0,-y_0)$ 也在奇函数 $y=f(x)$ 的图象上. 于是, 奇函数的图象关于原点对称.

同理可知, 偶函数的图象关于 y 轴对称.

例 9. 正弦函数 $y=\sin x$ 是奇函数(如图1.8); 余弦函数 $y=\cos x$ 是偶函数(如图1.9).

事实上, $\forall x\in\mathbf{R}$, 有 $-x\in\mathbf{R}$, 且

$$\sin(-x)=-\sin x \quad 与 \quad \cos(-x)=\cos x.$$

例 10. 反正弦函数 $y=\arcsin x$ 是奇函数(如图1.14); 反正

切函数 $y=\operatorname{arc\,tg}x$ 也是奇函数（如图1.10）.

事实上，$\forall x\in[-1,1]$，有 $-x\in[-1,1]$，且

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x.$$

$\forall x\in\mathbf{R}$，有 $-x\in\mathbf{R}$，且

$$\operatorname{arc\,tg}(-x)=-\operatorname{arc\,tg}x.$$

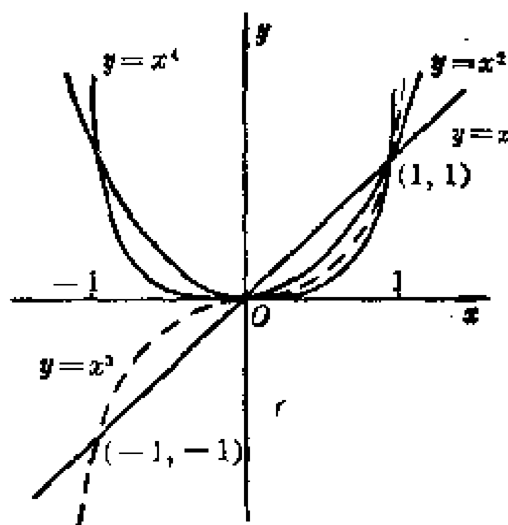


图 1.16

例 11. 幂函数 $y=x^{2k}$ 是偶函数（如图1.16）；$y=x^{2k+1}$ 是奇函数（如图1.16），其中 k 是自然数.

事实上，$\forall x\in\mathbf{R}$，有 $-x\in\mathbf{R}$，且

$$(-x)^{2k}=x^{2k},$$

与

$$(-x)^{2k+1}=-x^{2k+1}.$$

四、周期函数

定义 设函数 $f(x)$ 定义在数集 A. 若 $\exists l>0$，$\forall x\in A$，有 $x\pm l\in A$，且

$$f(x\pm l)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 是**周期函数**，l 称为函数 $f(x)$ 的一个**周期**.

若 l 是函数 $f(x)$ 的周期，则 $2l$ 也是它的周期. 事实上，

$$f(x+2l)=f(\underline{x+l}+l)=f(x+l)=f(x)$$
$$=f(x-l)=f(\underline{x-l}-l)=f(x-2l).$$

不难用归纳法证明，若 l 是函数 $f(x)$ 的周期，则 nl（n 是正整数）也是它的周期. 若函数 $f(x)$ 有最小的正周期，通常将这个最小正周期称为函数 $f(x)$ 的**基本周期**，简称为**周期**.

描绘周期函数的图象，只要在一个周期长的区间上描出函数

的图象．然后将此图象一个周期一个周期向左、右平移，就得到了整个周期函数的图象．

例 12. 正弦函数 $y=\sin x$ 与余弦 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数(如图1.8与图1.9)．

事实上，$\forall x\in\mathbf{R}$，有 $x\pm 2\pi\in\mathbf{R}$，且

$$\sin(x\pm 2\pi)=\sin x \quad 与 \quad \cos(x\pm 2\pi)=\cos x.$$

例 13. 正切函数 $y=\operatorname{tg}x$ 与余切函数 $y=\operatorname{ctg}x$ 都是以 π 为周期的周期函数(如图1.17与图1.18)．

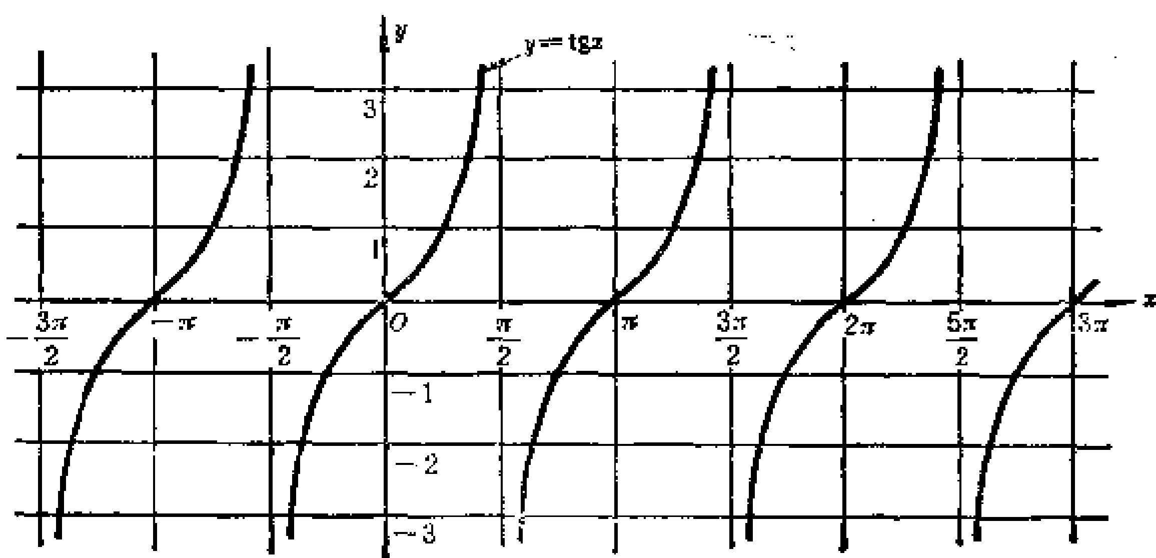


图 1.17

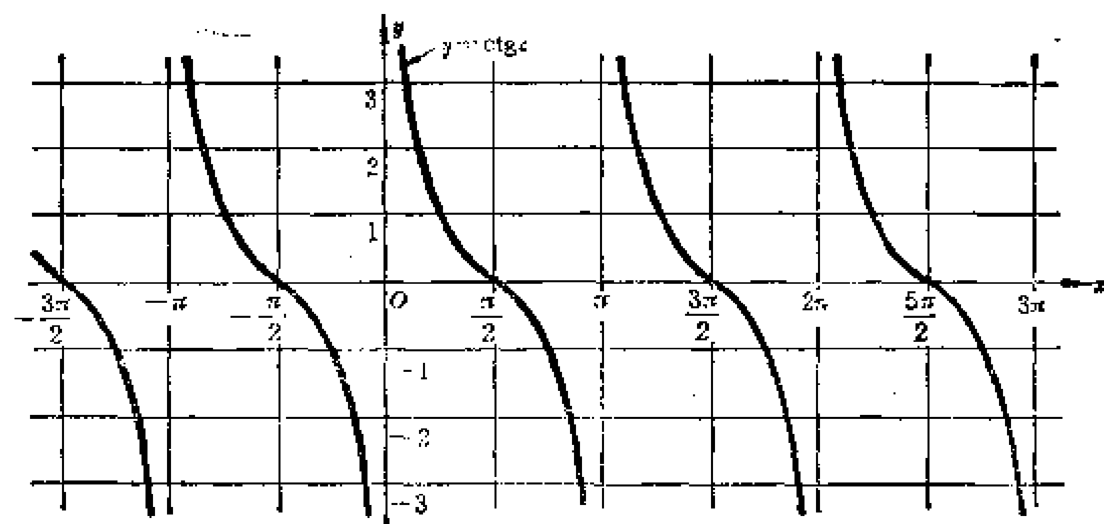


图 1.18

事实上，$\forall x\in \mathbf{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}\middle| k\in \mathbf{Z}\right\}$，有

$$x\pm\pi\in \mathbf{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}\middle| k\in \mathbf{Z}\right\}，且$$

$$\operatorname{tg}(x\pm\pi)=\operatorname{tg}x.$$

$\forall x\in \mathbf{R}-\{k\pi\mid k\in \mathbf{Z}\}$，有 $x\pm\pi\in \mathbf{R}-\{k\pi\mid k\in \mathbf{Z}\}$，且

$$\operatorname{ctg}(x\pm\pi)=\operatorname{ctg}x.$$

例 14. 函数 $y=\{x\}$ 是以 1 为周期的周期函数（如图 1.4）。

事实上，$\forall x\in \mathbf{R}$，有 $x\pm 1\in \mathbf{R}$，且

$$\{x-1\}=(x-1)-[x-1]=x-1-[x]+1=x-[x]=\{x\},$$

$$\{x+1\}=(x+1)-[x+1]=x+1-[x]-1=x-[x]=\{x\},$$

即
$$\{x\pm 1\}=\{x\}.$$

练习题 1.2

1. 证明：若函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在数集 A 有界，则函数 $f(x)+\varphi(x)$，$f(x)-\varphi(x)$，$f(x)\varphi(x)$ 在数集 A 也有界.

2. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的定义域，证明：

(1) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是偶函数，则 $f(x)g(x)$ 是偶函数.

(2) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是奇函数，则 $f(x)g(x)$ 是偶函数.

(3) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$，一个是偶函数另一个是奇函数，则 $f(x)g(x)$ 是奇函数.

3. 证明：若函数 $f(x)$ 定义域是 R，则 $F_1(x)=f(x)+f(-x)$ 是偶函数；$F_2(x)=f(x)-f(-x)$ 是奇函数，并写出函数 $f(x)=a^x$ 与 $f(x)=(1+x)^n$ 的 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$.

4. 指出下列函数哪些是奇函数？哪些是偶函数？

(1) $x+3x^3+x^5$.　　(2) $x^2-3x^4+x^6$.　　(3) $x+\sin x$.

(4) $x\sin\frac{1}{x}$.　　(5) $x^2\sin\frac{1}{x}$.　　(6) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

(7) $\ln\frac{1-x}{1+x}$.　　(8) 2^{x^2-1}.　　(9) $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

5. 证明：函数 $f(x)=\frac{1}{x}$在区间$(0,1)$无界.

6. 判断下列函数哪个是周期函数,若有最小的正周期,并指出最小的正周期:

(1) $y=\sin^2 x$.　(2) $y=\sin x^2$.　(3) $y=\sin(\omega x+\varphi)$, $\omega>0$.

(4) $y=\cos 5\pi x$.　(5) $y=\sqrt{\operatorname{tg} x}$.　(6) $y=D(x)$(狄利克莱函数)

(7) $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$.　(8) $y=\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{5}$.

7. 证明：若函数$f(x)$是以T为周期的周期函数，则函数$F(x)=f(ax)$是以$\frac{T}{a}(a>0)$为周期的周期函数.

8. 证明：函数$f(x)$在区间I单调

$$\Longleftrightarrow \forall x_1,x_2,x_3\in I, \text{且 } x_1<x_2<x_3, \text{有}$$
$$[f(x_3)-f(x_1)][f(x_2)-f(x_1)]\geqslant 0.$$

*　　*　　*　　*

9. 例举符合下列条件的函数:

(1) 在 R 严格减少的奇函数.

(2) 在 R 单调减少的偶函数.

(3) 在 R 是偶函数、周期函数、且不存在单调区间.

(4) 在 R 是奇函数、偶函数、单调函数、周期函数.

10. 证明：在 R 不存在严格增加的偶函数.

11. 列表对比下列的定义及其否定叙述:

(1) $f(x)$在 R 是偶函数与不是偶函数.

(2) $f(x)$在 R 是周期函数与不是周期函数.

(3) $f(x)$在(a,b)是严格增加函数与不是严格增加函数.

(4) $f(x)$在(a,b)是单调减少函数与不是单调减少函数.

12. 证明：$f(x)=x^2-x$在 R 不是偶函数，不是周期函数,不是严格增加函数,也不是单调减少函数.

13. 证明：在区间$(-l,l)$有定义的任意函数$f(x)$都能表成奇函数与偶函数之和.（提示：见第 3 题）.

14. 证明：若函数$f(x)$与$g(x)$都是定义在A的周期函数，周期分别是T_1与T_2,且$\frac{T_1}{T_2}=a$,而a是有理数，则$f(x)+g(x)$与$f(x)g(x)$都是A的周期函数.

§1.3 复合函数与反函数

一、复合函数

由两个或两个以上的函数用所谓"中间变量"传递的方法能生成新的函数. 例如,函数

$$z=\ln y \quad 与 \quad y=x-1$$

由"中间变量"y 的传递生成新函数

$$z=\ln(x-1).$$

在这里,z 是 y 的函数,y 又是 x 的函数. 于是,通过中间变量 y 的传递得到 z 是 x 的函数. 为了使函数 $z=\ln y$ 有意义, 必须要求 $y>0$,为了使函数 $y=x-1>0$,必须要求 $x>1$. 仅对函数 $y=x-1$ 来说,x 可取任意实数. 但是,对生成的新函数 $z=\ln(x-1)$来说,必须要求 $x>1$.

定义 设函数 $z=f(y)$定义在数集 B, 函数 $y=\varphi(x)$ 定义在数集 A, G 是 A 中使 $y=\varphi(x)\in B$ 的 x 的非空子集(如图 1.19),即

$$G=\{x \mid x\in A, \varphi(x)\in B\}\neq\varnothing.$$

$\forall x\in G$,按照对应关系 φ,对应唯一一个 $y\in B$,再按照对应关系 f 对应唯一一个 z(如图 1.19),即 $\forall x\in G$ 都对应唯一一个 z. 于是在 G 上定义了一个函数,表为 $f\circ\varphi$, 称为函数 $y=\varphi(x)$与 $z=f(y)$的**复合函数**,即

$$(f\circ\varphi)(x)=f[\varphi(x)], \quad x\in G,$$

y 称为**中间变量**(如图1.20). 今后经常将函数 $y=\varphi(x)$与 $z=f(y)$ 的复合函数表为

$$z=f[\varphi(x)], \quad x\in G.$$

例如, 函数 $z=\sqrt{y}$ 的定义域是区间$[0,+\infty)$, 函数

$$y=(x-1)(2-x)$$

的定义域是 $\mathbb{R}$. 为了使其生成复合函数，必须要求

$$y=(x-1)(2-x)\geqslant 0, \text{即 } 1\leqslant x\leqslant 2.$$

于是，$\forall x\in[1,2]$，函数 $y=(x-1)(2-x)$ 与 $z=\sqrt{y}$ 生成了复合函数

$$z=\sqrt{(x-1)(2-x)}.$$

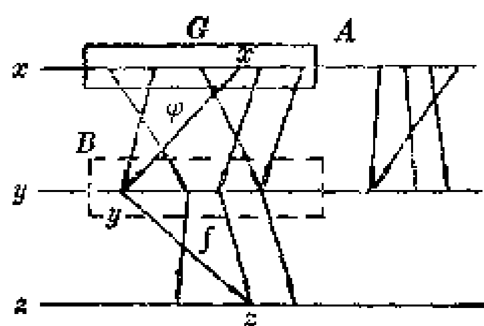


图 1.19

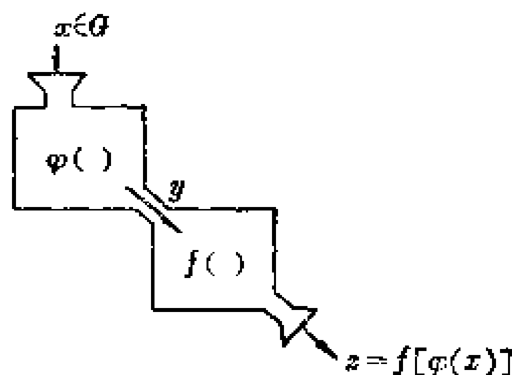


图 1.20

例如，质量为 m 的物体自由下落. 已知速度 v 是时间 t 的函数 $v=gt$，动能 E 是速度 v 的函数 $E=\frac{1}{2}mv^2$. 于是，通过中间变量 v，动能 E 就是时间 t 的函数，即

$$E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mg^2t^2,$$

其中 g 是重力加速度，是常数.

以上是两个函数生成的复合函数. 不难将复合函数概念推广到有限个函数生成的复合函数. 例如，三个函数

$$u=\sqrt{z}, z=\ln y, y=2x+3$$

生成的复合函数是

$$u=\sqrt{\ln(2x+3)},\quad x\in[-1,+\infty).$$

我们不仅能够将若干个简单函数生成为复合函数，而且还要

善于将复合函数“分解”为若干个简单函数. 例如，函数

$$y=\operatorname{tg}^5\sqrt[3]{\lg\arcsin x}$$

是由五个简单函数 $y=u^5, u=\operatorname{tg}v, v=\sqrt[3]{w}$, $w=\lg t$, $t=\arcsin x$ 所生成的复合函数.

注 $f\circ\varphi$ 是函数 φ 与 f 的一种运算——复合运算. 一般来说，$f\circ\varphi\neq\varphi\circ f$(尽管个别点的函数值可能相等，但是作为函数不相等). 例如，设 $f(x)=\sin x, g(x)=x^2$, 则

$$(f\circ g)(x)=\sin x^2\neq(\sin x)^2=(g\circ f)(x), \forall x\neq 0.$$

这说明函数的复合运算与加、乘运算不同，它不满足交换律. 容易证明它满足结合律:

$$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h.$$

二、反函数

我们在高中《代数》已经学习了反函数，如对数函数是指数函数的反函数，反三角函数是三角函数的反函数. 鉴于反函数的重要性，本段将复习反函数的概念及其图象.

在圆的面积公式(函数)

$$S=\pi r^2$$

中，半径 r 是自变量，面积 S 是因变量，即对任意半径 $r\in[0,+\infty)$ 对应唯一一个面积 S. 这个函数还有一个性质：反之，对任意面积 $S\in[0,+\infty)$, 按此对应关系，也对应唯一一个半径 r, 即

$$r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

函数 $r=\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$ 就是所谓函数 $S=\pi r^2$ 的反函数.

对给定的函数 $y=f(x), x\in A$. 由函数定义，$\forall x\in A$, 按照对应关系 f, 对应唯一一个 $y\in f(A)\subset\mathbb{R}$, 即单值对应. 反过来，$\forall y\in f(A)$ 就不一定只有一个 $x\in A$, 使 $y=f(x)$, 即一个函数不一定存在

反函数．什么样的函数存在反函数呢？

定义 设函数 $y=f(x)$ 在数集 A 有定义．若 $\forall x_1,x_2\in A$，有

$$x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)\quad (\text{或 } f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 A **一一对应**．

函数 $y=f(x)$ 在 A 一一对应，就是 f 把不同的 $x\in A$ 对应为不同的 $y=f(x)\in f(A)$，即 $\forall y\in f(A)$ 只有唯一一个 $x\in A$，使 $f(x)=y$．

定义 设函数 $y=f(x)$ 在 A 一一对应，即 $\forall y\in f(A)$，存在唯一一个 $x\in A$，使 $f(x)=y$，这是一个由 $f(A)$ 到 A 新的对应关系，称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，表为

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in f(A).$$

由反函数的定义不难看到，反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域恰好是函数 $y=f(x)$ 的值域和定义域．函数 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 是互为反函数，有

$$f^{-1}[f(x)]\equiv x,\quad x\in A.$$

$$f[f^{-1}(y)]\equiv y,\quad y\in f(A).$$

例 1. 函数 $y=2x+1$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，值域也是 $\mathbf{R}$．按照 $y=2x+1$，$\forall y\in\mathbf{R}$（值域），对应 $\mathbf{R}$（定义域）中唯一一个 x，即 $x=\frac{1}{2}(y-1)$，则函数 $y=2x+1$ 的反函数是

$$x=\frac{1}{2}(y-1),x\in\mathbf{R}.$$

例 2. 指数函数 $y=a^x(0<a\neq1)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，值域是区间 $(0,+\infty)$．按照 $y=a^x$，$\forall y\in(0,+\infty)$，对应 $\mathbf{R}$ 中唯一一个 x，这个函数就是指数函数 $y=a^x$ 的反函数，即对数函数

$$x=\log_a y,\quad y\in(0,+\infty).$$

由函数的严格单调的定义不难证明：

定理 1. 若函数 $y=f(x)$ 在数集 A 严格增加（严格减少），则

函数 $y=f(x)$ 存在反函数，且反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $f(A)$ 也严格增加(严格减少).

证明从略. 作为练习题.

因为例 1 与例 2 所给的函数在其定义域都是严格单调的，所以根据定理 1，它们都存在严格单调的反函数.

函数的严格单调性是它存在反函数的充分条件，而不是必要条件. 例如，函数

$$y=\begin{cases}-x+1, & -1\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

在区间 $[-1,1]$ 不是单调函数(如图 1.21). 但是，它在 $f([-1,1])=[0,2]$ 却存在反函数

$$x=f^{-1}(y)=\begin{cases}y, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 1-y, & 1<y\leqslant 2.\end{cases}$$

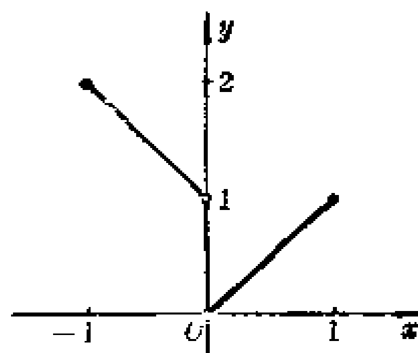


图 1.21

一般说来，函数在定义域上不一定存在反函数. 但是，将函数限定在定义域的某个子集上，就可能存在反函数. 例如，函数 $y=x^2$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 不存在反函数（即 $\forall y>0$ 对应两个不同的 $x=\pm\sqrt{y}$）. 但是，将函数 $y=x^2$ 限定在区间 $[0,+\infty)\subset\mathbf{R}$，函数 $y=x^2$ 是严格增加的，根据定理 1，它存在严格增加的反函数，反函数是 $x=\sqrt{y}$，$y\in[0,+\infty)$.

三角函数 $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ 在各自的定义域上都不存在反函数. 为了讨论它们的反函数，我们约定，如果存在以原点为中心的严格单调区间，就在这个严格单调区间上定义反三角函数的主值. 例如，正弦函数 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 与正切函数 $y=\operatorname{tg} x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 都是严格增加的. 根据定理 1，它们都存在严格增加的反函数. 正弦函数 $y=\sin x$ 的反函数就是反正弦函数 $x=\arcsin y$.

正切函数 $y=\operatorname{tg}x$ 的反函数就是反正切函数 $x=\operatorname{arc\,tg}y$. 如果不存在以原点为心的严格单调区间，我们约定，在原点的右侧的严格单调区间（原点是区间的左端点）定义反三角函数的主值. 例如，余弦函数 $y=\cos x$ 在$[0,\pi]$与余切函数 $y=\operatorname{ctg}x$ 在 $(0,\pi)$ 都是严格减少的. 根据定理 1，它们都存在严格减少的反函数. 余弦函数 $y=\cos x$ 的反函数就是反余弦函数 $x=\arccos y$. 余切函数 $y=\operatorname{ctg}x$ 的反函数就是反余切函数 $x=\operatorname{arc\,ctg}y$. 除此而外，三角函数在其它的严格单调区间上的反三角函数都能用它的主值表示出来. 例如：

三角函数 $y=\sin x$ 在严格单调区间$\left[k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$的反三角函数是

$$x=k\pi+(-1)^k\arcsin y.$$

余弦函数 $y=\cos x$ 在严格单调区间 $[2k\pi,\ (2k+1)\pi]$ $([(2k-1)\pi,2k\pi])$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$的反余弦函数是

$$x=2k\pi+\arccos y\quad(x=2k\pi-\arccos y).$$

在平面直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 的图象与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图象是相同的. 这里反函数的自变数是 y. 当孤立地讨论某函数的反函数性质时，人们习惯用 x 表示函数的自变量. 这样对讨论函数的性质，描绘函数的图象都比较方便. 这是因为讨论反函数的性质，与这个反函数的自变量用什么字母表示无关. 当着将函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的自变量 y 与因变量 x 调换位置时，即 $y=f^{-1}(x)$，那么函数 $y=f(x)$的图象与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图象就不同了. 显然，若任意点 $M(a,b)$在函数 $y=f(x)$ 的图象上，那么点 $M'(b,a)$必在其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图象上，反之亦然. 因为已知点 $M(a,b)$ 与点 $M'(b,a)$关于直线 $y=x$ 对称，所以函数 $y=f(x)$ 的图象与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，如图1.22.

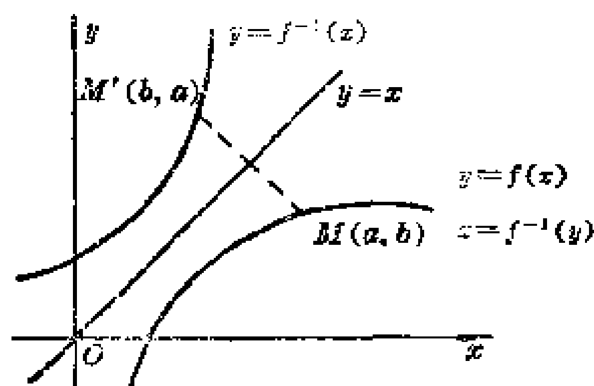


图 1.22

已知指数函数$y=a^x(0<a\neq1)$的反函数是对数函数$x=\log_a y$. 当孤立地讨论对数函数的性质时，将对数函数写为 $y=\log_a x$. 从而指数函数 $y=a^x$ 的图象与其反函数——对数函数$y=\log_a x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

当函数 $y=f(x)$ 与其反函数在一起讨论时，其反函数应表为 $x=f^{-1}(y)$.

三、初等函数

在数学的发展过程中，形成了最简单最常用的六类函数，即常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数，这六类函数称为**基本初等函数**.

1. 常数函数

$y=c$　或　$f(x)=c, x\in\mathrm{R}$,

其中 c 是常数. 它的图象是通过点$(0,c)$,且平行 x 轴的直线. 如图1.23.

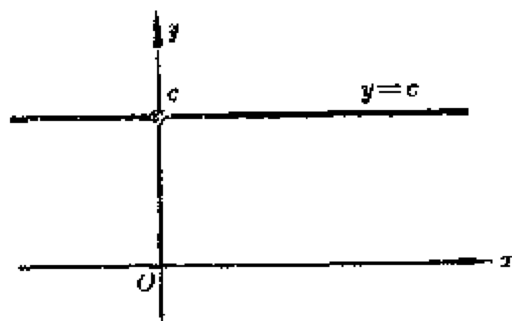


图 1.23

常数函数是有界函数. 周期函数(没有最小的正周期)、偶函数. 既是单调增加函数又是单调减少函数. 特别是当 $c=0$ 时，它还是奇函数.

其它五类基本初等函数的一些性质在中学《代数》已作了讨

论，将这些性质集中列表如下：

2. 幂函数

形如 $y=x^{\alpha}$ 的函数是幂函数，其中 α 是实数．这里仅就 α 是有理数 $\frac{p}{q}$（q 是自然数，p 是整数，且 p 与 q 互质）讨论，即讨论函数 $y=x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{x^{p}}$．此函数的性质与 p、q 有关．

$y=x^{\frac{p}{q}}$，q 是自然数，p 是整数，p 与 q 互质

q	q 是偶数		q 是奇数			
p	p 必是奇数		$p>0$		$p<0$	
	$p>0$	$p<0$	p 是奇数	p 是偶数	p 是奇数	p 是偶数
例	$x^{\frac{1}{2}}$	$x^{-\frac{1}{2}}$	$x^{\frac{1}{3}}$	$x^{\frac{2}{3}}$	$x^{-\frac{1}{3}}$	$x^{-\frac{2}{3}}$
定义域	$[0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}-\{0\}$	$\mathbf{R}-\{0\}$
值　域	$[0,+\infty$	$(0,+\infty)$	$\mathbf{R}$	$[0,+\infty)$	$\mathbf{R}-\{0\}$	$(0,+\infty)$
严增区间	$[0,+\infty)$		$\mathbf{R}$	$[0,+\infty)$		$(-\infty,0)$
严减区间		$(0,+\infty)$		$(-\infty,0]$	$(-\infty,0)$ $(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
奇偶性			奇	偶	奇	偶

3. 指数函数与对数函数

$$y=a^{x} \text{ 与 } y=\log_{a}x,\quad 0<a\neq 1.$$

	$y=a^{x}$		$y=\log_{a}x$	
a	$0<a<1$	$1<a$	$0<a<1$	$1<a$
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
值　域	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
严增区间		$\mathbf{R}$		$(0,+\infty)$
严减区间	$\mathbf{R}$		$(0,+\infty)$	
图	图1.12	图1.12	图1.13	图1.13

4. 三角函数

$$y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=\operatorname{tg}x,\ y=\operatorname{ctg}x.$$

	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\operatorname{tg}x$	$y=\operatorname{ctg}x$
定义域	R	R	$R-\{k\pi+\frac{\pi}{2}\}$	$R-\{k\pi\}$
值域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	R	R
严增区间	$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$	$[(2k-1)\pi, 2k\pi]$	$\left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$	
严减区间	$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$	$[2k\pi, (2k+1)\pi]$		$(k\pi, (k+1)\pi)$
奇偶性	奇	偶	奇	奇
周期	2π	2π	π	π
图	图1.8	图1.9	图1.17	图1.18

其中 k 是整数.

5. 反三角函数

$$y=\arcsin x,\quad y=\arccos x,\quad y=\operatorname{arctg}x,\quad y=\operatorname{arcctg}x.$$

	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\operatorname{arctg}x$	$y=\operatorname{arcctg}x$
定义域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	R	R
(主)值域	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[0, \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$(0, \pi)$
严增区间	$[-1, 1]$		R	
严减区间		$[-1, 1]$		R
奇偶性	奇		奇	
图	图1.14	图1.15	图1.10	图1.11

凡是由基本初等函数经过有限次的四则运算以及有限次的复合所生成的函数称为**初等函数**. 例如，函数

$$y=\log_a \cos x^2,\ y=\frac{1+x+e^x}{\sqrt{1-x^2}},\ y=e^{-x^2}+\frac{\operatorname{tg} x}{x},$$

等都是初等函数. 但是, 狄利克莱函数 $D(x)$, 符号函数 $\operatorname{sgn} x$, 整数函数 $[x]$ 等都不是初等函数.

在工程技术中经常要用到一类所谓**双曲函数**, 它们是由指数函数 $y=e^x$ 与 $y=e^{-x}$ 生成的初等函数. 它们的定义和符号如下:

双曲正弦 $\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

双曲余弦 $\operatorname{ch} x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

双曲正切 $\operatorname{th} x=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

双曲余切 $\operatorname{cth} x=\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

双曲正弦、双曲余弦和双曲正切的定义域都是实数集 R, 双曲余切的定义域是实数集 R 去掉 0, 即 $\mathrm{R}-\{0\}$.

双曲函数的公式与三角函数的公式非常相似. 由双曲函数的定义, 不难直接证明下列公式:

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1.$$

$$\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x=e^x, \qquad \operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x=e^{-x}.$$

$$\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} y\pm\operatorname{ch} x\operatorname{sh} y.$$

$$\operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y\pm\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y.$$

$$\operatorname{th}(x\pm y)=\frac{\operatorname{th} x\pm\operatorname{th} y}{1\pm\operatorname{th} x\operatorname{th} y}.$$

$$\operatorname{cth}(x\pm y)=\frac{1\pm\operatorname{cth} x\operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x\pm\operatorname{cth} y}.$$

练习题 1.3

1. 指出下列函数在指定区间的反函数及其定义域:

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,0]$. (2) $y=10^{x+2}$, $x\in\mathrm{R}$.

(3) $y=\ln(2x+1), x\in\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

(4) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, a,b,c,d是常数，且$ad-bc\neq 0$。

(5) $y=\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$, $x\in\mathbf{R}$.

(6) $y=\begin{cases} x, & x\in(-\infty,1), \\ x^2, & x\in[1,4], \\ 2^x, & x\in(4,+\infty). \end{cases}$

2. 证明：若函数 $y=\varphi(x)$ 在数集 A 严格减少，则函数 $y=\varphi(x)$ 存在反函数 $x=\varphi^{-1}(y)$，且反函数 $x=\varphi^{-1}(y)$ 在 $\varphi(A)$ 也严格减少。

3. 求下列函数生成的复合函数 $f[\varphi(x)]$:

(1) $f(y)=y^3$, $\quad\varphi(x)=x+2$.

(2) $f(y)=\sqrt{y^2+1}$, $\quad\varphi(x)=\operatorname{tg}x$.

(3) $f(y)=\begin{cases} 2, & y\leqslant 0, \\ y^2, & y>0, \end{cases}$ $\quad\varphi(x)=\begin{cases} -x^2, & x\leqslant 0, \\ x^3, & x>0, \end{cases}$

4. 设 $f(x)=\frac{1}{1+x}$, $g(x)=1+x^2$, 求 $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $g\left(\frac{1}{x}\right)$, $f[f(x)]$, $g[g(x)]$, $f[g(x)]$, $g[f(x)]$, $g[f(1)]$, $f[g(2)]$, $f\{f[f(1)]\}$.

5. 证明：若函数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 都是单调增加的，且

$$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x),$$

则

$$f[f(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant h[h(x)].$$

6. 将下列复合函数"分解"为基本初等函数：

(1) $y=\sqrt[3]{\arcsin a^x}$, $\qquad$ (2) $y=\sin^3\ln(x+1)$,

(3) $y=\ln\cos\sqrt[3]{\arccos x}$, $\qquad$ (4) $y=a^{\sin(3x-1)}$,

(5) $y=\ln[\ln^2(\ln^3 x)]$.

7. 设 $f(x)$是x 的二次函数，且 $f(0)=1$, $f(x+1)-f(x)=2x$, 求函数 $f(x)$.

8. 证明：$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$.

9. 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$, 求函数 $f(x)$.

10. 设 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f\{\underbrace{f[\cdots f}_{n\text{次}}(x)]\}$.

11. 证明：若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是奇函数，则 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 都是奇函数.

12. 证明：

$$\mathrm{sh}(x \pm y) = \mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y \pm \mathrm{ch}x\,\mathrm{sh}y.$$

$$\mathrm{th}(x \pm y) = \frac{\mathrm{th}x \pm \mathrm{th}y}{1 \pm \mathrm{th}x\,\mathrm{th}y}.$$

第二章 极 限

我们在第一章已经指出，数学分析这门课程研究的对象是函数. 那么数学分析用什么方法研究函数呢？这个方法就是极限. 从方法论来说，这是数学分析区别于初等数学的显著标志. 数学分析中几乎所有的概念都离不开极限. 因此，极限概念是数学分析的重要概念，极限理论是数学分析的基础理论.

§2.1 数 列 极 限

一、极限思想

在中学《几何》中，甚至在小学《算术》中，都知道半径为R的圆的周长

$$C=2\pi R,$$

其中π是圆周率，是常数. 那么这个圆的周长公式是怎样得到的呢？

我们会用直尺度量线段的长，从而也就会度量多边形的周长，因而多边形的周长是已知的. 圆周是一条封闭曲线，无法用直尺直接度量它的长. 这就出现了一个新问题：何谓圆的周长？也就是，怎样定义圆的周长？这是计算圆的周长的基础. 圆的周长是个未知的新概念. 我们知道，未知新概念必须建立在已知概念的基础上. 在这里未知的圆的周长是建立在已知的多边形周长的基础上. 那么怎样借助于已知的多边形的周长定义圆的周长呢？

我国古代杰出的数学家刘徽于魏景元四年（公元 263 年）创立的"割圆术"，它就是借助于圆的一串内接正多边形的周长数列定

义了圆的周长．其作法是：首先作圆的内接正六边形，其次平分每个边所对的弧，作圆的内接正十二边形，以下用同样的方法，继续作圆的内接正二十四边形，圆的内接正四十八边形，等等．如图 2.1．显然，不论正多边形的边数怎样多，每个圆的内接正多边形的周长都是已知的．于是，得到一串圆的内接正多边形的周长数列：

$$P_6, P_{12}, P_{24}, \cdots, P_{2^{n-1}6}, \cdots.$$

其中通项 $P_{2^{n-1}6}$ 表示第 n 次作出的圆的内接正 $2^{n+1}6$ 边形的周长．那么这一串圆的内接正多边形与该圆周是什么关系呢？刘徽说："割之弥细，所失弥少．割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣"．很明显，当圆的内接正多边形的边数成倍无限增加时，这一串圆的内接正多边形将无限地趋近于该圆周，即它们的极限位置就是该圆周．从内接的正多边形的周长说，当 n 无限增大时，这一串圆的内接正多边形的周长数列 $\{P_{2^{n-1}6}\}$ 将渐趋稳定于某个数 l．换句话说，"割之弥细"，用圆的内接正多边形的周长近似代替圆的周长，而圆的周长"所失弥少"，当"割之又割，以至于不可割"，即圆的内接正多边形的边数成倍无限增加时，这一串圆的内接正多边形的极限位置"则与圆合体"，此时，这一串圆的内接正多边形的周长数列 $\{P_{2^{n-1}6}\}$ 稳定于某个数 l，l 就应该是该圆的周长．只有在无限的过程中，才能真正作到"无所失矣"．

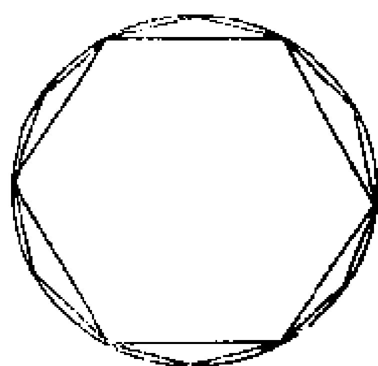


图 2.1

圆的内接正多边形的边数及其周长列表如下：

作内接正多边形的次数	1	2	3	4	…	n	…
内接正多边形的边数	6	12	24	48	…	$2^{n-1}6$	…
内接正多边形的周长	P_6	P_{12}	P_{24}	P_{48}	…	$P_{2^{n-1}6}$	…

根据上述的分析，圆的周长可以这样定义：若圆的内接正多边形的周长数列 $\{P_{2^{n-1}6}\}$ 稳定于某个数 l（当 n 无限增大时），则称 l 是该圆的**周长**.

圆是曲边形，它的内接正多边形是直边形，二者有本质的区别. 但是这个区别又不是绝对的，在一定条件下，圆的内接正多边形能够转化为该圆周. 这个条件就是“当圆的内接正多边形的边数无限增加时”，注意其中“无限”二字. 因此在无限过程中，直边形能够转化为曲边形，即在无限过程中，由直边形的周长数列得到了曲边形的周长. 这就是极限的思想和方法在定义圆的周长上的应用.

根据圆的周长定义，我们能够计算出半径为 R 的圆的周长 $C=2\pi R$，从略.

二、数列 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 的极限

首先讨论一个数列 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$：

$$-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{(-1)^n}{n},\cdots \tag{1}$$

的变化趋势. 显然，数列(1)有一个稳定的变化趋势，即“当 n 无限增大时，数列 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 无限趋近于 0”. 数 0 就是所谓的数列 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 的“极限”. 在这里只是用“无限增大”和“无限趋近”这类朴素的形象的语言，对极限作了定性的描述. 在数学中无法进行严谨的论证，为此必须把定性的描述上升为精确的定量定义.

何谓“当 n 无限增大时，数列 $\left\{\frac{(n-1)^n}{n}\right\}$ 无限趋近于 0”呢？那就是，当 n 充分大时，数列的第 n 项 $\frac{(-1)^n}{n}$ 与 0 的距离

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|=\frac{1}{n}$$

能任意小，并保持任意小．何谓"距离$\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|=\frac{1}{n}$任意小，并保持任意小"？那就是，

对$\frac{1}{10}$，能够做到$\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{10}$，只须 $n>10$ 即可，即数列(1)的第 10 项$\frac{1}{10}$以后的所有项：

$$-\frac{1}{11},\frac{1}{12},-\frac{1}{13},\cdots$$

都能满足这个不等式．

对$\frac{1}{10^2}$，能够做到$\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{10^2}$，只须 $n>10^2$ 即可，即数列(1)的第 10^2 项$\frac{1}{10^2}$以后的所有项：

$$-\frac{1}{101},\frac{1}{102},-\frac{1}{103},\cdots$$

都能满足这个不等式．

对$\frac{1}{10^4}$，能够做到$\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{10^4}$，只须 $n>10^4$ 即可，即数列(1)的第 10^4 项$\frac{1}{10^4}$以后的所有项：

$$-\frac{1}{10001},\frac{1}{10002},-\frac{1}{10003},\cdots$$

都能满足这个不等式．

到此为止，仅作了三次验证，最小的数是$\frac{1}{10^4}$对极限来说远远没有完成．$\frac{1}{10^4}$这数的大或小是相对的．一般来说，$\frac{1}{10^4}$是比较小的，但它毕竟是常数．对描述$\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|=\frac{1}{n}$任意小，并保持任意小

来说，比$\frac{1}{10^4}$小的正数仍有无限多个．因此，描述当 n 充分大时，距离$\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|=\frac{1}{n}$能任意小，并保持任意小，必须对任意小的正数 ε，只要 n 充分大，总有不等式

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

成立才行．事实上，这也是能够做到的．显然，只要自然数 $n>\frac{1}{\varepsilon}$ 就行，即从数列(1)的第$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$项（$\frac{1}{\varepsilon}$不一定是正整数，从而取不超过$\frac{1}{\varepsilon}$的最大整数$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$）以后的所有项都满足这个不等式．

综上分析，"数 0 是数列$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$的极限"或"数列$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$的极限是 0"的定量定义应是：

对任意 $\varepsilon>0$，总存在自然数 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，对任意自然数 $n>N$，有

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|<\varepsilon.$$

这句话总共有四小段，前后两小段"对任意 $\varepsilon>0$，……，有$\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|<\varepsilon$"，表明数列$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$无限趋近于 0．正是因为 ε 具有任意性，不等式$\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|<\varepsilon$ 才表明数列$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$趋近于 0 的无限性．中间的两小段"总存在自然数 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，对任意自然数 $n>N$"，是用数列的序号说明，数列$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$中存在某一项$\frac{(-1)^N}{N}$，在此项后面的所有项都满足不等式$\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|<\varepsilon$．这就是用相对静态的定量的 ε 和不等式刻划了"数列$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$的极限是 0"．

三、数列极限概念

上面给出了一个特殊的"数列$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$的极限是0"的定量定义. 根据同样的思想方法和数学语言,不难给出一般的"数列$\{a_n\}$的极限是a"的定量定义.

定义 设有数列$\{a_n\}$. a是常数. 若对任意$\varepsilon>0$, 总存在自然数N,对任意自然数$n>N$,有

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

则称数列$\{a_n\}$的**极限是a**(或a是数列$\{a_n\}$的极限)或**数列$\{a_n\}$收敛于a**($\{a_n\}$是收敛数列),表为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a^{①} \quad 或 \quad a_n\to a\,(n\to\infty).$$

若数列$\{a_n\}$不存在极限,则称数列$\{a_n\}$**发散**.

数列$\{a_n\}$的极限是a,用逻辑符号可简要表为:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N,有|a_n-a|<\varepsilon.$$

这就是数列极限的$\varepsilon-N$定义. 以后将经常使用极限的$\varepsilon-N$定义.

根据数列的极限定义,上述的数列$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$存在极限,它的极限是0,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0.$$

已知不等式

$$|a_n-a|<\varepsilon\Longleftrightarrow a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon.$$

于是,数列$\{a_n\}$的极限是a的几何意义是:对任意$\varepsilon>0$,任意一个以a为心以ε为半径的邻域$U(a,\varepsilon)$或开区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, 数列

---

① 本应表为 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$,为了书写简便,数列的极限一律表为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

$\{a_n\}$中总存在一项a_N，在此项后面的所有项$a_{N+1}, a_{N+2}, \cdots$(即除了前N项$a_1, a_2, \cdots, a_N$以外)，它们在数轴上所对应的点，都位于$U(a, \varepsilon)$或区间$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$之中，至多能有$N$个点$a_1, a_2, \cdots, a_N$在此邻域或区间之外(如图2.2)．因为$\varepsilon>0$可以任意小，所以数列$\{a_n\}$中各项所对应的点$a_n$都无限集聚在点$a$的附近．

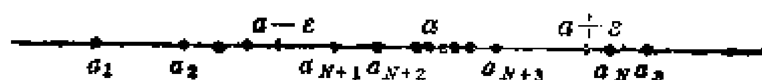


图 2.2

关于数列极限概念的几点说明：

1. 关于ε　引入的任意正数ε是数列极限由定性描述转入定量定义的关键．一方面，正数ε具有绝对的任意性，这样才能有

$$\{a_n\}\text{无限趋近于}a \Longleftrightarrow |a_n-a|<\varepsilon(n>N);$$

另一方面，正数ε又具有相对的固定性，从而不等式$|a_n-a|<\varepsilon$表明数列$\{a_n\}$无限趋近于a的渐近过程的不同阶段，进而可估算a_n与a的近似程度．显然，ε的绝对任意性是通过无限多个相对固定性的ε表现出来的．ε的这种两重性使数列极限的$\varepsilon-N$定义，从近似转化到精确，又能从精确转化到近似．它是极限定量定义的精髓．

不难知道，若ε是任意给定的正数，则$c\varepsilon$(c是正常数)，$\sqrt{\varepsilon}$，$\varepsilon^2, \cdots$也都是任意给定的正数．虽然它们在形式上与ε不同，但是它们的本质与ε是相同的．今后证明极限问题经常用到与ε本质相同的其它各种形式．

在数列极限定义中，正数ε是任意的，虽然ε也可以任意大，但是此时不等式$|a_n-a|<\varepsilon$并不能说明$\{a_n\}$无限趋近于a．这里主要是指ε可以任意小，此时不等式$|a_n-a|<\varepsilon$才表明$\{a_n\}$无限趋近于a．因此，证明极限问题时，常常限定ε的变化范围．如

$0<\varepsilon<1, 0<\varepsilon<\frac{1}{2}, \cdots$. 例如，为了使$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$是自然数. 限定$0<\varepsilon<1$，从而有$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]>1$.

2. 关于 N　在极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$的定义中，"$\exists N\in\mathbf{N}$"这句话，在于强调自然数 N（即数列$\{a_n\}$中的第 N 项 a_N）的存在性，与N的大小无关. 一般来说，对给定的 $\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，

$$\forall n>N, \text{有} |a_n-a|<\varepsilon,$$

那么对比N大的任意一个自然数 $N_1(>N)$，

$$\forall n>N_1(>N), \text{也必有} |a_n-a|<\varepsilon.$$

例如，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$.

对$\varepsilon=\frac{1}{100}$，$\exists N=100$，$\forall n>100$，有$\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|<\frac{1}{100}$. 同样，对$\varepsilon=\frac{1}{100}$，$\exists N=150(>100)$，$\forall n>150$，也必有$\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|<\frac{1}{100}$.

因此证明极限问题常取较大的自然数 N.

3. 证明某些极限问题，有时要应用反证法. 这时常常要用"数列$\{a_n\}$的极限是 a"的否定叙述，即"数列$\{a_n\}$的极限不是 a"（表为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq a$）的叙述. 否定的方法见前面的常用符号. 将$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$与$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq a$列表对比如下：

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}, \forall n>N$, 有$\|a_n-a\|<\varepsilon$.
$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq a\Longleftrightarrow\exists\varepsilon_0>0, \forall N\in\mathbf{N}, \exists n_0>N$, 有$\|a_{n_0}-a\|\geq\varepsilon_0$.

数列$\{a_n\}$发散，即$\forall a\in\mathbf{R}$ 都不是数列$\{a_n\}$的极限. 将数列$\{a_n\}$收敛与发散列表对比如下：

数列$\{a_n\}$收敛$\Longleftrightarrow\exists a\in\mathbf{R}, \forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}, \forall n>N$, 有$\|a_n-a\|<\varepsilon$.
数列$\{a_n\}$发散$\Longleftrightarrow\forall a\in\mathbf{R}, \exists\varepsilon_0>0, \forall N\in\mathbf{N}, \exists n_0>N$, 有$\|a_{n_0}-a\|\geq\varepsilon_0$

四、例

证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，只须证明

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbf{N},\ \forall n>N,\ 有\ |a_n-a|<\varepsilon.$$

"$\forall\varepsilon>0$"是证题者给出的，给出ε之后，要找$N\in\mathbf{N}$，使$n>N$时，有不等式$|a_n-a|<\varepsilon$成立．因此找N是证明数列极限问题的关键．怎样找N？应从解关于n的不等式$|a_n-a|<\varepsilon$找N．满足此不等式的n是自然数集$\mathbf{N}$的无限子集(从某个自然数以后的所有的自然数)．已知N不是唯一的．只须在此无限子集中任意取一个自然数作为N即可．

例1． 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$．

证明 $\forall\varepsilon>0$，要使不等式

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon$$

成立，解得$n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$．取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]$．于是，

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]^{①}\in\mathbf{N},\ \forall n>N,\ 有\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon,即$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

例2． 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3+n-4}{2n^3-3}=\dfrac{5}{2}$．

证法 $\forall\varepsilon>0$，要使不等式

$$\left|\frac{5n^3+n-4}{2n^3-3}-\frac{5}{2}\right|=\left|\frac{2n+7}{2(2n^3-3)}\right|<\varepsilon \tag{2}$$

成立．从中解n很困难．因为要找的N不是唯一的，所以可用"放

---

① 只要ε较小，如$0<\varepsilon<\frac{1}{2}$，总能使$N$是自然数，以下各题相同，不再说明．

大”不等式的方法，再解不等式，并可限定自然数 n 大于某个自然数．当然“放大”和“限定”的方法也不是唯一的．

例如，限定 $n>7$（取定了一个 $N=7$），从而 $n^3-3>0$，有

$$\left|\frac{2n+7}{2(2n^3-3)}\right|=\frac{2n+7}{2(n^3+n^3-7)}<\frac{2n+n}{2n^3}=\frac{3}{2n^2}.$$

显然，满足不等式 $\frac{3}{2n^2}<\varepsilon$ 的 n，当然也满足不等式(2)．

证明 限定 $n>7$，从而 $n^3-3>0$，要使不等式

$$\left|\frac{5n^3+n-4}{2n^3-3}-\frac{5}{2}\right|=\frac{2n+7}{2(2n^3-3)}=\frac{2n+7}{2(n^3+n^3-3)}$$

$$<\frac{2n+n}{2n^3}=\frac{3n}{2n^3}<\frac{2}{n^2}<\varepsilon$$

成立．从不等式 $\frac{2}{n^2}<\varepsilon$ 解得 $n>\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$．取 $N=\max\left\{\left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right],7\right\}$．于是，

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N=\max\left\{\left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right],7\right\}\in\mathbf{N},\ \forall n>N,\text{有}$$

$\left|\frac{5n^3+n-4}{2n^3-3}-\frac{5}{2}\right|<\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3+n-4}{2n^3-3}=\frac{5}{2}.$$

例 3. 证明常数数列 $\{a_n=c\}$（c 是常数）的极限是 c，即 $\lim\limits_{n\to\infty}c=c$．

证明 $\forall\varepsilon>0,\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$|a_n-c|=|c-c|=0<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}c=c$．

例 4. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，$|q|<1$．

证明 当 $q=0$ 时，$\forall n\in\mathbf{N}$，$q^n=0$．这是常数数列．由例 3 知，

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0.$$

当 $0<|q|<1$ 时，$\forall\varepsilon>0$（限定 $0<\varepsilon<|q|$），要使不等式

$$|q^n-0|=|q|^n<\varepsilon$$

成立. 解得 $n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$（$\ln\varepsilon<0$ 与 $\ln|q|<0$）. 取 $N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$. 于是，

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]\in\mathbf{N}$, $\forall n>N$, 有 $|q^n-0|<\varepsilon$, 即

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0.$$

例 5. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$, $\alpha>0$.

证明 $\forall\varepsilon>0$，要使不等式

$$\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|=\frac{1}{n^\alpha}<\varepsilon$$

成立，解得 $n>\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. 取 $N=\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]$. 于是，

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N=\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]\in\mathbf{N}$, $\forall n>N$, 有 $\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|<\varepsilon$, 即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0.$$

例 6. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$, $a>0$.

证明 1) 当 $a>1$ 时，有 $a^{\frac{1}{n}}>1$. $\forall\varepsilon>0$（$0<\varepsilon<a-1$），要使不等式

$$|a^{\frac{1}{n}}-1|=a^{\frac{1}{n}}-1<\varepsilon$$

成立. 解得 $n>\frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}$. 取 $N=\left[\frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}\right]$. 于是，

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N=\left[\frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}\right]\in\mathbf{N}$, $\forall n>N$, 有 $|a^{\frac{1}{n}}-1|<\varepsilon$, 即

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1, a>1.$$

2) 当 $a=1$ 时, $\forall n\in\mathbf{N}$, $a^{\frac{1}{n}}=1$. 这是常数数列, 由例 3, 有

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1, a=1.$$

3) 当 $0<a<1$ 时, 令 $a=\frac{1}{b}$, 从而 $b>1$, 有

$$|a^{\frac{1}{n}}-1|=\left|\frac{1}{b^{\frac{1}{n}}}-1\right|=\left|\frac{1-b^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}\right|<|b^{\frac{1}{n}}-1|.$$

由1) 知, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=\left[\frac{\ln b}{\ln(1+\varepsilon)}\right]=\left[\frac{-\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}\right]\in\mathbf{N}$, $\forall n>N$, 有

$$|a^{\frac{1}{n}}-1|<|b^{\frac{1}{n}}-1|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1, \quad 0<a<1.$$

综上, 有 $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1, \quad a>0.$

例 7. 证明数列 $\{(-1)^n\}$ 发散.

<u>证法</u> 只须证明, $\forall a\in\mathbf{R}$ 都不是数列 $\{(-1)^n\}$ 的极限.

证明 $\exists\varepsilon_0=1$, 分两种情况:

当 $a\geqslant 0$, $\forall N\in\mathbf{N}$, $\exists n_0$(奇数)$>N$, 有

$$|(-1)^{n_0}-a|=|-1-a|=1+a\geqslant\varepsilon_0.$$

当 $a<0$, $\forall N\in\mathbf{N}$, $\exists n_0$(偶数)$>N$, 有

$$|(-1)^{n_0}-a|=|1-a|=1+(-a)>\varepsilon_0.$$

即数列 $\{(-1)^n\}$ 发散.

练习题 2.1

1. 以下几种叙述与极限 $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ 的定义是否等价, 并说明理由:

(1) $\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}, \forall n\geqslant N$, 有 $|a_n-a|\leqslant\varepsilon$.

(2) $\forall k\in\mathbf{N}, \exists N_k\in\mathbf{N}, \forall n\geqslant N_k$, 有 $|a_n-a|<\frac{1}{k}$.

(3) 有无限多个 $\varepsilon>0$,对每个 ε, $\exists N(\varepsilon)\in\mathbf{N}, \forall n>N(\varepsilon)$, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

(4) $\forall \varepsilon>0$, 有无限多个 a_n, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

(5) $\forall k\in\mathbf{N}$, 只有有限个 a_n 位于区间 $\left(a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k}\right)$ 之外.

2. 应用已知的数列极限，观察下列数列(只给出通项)是否收敛:

(1) $a_n=\cos n\frac{\pi}{4}$.　　(2) $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$.

(3) $a_n=\frac{1}{(1.00001)^n}$.　　(4) $a_n=(1.00001)^{\frac{1}{n}}$.

(5) $a_n=\begin{cases}2n, & 1\leqslant n\leqslant 100,\\ \frac{1}{n-200}, & n>100.\end{cases}$

3. 证明下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+1}=\frac{3}{2}$,　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n}=0$,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{5-4n}=-\frac{1}{2}$,　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2}{7n-n^2}=-5$,

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

4. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n}=0$. (提示: 将 $2^n=(1+1)^n$ 按二项式定理展开,选取适当的项再"放大".)

5. 证明:

1) $a=b\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0$, 有 $|a-b|<\varepsilon$.

2) $a\leqslant b\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0$, 有 $a<b+\varepsilon$.

这两个等价命题中 ε 的任意性起了什么作用?

*　　*　　*　　*

6. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}na^n=0, \lim\limits_{n\to\infty}n^2a^n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}n^3a^n=0$, 其中 $0<a<1$. (提示: 令 $a=\frac{1}{1+h}$, $h>0$, 按二项式定理展开,选取适当的项再"放大").

7. 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}=\sqrt[3]{a}$.

8. 证明下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$. (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$. (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=1$.

9. 证明: 数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$的极限不是 0 $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\neq0\right)$.

10. 证明: 数列$\{2-(-1)^n\}$发散.

§2.2 收 敛 数 列

一、收敛数列的性质

收敛数列有几个重要性质，这就是下面的几个定理.

定理 1. (唯一性) 若数列$\{a_n\}$收敛，则它的极限是唯一的.

证法 设数列$\{a_n\}$有两个极限 a 与 b，只须证明，$\forall\varepsilon>0$，有$|a-b|<\varepsilon$，即 $a=b$(见练习题 2.1 的第 5 题)，从而极限唯一.

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$. 根据数列极限定义，即

$$\forall\varepsilon>0,\ \begin{cases}\exists N_1\in\mathbf{N},\ \forall n>N_1,\ 有\ |a_n-a|<\varepsilon.\\ \exists N_2\in\mathbf{N},\ \forall n>N_2,\ 有\ |a_n-b|<\varepsilon.\end{cases}$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$. $\forall n>N$，同时有

$$|a_n-a|<\varepsilon\ 与\ |a_n-b|<\varepsilon.$$

于是，$\forall n>N$，有

$$\begin{aligned}|a-b|&=|a-a_n+a_n-b|\\&\leqslant|a-a_n|+|a_n-b|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,\end{aligned}$$

即 $a=b$，从而收敛数列$\{a_n\}$的极限唯一. □

定理 2. (有界性) 若数列$\{a_n\}$收敛，则数列$\{a_n\}$有界，即$\exists M>0$，$\forall n\in\mathbf{N}$，有$|a_n|\leqslant M$.

证法 根据数列极限定义，能够证明数列$\{a_n\}$从某项a_N以后的所有项有界，数列$\{a_n\}$的前N项是有限项．从而能找到$M>0$．

证明 设$\lim_{n\to\infty}a_n=a$．根据数列极限定义，取定$\varepsilon_0=1$，$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，有$|a_n-a|<1$．从而，$\forall n>N$，有

$$|a_n|=|a_n-a+a|\leqslant|a_n-a|+|a|<1+|a|.$$

取 $M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,|a|+1\}$．

于是，$\forall n\in\mathbf{N}$，有$|a_n|\leqslant M$，即数列$\{a_n\}$有界．□

注 1）定理2的等价命题是：若数列$\{a_n\}$无界，则数列发散．例如，数列$\{n^{(-1)^{n-1}}\}$：

$$1,\ \frac{1}{2},3,\frac{1}{4},5,\ \frac{1}{6},\cdots,n^{(-1)^{n-1}},\ \cdots$$

无界，则此数列发散．

2）数列有界仅是数列收敛的必要条件，不是充分条件，即数列有界也不一定收敛．例如，数列$\{(-1)^n\}$有界，但它发散．

定理3．（保序性） 若$\lim_{n\to\infty}a_n=a$与$\lim_{n\to\infty}b_n=b$，且$a<b$，则$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，有$a_n<b_n$．

证法 根据数列极限的定义，$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，有$a_n<\frac{a+b}{2}$与$\frac{a+b}{2}<b_n$，从而$a_n<b_n$．

证明 已知$\lim_{n\to\infty}a_n=a$与$\lim_{n\to\infty}b_n=b$．根据数列极限的定义，$\exists\varepsilon_0=\frac{b-a}{2}>0$，分别

$$\exists N_1\in\mathbf{N},\forall n>N_1,\text{有}|a_n-a|<\frac{b-a}{2},\text{从而}a_n<\frac{a+b}{2}.$$

$$\exists N_2\in\mathbf{N},\forall n>N_2,\text{有}|b_n-b|<\frac{b-a}{2},\text{从而}\frac{a+b}{2}<b_n.$$

取$N=\max\{N_1,N_2\}$，$\forall n>N$，有

$$a_n<\frac{a+b}{2}<b_n,\text{即 } a_n<b_n.\qquad \square$$

推论 1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 且 $\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N,a_n\leqslant b_n$ $(a_n\geqslant b_n)$, 则 $a\leqslant b(a\geqslant b)$.

证明 只证 $a\leqslant b$ 的情况. 用反证法. 假设 $b<a$. 根据定理 3, $\exists N_1\in\mathbf{N}$(使 $N_1\geqslant N$), $\forall n>N_1$, 有 $b_n<a_n$. 与已知条件矛盾. $\square$

注 在推论 1 中, 即使 $a_n<b_n$, 也可能有 $a=b$. 例如, 两个收敛的数列 $\left\{-\frac{1}{n}\right\}$ 与 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$. $\forall n\in\mathbf{N}$, 有 $-\frac{1}{n}<\frac{1}{n}$, 但是

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

推论 2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 且 $a<b(a>b)$, 则 $\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N$, 有 $a_n<b(a_n>b)$.

证明 在定理 3 中, 取 $b_n=b$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. 从而, $\exists N\in\mathbf{N}$, $\forall n>N$, 有 $a_n<b(a_n>b)$. $\square$

二、收敛数列的四则运算

定理 4. 若数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛, 则和数列 $\{a_n+b_n\}$ 也收敛. 且

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n.$$

证法 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. 已知 $|a_n-a|$ 与 $|b_n-b|$ 能任意小, 并保持任意小. 因为

$$|(a_n+b_n)-(a+b)|\leqslant|a_n-a|+|b_n-b|,$$

所以 $|(a_n+b_n)-(a+b)|$ 也能任意小, 并保持任意小.

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. 根据数列极限的定义, 即

$$\forall\varepsilon>0,\quad\begin{cases}\exists N_1\in\mathbf{N},\forall n>N_1,\text{有 }|a_n-a|<\varepsilon.\\ \exists N_2\in\mathbf{N},\forall n>N_2,\text{有 }|b_n-b|<\varepsilon.\end{cases}$$

$\exists N=\max\{N_1,N_2\}$, $\forall n>N$, 同时有

$$|a_n-a|<\varepsilon \text{ 与 } |b_n-b|<\varepsilon.$$

于是, $\forall n>N$, 有

$$|(a_n+b_n)-(a+b)|\leqslant|a_n-a|+|b_n-b|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n. \qquad \square$$

注 将上述证明过程中波浪线上的四段话连结起来，就是极限$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$ 的 $\varepsilon-N$ 定义. 下同.

同法可证，在定理 4 的条件下，差数列$\{a_n-b_n\}$也收敛，且

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n.$$

定理 5. 若数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都收敛，则乘积数列$\{a_nb_n\}$也收敛，且

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n.$$

证法 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. 已知$|a_n-a|$与$|b_n-b|$能任意小，并保持任意小. 因为

$$\begin{aligned}|a_nb_n-ab|&=|a_nb_n-a_nb+a_nb-ab|\\&\leqslant|a_nb_n-a_nb|+|a_nb-ab|\\&\leqslant|a_n||b_n-b|+|b||a_n-a|.\end{aligned}$$

而数列$\{a_n\}$有界，所以$|a_nb_n-ab|$能任意小，并保持任意小.

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，根据数列极限的定义，即

$$\forall\varepsilon>0,\ \begin{cases}\exists N_1\in\mathbf{N},\ \forall n>N_1,\text{有 }|a_n-a|<\varepsilon.\\\exists N_2\in\mathbf{N},\ \forall n>N_2,\text{有 }|b_n-b|<\varepsilon.\end{cases}$$

$\exists N=\max\{N_1,N_2\}$, $\forall n>N$, 同时有

$$|a_n-a|<\varepsilon \text{ 与 } |b_n-b|<\varepsilon.$$

根据定理 2，收敛数列$\{a_n\}$有界，即

$$\exists M>0,\ \forall n\in\mathbf{N},\text{有 } |a_n|\leqslant M.$$

于是，$\forall n>N$，有

$$\begin{aligned}|a_nb_n-ab|&\leqslant|a_nb_n-a_nb+a_nb-ab|\\&\leqslant|a_n||b_n-b|+|b||a_n-a|<M\varepsilon+|b|\varepsilon\\&=(M+|b|)\varepsilon,\end{aligned}$$

其中 $M+|b|$ 是正常数，即

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=ab=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n. \qquad \square$$

定理 6. 若数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都收敛，且 $b_n\neq0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq0$，则商数列$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$也收敛，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}.$$

证法 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\neq0$，已知$|a_n-a|$与$|b_n-b|$能任意小，并保持任意小．因为

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right|&=\frac{1}{|b_nb|}|a_nb-b_na|\\&=\frac{1}{|b_nb|}|a_nb-ab+ab-b_na|\\&\leqslant\frac{1}{|b_n||b|}(|b||a_n-a|+|a||b_n-b|),\end{aligned}$$

而数列$\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$有界，所以$\left|\dfrac{a_n}{b_n}-\dfrac{a}{b}\right|$也能任意小，并保持任意小．

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\neq0$．根据数列极限的定义，即

$$\forall\varepsilon>0,\quad\begin{cases}\exists N_1\in\mathbf{N},\ \forall n>N_1,\text{有 }|a_n-a|<\varepsilon.\\\exists N_2\in\mathbf{N},\ \forall n>N_2,\text{有 }|b_n-b|<\varepsilon.\end{cases}$$

知 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$,即取 $\varepsilon_0 = \frac{|b|}{2} > 0$, $\exists N_3 \in \mathbf{N}$, $\forall n > N_3$, 有

$$|b_n - b| < \frac{|b|}{2}.$$

$$|b_n| = |b_n - b + b| \geqslant |b| - |b_n - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}.$$

$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}.$$

$\exists N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, $\forall n > N$, 同时有

$$|a_n - a| < \varepsilon, \ |b_n - b| < \varepsilon \ \text{与} \ \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}.$$

于是, $\forall n > N$, 有

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| \leqslant \frac{1}{|b_n||b|}(|b||a_n - a| + |a||b_n - b|)$$

$$< \frac{2}{|b|^2}(|a| + |b|)\cdot\varepsilon,$$

其中 $\frac{2}{|b|^2}(|a| + |b|)$ 是正常数, 即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}. \ \square$$

定理 4,5,6 指出: 两个收敛数列的四则运算与极限运算可以交换次序. 这两种不同的运算交换次序将给计算极限带来很大的方便.

例如, 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k} = 0$, $k \in \mathbf{N}$(§2.1. 例5) 和 $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$, c 是常数(§2.1 例3). 根据定理 5, $\forall k \in \mathbf{N}$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c}{n^k} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}\cdot\lim_{n\to\infty} c = 0.$$

应用此结果能求下列极限:

例 1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n-2}{n^2+1}$.

解 将分式$\dfrac{2n^2+3n-2}{n^2+1}$的分子与分母同用n^2除之，再根据定理 4,5,6,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-2}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{2}{1}=2.$$

例 2. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+\cdots+b_m}$,其中 k,m 都是自然数,且 $k\leqslant m$. $a_i,b_j(i=0,1,\cdots,k;j=0,1,\cdots,m)$都是与 n 无关的常数,且 $a_0\neq0,b_0\neq0$.

解 $$\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+\cdots+b_m}=n^{k-m}\frac{a_0+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_k}{n^k}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\cdots+\frac{b_m}{n^m}}$$

已知

$$\lim_{n\to\infty}n^{k-m}=\begin{cases}0, & k<m,\\ 1, & k=m.\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_k}{n^k}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\cdots+\frac{b_m}{n^m}}=\frac{a_0}{b_0}.$$

根据定理 5,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+\cdots+b^m}=\lim_{n\to\infty}n^{k-m}\frac{a_0+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_k}{n^k}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\cdots+\frac{b_m}{n^m}}$$

$$=\begin{cases}0, & k<m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & k=m.\end{cases}$$

例 3. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 2=\frac{1}{3}.$$

例 4. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$.

解 由§2.1 例 4, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right]}{3^{n+1}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right]}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right]}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right]}=\frac{1}{3}\frac{0+1}{0+1}=\frac{1}{3}.$$

三、数列的收敛判别法

一个数列不是收敛就是发散. 那么怎样判别数列的敛散性(收敛或发散)呢? 下面给出两个数列收敛的判别法

定理 7. (两边夹定理) 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 是三个数列. 若 $\exists N\in\mathbf{N}$, $\forall n>N$, 有

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=l$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=l$.

证法 找 N_0, $\forall n>N_0$, 有 $|b_n-l|<\varepsilon$.

证明 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} c_n=l$, 即

$$\forall \varepsilon>0,\quad \begin{cases}\exists N_1\in \mathbf{N},\ \forall n>N_1, \text{有} |a_n-l|<\varepsilon, \text{从而} l-\varepsilon<a_n. \\ \exists N_2\in \mathbf{N},\ \forall n>N_2, \text{有} |c_n-l|<\varepsilon, \text{从而} c_n<l+\varepsilon.\end{cases}$$

$\exists N_0=\max\{N_1, N_2, N\}$, $\forall n>N_0$, 同时有

$$l-\varepsilon<a_n,\ c_n<l+\varepsilon \text{ 与 } a_n\leqslant b_n\leqslant c_n.$$

于是, $\forall n>N_0$, 有

$$l-\varepsilon<a_n\leqslant b_n\leqslant c_n<l+\varepsilon, \text{从而 } l-\varepsilon<b_n<l+\varepsilon,$$

或 $|b_n-l|<\varepsilon$, 即

$$\lim_{n\to\infty} b_n=l. \qquad \square$$

推论 若有两个数列 $\{b_n\}$ 与 $\{c_n\}$, 且 $\exists N\in \mathbf{N}$, $\forall n>N$, 有

$$l\leqslant b_n\leqslant c_n,$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=l$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=l$.

例 5. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0 \quad (a>0)$.

证明 已知 a 是正常数, $\exists k\in \mathbf{N}$, 使 $a\leqslant k$, 有

$$1>\frac{a}{k+1}>\frac{a}{k+2}>\frac{a}{k+3}>\cdots.$$

$\forall n>k$, 有

$$0<\frac{a^n}{n!}=\overbrace{\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{k}}^{k\text{ 项}}\cdot\overbrace{\frac{a}{k+1}\cdot\frac{a}{k+2}\cdots\frac{a}{n-1}\cdot\frac{a}{n}}^{n-k\text{ 项}}$$

$$<\frac{a^k}{k!}\cdot\frac{a}{n}=\frac{a^{k+1}}{k!}\cdot\frac{1}{n}\left(\text{将}\frac{a}{k+1},\cdots,\frac{a}{n-1}\text{放大为 } 1\right),$$

即 $\forall n>k$, 有 $\qquad 0<\dfrac{a^n}{n!}<\dfrac{a^{k+1}}{k!}\cdot\dfrac{1}{n}$.

已知 $\dfrac{a^{k+1}}{k!}$ 是常数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, 根据定理 7, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

例 6. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

证明 $\forall n\in\mathrm{N}$，有$\sqrt[n]{n}\geqslant 1$. 令$\sqrt[n]{n}-1=b_n$，$b_n\geqslant 0$. 从而 $n=(1+b_n)^n$. 由二项式定理，有

$$n=(1+b_n)^n=1+nb_n+\frac{n(n-1)}{2!}b_n^2+\cdots+b_n^n\geqslant\frac{n(n-1)}{2}b_n^2.$$

或

$$1\geqslant\frac{n-1}{2}b_n^2.$$

$\forall n\geqslant 2$，有

$$0\leqslant b_n\leqslant\sqrt{\frac{2}{n-1}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{n}}.\quad(\text{因}\sqrt{2n}\leqslant 2\sqrt{n-1})$$

由§2.1 例5，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}=0$. 根据定理 7 的推论，有

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-1)=0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

例 7. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解 设 $c_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，有

$$c_n>\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{n\text{ 项}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}},$$

$$c_n<\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{n\text{ 项}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

于是，

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<c_n<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

由 $\sqrt{n^2+n}<\sqrt{n^2+2n+1}=n+1$，$\sqrt{n^2+1}>\sqrt{n^2}=n$，有

$$\frac{n}{n+1}<\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<c_n<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}<\frac{n}{n}=1.$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$，有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

公理 （实数连续性）单调有界数列存在极限.

公理的几何意义十分明显．若数列$\{a_n\}$单调增加有上界．设a_n在数轴上的对应点是A_n．当n无限增大时，点A_n在数轴上向右方移动，因为有上界，所以这些点必无限地趋近于某个点A．设A的坐标为a，则a就是数列$\{a_n\}$的极限（如图 2.3）.



图 2.3

例 8. 证明数列

$$\sqrt{a},\ \sqrt{a+\sqrt{a}},\cdots,\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}}_{n\text{个根号}},\ \cdots(a>0)$$

收敛，并求它的极限.

证明 令 $s_n=\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}}_{n\text{个根号}}$，

有 $$s_{n+1}=\sqrt{a+s_n}.$$

用归纳法证明，数列$\{s_n\}$严格增加有上界.

显然，当$n=1$时，有$s_1<s_2$．设$n=k$，$s_k<s_{k+1}$，则

$a+s_k<a+s_{k+1}$， $\sqrt{a+s_k}<\sqrt{a+s_{k+1}}$，有$s_{k+1}<s_{k+2}$，

即数列$\{s_n\}$严格增加.

显然，当$n=1$时，有 $s_1=\sqrt{a}<\sqrt{a}+1$．设$n=k$，$s_k<\sqrt{a}$

$+1$，则

$$s_{k+1}=\sqrt{a+s_k}<\sqrt{a+\sqrt{a}+1}<\sqrt{a+2\sqrt{a}+1}$$
$$=\sqrt{a}+1,$$

即数列$\{s_n\}$有上界（上界是$\sqrt{a}+1$）.

根据公理，数列$\{s_n\}$收敛，设$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=l$. 已知$s_{n+1}^2=a+s_n$，有

$$\lim_{n\to\infty}s_{n+1}^2=a+\lim_{n\to\infty}s_n，即\quad l^2=a+l,$$

得 $l=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1+4a}\right)$. 由极限保号性，$l$不能是负数，则数列$\{s_n\}$的极限是 $l=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4a}\right)$.

例 9. 证明数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$收敛.

首先观察此数列一些项的变化，列表如下：

n	$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	n	$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	$a_1=2$	6	$a_6=\left(\frac{7}{6}\right)^6\approx2.52$
2	$a_2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=2.25$	…	………
3	$a_3=\left(\frac{4}{3}\right)^3\approx2.37$	10	$a_{10}=\left(\frac{11}{10}\right)^{10}\approx2.59$
4	$a_4=\left(\frac{5}{4}\right)^4\approx2.44$	…	………
5	$a_5=\left(\frac{6}{5}\right)^5\approx2.49$	100	$a_{100}=\left(\frac{101}{100}\right)^{100}\approx2.70$

我们有理由猜测这个数列严格增加，且有上界. 下面证明这个猜测是正确的.

证明 由二项式定理，有

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=C_n^0+C_n^1\frac{1}{n}+C_n^2\frac{1}{n^2}+\cdots+C_n^k\frac{1}{n^k}+\cdots+C_n^n\frac{1}{n^n},$$

其中 $$C_n^k\frac{1}{n^k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}$$

$$=\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

于是，
$$a_n=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

将上面等式中的 n 换成 $n+1$，就得到 a_{n+1} 的展开式：

$$a_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

a_n 的展开式有 $n+1$ 项，a_{n+1} 的展开式有 $n+2$ 项．它们每一项都是正数．因为

$$1-\frac{k}{n}<1-\frac{k}{n+1},\quad k=1,2,\cdots,n-1.$$

所以 a_n 的第 $k+1$ 项小于 a_{n+1} 的第 $k+1$ 项，即

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right).$$

此外 a_{n+1} 比 a_n 还多了一个正数项（即 a_{n+1} 展开式的最后一项），有

$$a_n<a_{n+1},\quad n=1,2,3\cdots,$$

即数列 $\{a_n\}$ 严格增加．

其次证明数列$\{a_n\}$有上界.

已知 $1-\frac{k}{n}<1(k=1,2,\cdots,n-1)$,将$a_n$展开式中的$1-\frac{k}{n}$都放大为 1,有

$$a_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$
$$<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\text{①}$$
$$=2+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

即数列$\{a_n\}$有上界.

根据公理,数列$\{a_n\}$存在极限,设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$. 数 e 是无理数(待证),它的前 10 位小数是

$$e=2.7182818284\cdots.$$

数 e 就是我们熟知的自然对数的底,并将以 e 为底的自然对数函数$\log_e x$ 简表为“$\ln x$”. 以 e 为底的指数函数 e^x 和对数函数 $\ln x$,在高等数学中占有重要地位.

公理只适用于判别单调数列的收敛性,有很大的局限性. 判别任意一个数列的敛散性(收敛或发散)有下面重要的柯西② 收敛准则:

定理 8. (柯西收敛准则) 数列$\{a_n\}$收敛$\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$, $\forall n,m>N$,有

$$|a_n-a_m|<\varepsilon.$$

证明 **必要性**($\Longrightarrow$)若数列$\{a_n\}$ 收敛, 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 根据数

① $\frac{1}{k!}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots k}\leqslant\frac{1}{\underbrace{1\cdot2\cdot2\cdots2}_{k-1\text{个}}}=\frac{1}{2^{k-1}}$.

② 柯西(Cauchy 1789—1857)法国数学家.

列极限定义，即$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}, \forall k>N$，有$|a_k-a|<\varepsilon$. 从而

$$\forall n>N \text{ 与 } m>N,$$

分别有 $$|a_n-a|<\varepsilon \text{ 与 } |a_m-a|<\varepsilon.$$

于是，$\forall n, m>N$，有

$$|a_n-a_m|=|a_n-a+a-a_m|\leqslant|a_n-a|+|a-a_m|<2\varepsilon.$$

充分性($\Leftarrow$)的证明放在第四章. □

柯西收敛准则也可换成如下的叙述：

数列$\{a_n\}$收敛$\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}, \forall n>N, \forall p\in\mathbf{N}$，有

$$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon.$$

证明数列发散要应用柯西收敛准则的否定叙述，其否定方法与数列极限的否定方法相同. 现将柯西收敛准则的正反叙述列表对比如下：

数列$\{a_n\}$收敛$\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}$, $\forall n, m>N$, 有$\lvert a_n-a_m\rvert<\varepsilon$
数列$\{a_n\}$发散$\Longleftrightarrow\exists\varepsilon_0>0, \forall N\in\mathbf{N}, \exists n_0, m_0>N$, 有$\lvert a_{n_0}-a_{m_0}\rvert\geqslant\varepsilon_0$

柯西收敛准则指出：数列收敛等价于数列中充分远(即自然数n充分大)的任意两项的距离能够任意小. 这是收敛数列的最本质的特征. 柯西收敛准则的优点在于它不需要借助数列以外的任何数，只须根据数列自身各项之间的相互关系就能判别该数列的敛散性.

例 10. 证明：若$\forall n\in\mathbf{N}$，有$|y_{n+1}-y_n|\leqslant cr^n$，其中$c$是正常数，且$0<r<1$，则数列$\{y_n\}$收敛.

证明 $\forall n, p\in\mathbf{N}$，有

$$|y_{n+p}-y_n|=|y_{n+p}-y_{n+p-1}+y_{n+p-1}-y_{n+p-2}+\cdots+y_{n+1}-y_n|$$
$$\leqslant|y_{n+p}-y_{n+p-1}|+|y_{n+p-1}-y_{n+p-2}|+\cdots+|y_{n+1}-y_n|$$
$$\leqslant cr^{n+p-1}+cr^{n+p-2}+\cdots+cr^n=cr^n(1+r+\cdots+r^{p-1})$$
$$=cr^n\frac{1-r^p}{1-r}<\frac{c}{1-r}r^n.$$

已知$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0(0<r<1)$，即$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，有 $r^n<\varepsilon$。于是，$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N,\forall p\in\mathbf{N}$，有

$$|y_{n+p}-y_n|<\frac{c}{1-r}r^n<\frac{c}{1-r}\varepsilon.$$

其中$\frac{c}{1-r}$是正常数。根据柯西收敛准则，数列$\{y_n\}$收敛。

例 11. 证明：若 $y_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，则数列$\{y_n\}$发散。

证明 $\exists\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0,\forall N\in\mathbf{N},\exists m,2m>N$，有

$$|y_{2m}-y_m|=\left|\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{2m}\right|$$

$$>\underbrace{\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m}+\cdots+\frac{1}{2m}}_{m\text{项}}=m\cdot\frac{1}{2m}=\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

根据柯西收敛准则的否定叙述，数列$\{y_n\}$发散。

四、子数列

讨论数列的敛散性，经常要涉及到所谓子数列。

定义 设有数列$\{a_n\}$。若 $n_k(k=1,2,3,\cdots)$是一列自然数，且

$$n_1<n_2<n_3<\cdots<n_k<\cdots,$$

则称$\{a_{n_k}\}$是数列$\{a_n\}$的一个**子数列**。

在数列$\{a_n\}$中，依次任意选取无限多项就是数列$\{a_n\}$的一个子数列。例如，在数列$\{a_n\}$中，依次选取无限多项：

$$a_3,a_8,a_9,a_{16},a_{19},a_{25},a_{40},\cdots$$

就是数列$\{a_n\}$的一个子数列。

特别是，选取 $n_k=2k-1$ 与 $n_k=2k,k\in\mathbf{N}$，有

$$\{a_{2k-1}\}: a_1,a_3,a_5,\cdots,a_{2k-1},\cdots$$

与 $$\{a_{2k}\}: a_2, a_4, a_6, \cdots, a_{2k}, \cdots$$
分别称为数列$\{a_n\}$的**奇子列**与**偶子列**.

关于子数列$\{a_{n_k}\}$的序号 n_k 说明如下:

1) n_k 是 k 的函数, 即 $n_k=\varphi(k)$, 不同的 φ 就是不同的子数列. a_{n_m}是子数列$\{a_{n_k}\}$中的第 m 项,它是原数列$\{a_n\}$ 中的第 n_m项.

2) $\forall k\in\mathbf{N}$, 总有 $n_k\geqslant k$. 显然,当 k 无限增大时,n_k 也无限增大.

定理 9. 若数列$\{a_n\}$收敛于 a,则$\{a_n\}$的任意子数列$\{a_{n_k}\}$也收敛于 a.

证明 已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 即$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}, \forall n>N$, 有
$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

因为下标$\{n_k\}$是严格增加的, 所以对上述的 N, $\exists k_0\in\mathbf{N}$, $\forall k>k_0$, 有$n_k>N$. 于是,
$$\forall\varepsilon>0, \exists k_0\in\mathbf{N}, \forall k>k_0, 有 |a_{n_k}-a|<\varepsilon,$$
即$\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=a$. □

定理 9 的等价命题是.若数列$\{a_n\}$有某一个子数列发散,或有某两个收敛子数列,它们的极限不相等,则数列$\{a_n\}$发散. 应用定理 9 的这一等价命题很容易判别某些数列的发散性. 例如:

数列$\{n^{(-1)^n}\}$是发散的. 因为它的偶子列 $\{(2k)^{(-1)^{2k}}\}=\{2k\}$发散.

数列$\{(-1)^n\}$是发散的, 因为它的奇子列$\{(-1)^{2k-1}\}$收敛于-1;它的偶子列$\{(-1)^{2k}\}$收敛于 1,而$-1\neq1$.

定理 10. 数列$\{a_n\}$收敛$\Longleftrightarrow$奇子列$\{a_{2k-1}\}$ 与偶子列$\{a_{2k}\}$都收敛,且它们的极限相等.

证明 **必要性**($\Rightarrow$)根据定理 9, 数列$\{a_n\}$ 的奇子列$\{a_{2k-1}\}$与偶子列$\{a_{2k}\}$都收敛,且它们的极限相等.

充分性($\Leftarrow$) 设$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k-1}=\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=a$. 根据数列极限定义，即

$$\forall\varepsilon>0,\quad \begin{cases}\exists K_1\in\mathbf{N},\forall k>K_1,\text{有}|a_{2k-1}-a|<\varepsilon\\ \exists K_2\in\mathbf{N},\forall k>K_2,\text{有}|a_{2k}-a|<\varepsilon.\end{cases}$$

$\exists N=\max\{2K_1,2K_2\}$, $\forall n>N$($n=2k-1$, 有$k>K_1$; $n=2k$, 有$k>K_2$), 有

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

即数列$\{a_n\}$收敛. □

练习题 2.2

1. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0\Longleftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

2. 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$. 逆命题是否成立? 研究数列$\{(-1)^n\}$.

3. 证明: 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{p+n}=a$, 其中$p$是固定的自然数.

4. 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n^2=b^2$.

5. 证明: 若数列$\{x_n\}$有界, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

6. 用极限定义证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a<0$, 则$\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N$, 有 $a_n<0$.

7. 证明: 若$|a_{n+1}|\leqslant q|a_n|$, $0<q<1$, $n=1,2,3,\cdots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

8. 证明: 若 $a_n>0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=r<1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

9. 证明: 若 $a_n>0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r<1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

10. 数列$\{a_n\}$: $a_1=a_2=1$, $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$, $n=2,3,\cdots$, 称为费波那奇[①]数列, 不难用归纳法证明

$$a_n=\frac{1}{\sqrt5}\left\{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right\}.$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{\sqrt5-1}{2}\approx0.618$. $\left(\text{提示: }\left|\dfrac{1-\sqrt5}{1+\sqrt5}\right|<1\right)$.

---

① 费波那奇(Fibonacci, 1175～1250)意大利数学家.

11. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1000n}{2n+1}$，　　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-5n-1}{7+2n-8n^2}$，

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-9}{n+3}$，　　　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n+1}{n^3+n^2+5}$，

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$　$(|a|<1,\ |b|<1)$，

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$　$\left(提示：\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$，　(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}[1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2]$，

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n$，　　　　(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{8n}$.

12. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，其中 $a_i>0$，$1\leqslant i\leqslant k$.（提示：应用定理7）

13. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}\right)=0$.

14. 证明：若 $a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$，$n=1,2,\cdots$，则数列$\{a_n\}$收敛，并求其极限.

15. 证明：若 $a_0=a>0$，$a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{2}{a_{n-1}}\right)$，$n=1,2,\cdots$，则数列$\{a_n\}$收敛，并求其极限.

$\left(提示：\forall n\in\mathbf{N},\ a_n-a_{n+1}\geqslant 0,\ \frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)\geqslant\sqrt{a_n\frac{2}{a_n}}=\sqrt{2}\right)$

16. 应用柯西收敛准则证明下列数列(只给出通项)的收敛性：

(1) $x_n=a_0+a_1q+\cdots+a_nq^n$，其中$0<q<1$，$|a_i|\leqslant M$常数，$i=0,1,2,\cdots$.

(2) $x_n=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$.　$\left(提示：\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.\right)$

(3) $x_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$.

17. 证明：若数列$\{a_n\}$单调增加，且有一个子数列$\{a_{n_k}\}$收敛，则数列$\{a_n\}$也收敛，且收敛于同一个极限.

*　*　*　*

18. 证明：若 $x_1=a>0$，$y_1=b>0$，$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$，$y_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+y_n)$，

$n=1,2,3,\cdots$，则数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$都存在极限，且它们的极限相等.

19. 证明：若 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，则数列$\{a_n\}$存在极限，其极限 c 称为尤拉[1]常数，$c=0.577216\cdots$. $\left(\text{提示：}\ \frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}\right)$

20. 证明：若存在常数 c，$\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|<c,$$

则数列$\{x_n\}$收敛.

21. 证明：若 $\forall n\in\mathbf{N}$，有$|x_{n+1}-x_n|<c_n$，且 $s_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$，而数列$\{s_n\}$收敛，则数列$\{x_n\}$也收敛.

22. 方程 $x=m+\varepsilon\sin x\,(0<\varepsilon<1)$ 称为开普勒[2]方程. 设

$$x_0=m,\ \ x_1=m+\varepsilon\sin x_0,\ \ \cdots,\ \ x_n=m+\varepsilon\sin x_{n-1},\ \cdots$$

则数列$\{x_n\}$存在极限.（设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$，以后将证明，$\xi$ 是开普勒方程的唯一解. 提示：应用柯西收敛准则）

23. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=a$.

24. 证明：若$\forall n\in\mathbf{N}$，有 $a_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a.$$

（提示：$\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，

（调和平均）　　（几何平均）　　（算术平均）

应用第 23 题）

并应用此结果，验证

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a\,(a_n>0,n=1,2,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$. $\left(\text{提示：}\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=e\right)$

---

① 尤拉(Euler，1707—1783)瑞士数学家.

② 开普勒(Kepler，1571—1630)德国数学家.

25. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab.$$

§2.3 函数极限

一、当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

首先讨论函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，当自变量 x 无限增大时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的变化状态．如下表：

x	1	7.5	100	532.6	1000	20000	…
$f(x)=\frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{7.5}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{532.6}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{20000}$	…

从此表不难看到，当自变量 x 无限增大时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 是无限趋近于 0，即当 x 无限增大时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的"极限"是0．这类函数极限的一般情况是，函数 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 有定义，当 x 无限增大时，函数 $f(x)$ 无限趋近于 b．将"无限增大"和"无限趋近"定量地叙述出来就有如下的极限定义：

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 有定义，b 是常数．若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists A>0$，$\forall x>A$，有

$$|f(x)-b|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$（当 $x\to+\infty$ 时）**存在极限或收敛，极限是 b** 或收敛于 b，表为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b \quad 或 \quad f(x)\to b \quad (x\to+\infty).$$

函数 $f(x)$ $(x\to+\infty)$ 的极限定义与数列 $\{a_n\}$ 的极限定义很相

似．这是因为它们的自变量的变化趋势相同（$x\to+\infty$ 与 $n\to+\infty$）．但是，二者也有差异，即自变量的变化形态不同．函数 $f(x)$ 的自变量 x 取区间 $(a,+\infty)$ 的一切实数连续地无限增大，而数列 $\{a_n\}$ 的自变量 n 只取一切自然数离散地无限增大．为了明显地看出两个极限定义的异同，列表对比如下：

	$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$
函　　数	$y=a_n$	$y=f(x)$
定　义　域	N	$(a,+\infty)$
自变量的变化趋势	$n\to\infty$	$x\to+\infty$
函数值的变化趋势	$a_n\to a$	$f(x)\to b$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N$，有 $\lvert a_n-a\rvert<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists A>0,\forall x>A$，有 $\lvert f(x)-b\rvert<\varepsilon$

极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ 有明显的几何意义．已知

$$|f(x)-b|<\varepsilon\Longleftrightarrow b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon.$$

下面将极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ 定义的分析语言与几何语言列表对比如下：

分　析　语　言	几何语言（在坐标平面上）
$\forall\varepsilon>0$，	在直线 $y=b$ 的两侧，以任意二直线 $y=b\pm\varepsilon$ 为边界，宽为 2ε 的带形区域．
$\exists A>0$，	在 x 轴上原点的右侧总存在一点 A，
$\forall x>A$，	对点 A 右侧的任意点 x，即 $\forall x\in(A,+\infty)$，
有 $\lvert f(x)-b\rvert<\varepsilon$．	在 $(A,+\infty)$ 上函数 $y=f(x)$ 的图象位于上述带形区域之内，如图2.4．

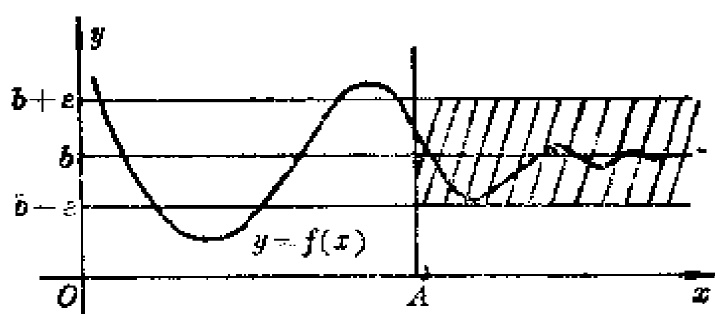


图 2.4

当自变量$|x|$无限增大时，还有两种情况：一是，$x\to-\infty$；二是，$x\to\infty$（即$|x|\to+\infty$）．函数$f(x)$的极限定义分别是：

定义 设函数$f(x)$在区间$(-\infty,a)$有定义，b是常数，若$\forall\varepsilon>0$，$\exists A>0$，$\forall x<-A$，有

$$|f(x)-b|<\varepsilon,$$

则称函数$f(x)$（当$x\to-\infty$时）**存在极限或收敛，极限是b**或收敛于b，表为

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=b \quad 或 \quad f(x)\to b \quad (x\to-\infty).$$

定义 设函数$f(x)$在$\{x\mid |x|>a\}$有定义，b是常数．若$\forall\varepsilon>0$，$\exists A>0$，$\forall x$：$|x|>A$，有

$$|f(x)-b|<\varepsilon,$$

称函数$f(x)$（当$x\to\infty$时）**存在极限或收敛，极限是b**或收敛于b，表为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=b \quad 或 \quad f(x)\to b \quad (x\to\infty).$$

上述三个函数$f(x)$（$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$）的极限定义也很相似．为了明显地看到它们的异同，将三个函数的极限定义列表对比如下：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists A>0,\ \forall x>A,\ 有\ |f(x)-b|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=b \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists A>0,\ \forall x<-A,\ 有\ |f(x)-b|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to\infty} (fx)=b \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists A>0,\ \forall x:\ |x|>A,\ 有\ |f(x)-b|<\varepsilon$$

二、例(I)

证明数列极限关键是找自然数 N，证明函数极限 $f(x)\to b$ ($x\to+\infty, x\to-\infty, x\to\infty$)，其证法与证明数列极限相同，关键是找正数 A.

例 1. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1.$

证明 不妨设 $x>-1$. $\forall\varepsilon>0$，要使不等式

$$\left|\frac{x-1}{x+1}-1\right|=\frac{2}{x+1}<\varepsilon$$

成立. 解得 $x>\dfrac{2}{\varepsilon}-1$(限定 $0<\varepsilon<2$). 取$A=\dfrac{2}{\varepsilon}-1$. 于是，

$\forall\varepsilon>0$，$\exists A=\dfrac{2}{\varepsilon}-1>0, \forall x>A$，有 $\left|\dfrac{x-1}{x+1}-1\right|<\varepsilon$，即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=1.$$

例 2. 证明 $\lim\limits_{x\to-\infty}10^x=0.$

证明 $\forall\varepsilon>0$，要使不等式

$$|10^x-0|=10^x<\varepsilon$$

成立. 解得 $x<\lg\varepsilon$(限定$0<\varepsilon<1$). 取 $A=-\lg\varepsilon>0$. 于是，

$\forall\varepsilon>0, \exists A=-\lg\varepsilon>0, \forall x<-A=\lg\varepsilon$，有 $|10^x-0|<\varepsilon$，即

$$\lim_{x\to-\infty}10^x=0.$$

例 3. 证 明 $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arc\,tg}x=-\dfrac{\pi}{2}.$

证明 $\forall\varepsilon>0$，要使不等式

$$\left|\operatorname{arc\,tg}x-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right|=\operatorname{arc\,tg}x+\frac{\pi}{2}<\varepsilon$$

成立. 解得$x<\operatorname{tg}\left(\varepsilon-\frac{\pi}{2}\right)$$\left(限定0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}\right)$. 取 $A=-\operatorname{tg}\left(\varepsilon-\frac{\pi}{2}\right)>0$. 于是，

$\forall\varepsilon>0$，$\exists A=-\operatorname{tg}\left(\varepsilon-\frac{\pi}{2}\right)>0$，$\forall x<-A=\operatorname{tg}\left(\varepsilon-\frac{\pi}{2}\right)$，有 $\left|\operatorname{arc\,tg}x-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right|<\varepsilon$，即

$$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arc\,tg}x=-\frac{\pi}{2}.$$

例 4. 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-2}{x^2-1}=3$.

证明 不妨设$|x|>1$. $\forall\varepsilon>0$，为使不等式

$$\left|\frac{3x^2+2x-2}{x^2-1}-3\right|=\left|\frac{2x+1}{x^2-1}\right|\leqslant\frac{2|x|+1}{|x|^2-1}$$

$$<\frac{2|x|+2}{|x|^2-1}=\frac{2(|x|+1)}{(|x|+1)(|x|-1)}=\frac{2}{|x|-1}<\varepsilon.$$

成立. 从不等式 $\dfrac{2}{|x|-1}<\varepsilon$，解得$|x|>\dfrac{2}{\varepsilon}+1$. 取 $A=\dfrac{2}{\varepsilon}+1$. 于是，

$\forall\varepsilon>0,\exists A=\dfrac{2}{\varepsilon}+1>0,\forall x$: $|x|>A$，有 $\left|\dfrac{3x^2+2x-2}{x^2-1}-3\right|<\varepsilon$，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-2}{x^2-1}=3.$$

三、当 $x\to a$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

首先讨论抛物线 $y=2x^2$ 上一点 $P(1,2)$ 的切线方程.

由解析几何知，曲线在点 P 的切线是过点 P 的割线 PQ 当点

Q 沿曲线无限趋近于点 P 时的极限位置．如图 2.5．

设过点 $P(1,2)$ 的切线斜率是 k，切线方程就是

$$y-2=k(x-1).$$

怎样求切线斜率 k 呢？在抛物线 $y=2x^2$ 上，在点 P 附近任取一点 Q，设点 Q 的横坐标是 $x(\neq 1)$，点 Q 的坐标是 $Q(x,2x^2)$．已知割线 PQ 的斜率

$$k'=\frac{y-2}{x-1}=\frac{2x^2-2}{x-1}.$$

图 2.5

因为点 Q 不同于 P，即 $x\neq 1$，所以

$$k'=\frac{2x^2-2}{x-1}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x-1}=2(x+1).$$

当点 Q 沿抛物线 $y=2x^2$ 无限趋近于点 P 时，即当 x 无限趋近于 1 时，割线 PQ 的斜率 $k'=\frac{2x^2-2}{x-1}=2(x+1)$ 无限趋近于 4，即过点 P 的切线斜率 $k=4$．4 就是所谓函数 $\frac{2x^2-2}{x-1}$ 的"极限"（当 x 无限趋近于 1 时）．于是，过点 P 的切线方程是

$$y-2=4(x-1) \text{ 或 } 4x-y-2=0.$$

何谓"当 x 无限趋近于 1 时，函数 $\frac{2x^2-2}{x-1}$ 无限趋近于 4"？这就是，$\frac{2x^2-2}{x-1}$ 与 4 的距离 $\left|\frac{2x^2-2}{x-1}-4\right|$ 能任意小，并保持任意小，只须 x 与 1 的距离 $|x-1|$ 充分小．例如：

对 $\frac{1}{10}$，能够做到

$$\left|\frac{2x^2-2}{x-1}-4\right|=2|x+1|<\frac{1}{10},$$

只须 $0<|x-1|<\frac{1}{20}$即可．对$\frac{1}{10^3}$，能够做到

$$\left|\frac{2x^2-2}{x-1}-4\right|=2|x-1|<\frac{1}{10^3},$$

只须 $0<|x-1|<\frac{1}{2\times10^3}$即可．一般情况，对$\forall\varepsilon>0$，能够做到

$$\left|\frac{2x^2-2}{x-1}-4\right|=2|x-1|<\varepsilon.$$

只须 $0<|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$即可．将这句话的文字叙述稍加改动，就是"当 x 无限趋近于 1 时，函数$\frac{2x^2-2}{x-1}$无限趋近于 4"的定量叙述：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\frac{\varepsilon}{2}>0$，$\forall x:0<|x-1|<\delta$，有

$$\left|\frac{2x^2-2}{x-1}-4\right|<\varepsilon.$$

下面给出一般的函数 $f(x)$（当 $x\to a$ 时）极限定义：

定义 设函数 $f(x)$在邻域$\mathring{U}(a)$有定义，b 是常数．若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x:0<|x-a|<\delta$，有

$$|f(x)-b|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$（当 $x\to a$ 时）**存在极限，极限是** b，或 b 是函数$f(x)$在 a 的极限，表为

$$\lim_{x\to a}f(x)=b \text{ 或 } f(x)\to b \quad (x\to a).$$

这就是函数在一点极限的 ε—δ 定义．

上述抛物线 $y=2x^2$在点 $P(1,2)$ 的切线斜率 k 是割线 PQ 的斜率 $k'=\frac{2x^2-2}{x-1}$在 1 的极限，即

$$k=\lim_{x\to1}\frac{2x^2-2}{x-1}=4.$$

在此极限定义中，"$0<|x-a|<\delta$" 指出 $x\neq a$．这说明函数

$f(x)$在 a 的极限与函数 $f(x)$ 在 a 的情况无关. 其中包含两层意思：其一，a 可以不属于函数 $f(x)$ 的定义域. 例如，1 并不属于函数$\frac{2x^2-2}{x-1}$的定义域. 但是，函数$\frac{2x^2-2}{x-1}$在1仍然存在极限(极限是4)；其二，a 可以属于函数 $f(x)$ 的定义域，这时函数 $f(x)$ 在 a 的极限与函数 $f(x)$ 在 a 的函数值 $f(a)$ 没有任何联系. 总之，函数$f(x)$在 a 的极限仅与函数 $f(x)$ 在 a 的附近的 x 的函数值 $f(x)$ 的变化有关，而与函数 $f(x)$ 在 a 的情况无关.

将极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ 及其否定叙述$\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq b$ 对比如下：

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=b \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x: 0<|x-a|<\delta$, 有$|f(x)-b|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq b \Longleftrightarrow \exists\varepsilon_0>0, \forall\delta>0, \exists x_0: 0<|x_0-a|<\delta$, 有$|f(x_0)-b|\geqslant\varepsilon_0$

已知

$$0<|x-a|<\delta \Longleftrightarrow a-\delta<x<a+\delta, x\neq a,$$

与
$$|f(x)-b|<\varepsilon \Longleftrightarrow b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon.$$

于是，极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$定义的分析语言与几何语言列表对比如下：

分 析 语 言	几何语言(在坐标平面上)
$\forall\varepsilon>0$,	在直线$y=b$的两侧，以任意二直线$y=b\pm\varepsilon$为边界，宽为2ε的带形区域，
$\exists\delta>0$,	总存在半径$\delta>0$,
$\forall x: 0<\|x-a\|<\delta$,	对位于以点a为心以δ为半径的去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$的任意 x
有$\|f(x)-b\|<\varepsilon$	在去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$，函数 $y=f(x)$ 的图象位于这个带形区域之内，如图2.6.

在上述极限定义中，如果仅讨论自变量 x 在 a 的右侧或左侧，则分别有函数 $f(x)$在 a 的右极限与左极限.

定义 设函数 $f(x)$ 在 a 右侧(左侧)有定义，b 是常数. 若$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x: a<x<a+\delta\ (a-\delta<x<a)$，有

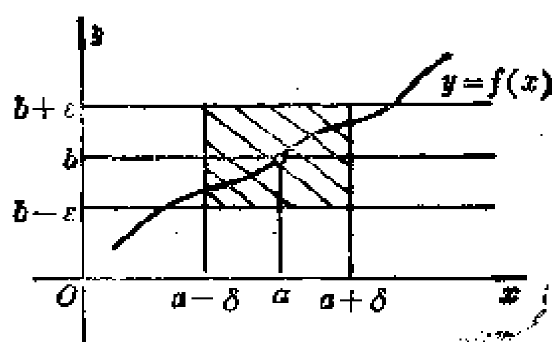


图 2.6

$$|f(x)-b|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在 a 存在**右极限(左极限)**，**右极限(左极限)**是 b，表为

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=b \quad 或 \quad f(a+0)=b$$

$$\left(\lim_{x\to a^-} f(x)=b \quad 或 \quad f(a-0)=b\right).$$

为了看到函数 $f(x)$ 在 a 的极限和在 a 左右极限的异同，将它们列表对比如下：

$\lim_{x\to a} f(x)=b \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x: 0<\|x-a\|<\delta$, 有 $\|f(x)-b\|<\varepsilon$
$\lim_{x\to a^+} f(x)=b \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x: a<x<a+\delta$, 有 $\|f(x)-b\|<\varepsilon$
$\lim_{x\to a^-} f(x)=b \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x: a-\delta<x<a$, 有 $\|f(x)-b\|<\varepsilon$

定理 1. $\lim_{x\to a} f(x)=b \Longleftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=b.$

证明 **必要性**($\Longrightarrow$) 已知 $\lim_{x\to a} f(x)=b$，即

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x: 0<|x-a|<\delta, 有 |f(x)-b|<\varepsilon.$$

$$0<|x-a|<\delta \Longleftrightarrow a-\delta<x<a 与 a<x<a+\delta.$$

于是，

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x: \begin{cases} a-\delta<x<a, \\ a<x<a+\delta, \end{cases} 有 |f(x)-b|<\varepsilon, 即$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=b.$$

充分性($\Longleftarrow$) 已知$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=b$,即

$$\forall\varepsilon>0,\begin{cases}\exists\delta_1>0,\forall x:a-\delta_1<x<a,\\ \exists\delta_2>0,\forall x:a<x<a+\delta_2,\end{cases}\text{有}|f(x)-b|<\varepsilon.$$

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. 于是,$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$, $\forall x:0<|x-a|<\delta$,有

$$|f(x)-b|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{x\to a}f(x)=b.\ \square$$

四、例(II)

用极限定义证明$\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=b$,其证法与证明数列极限类似,关键在于找$\delta$.

例5. 证明$\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)=5$.

证明 $\forall\varepsilon>0$,要使不等式

$$|(2x+3)-5|=2|x-1|<\varepsilon$$

成立. 解得$|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$. 取$\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. 于是,

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\frac{\varepsilon}{2}>0,\forall x:0<|x-1|<\delta$,有$|(2x+3)-5|<\varepsilon$,即

$$\lim_{x\to 1}(2x+3)=5.$$

例6. 证明 $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}\quad(a>0,x>0)$.

证明 $\forall\varepsilon>0$,要使不等式

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$
$$<\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}<\varepsilon$$

成立. 从不等式$\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}<\varepsilon$,解得$|x-a|<\sqrt{a}\,\varepsilon$. 取$\delta=\sqrt{a}\,\varepsilon$. 于

是，

$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta=\sqrt{a}\,\varepsilon>0$，$\forall x: 0<|x-a|<\delta$，有 $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\varepsilon$，即

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}.$$

例 7. 证明 $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.

证明 已知 $\forall x\in\mathbf{R}$，有

$$\left|\sin\frac{x+a}{2}\right|\leqslant 1 \text{ 与 } \left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\leqslant\frac{|x-a|}{2}.$$

$\forall \varepsilon>0$，要使不等式

$$|\cos x-\cos a|=2\left|\sin\frac{x+a}{2}\right|\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|$$

$$\leqslant 2\cdot\frac{|x-a|}{2}=|x-a|<\varepsilon$$

成立．取 $\delta=\varepsilon$．于是，

$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta=\varepsilon>0$，$\forall x: 0<|x-a|<\delta$，有 $|\cos x-\cos a|<\varepsilon$，即

$$\lim_{x\to a}\cos x=\cos a.$$

特别是，

$$\lim_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1.$$

例 8. 证明 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x^2-25}=\dfrac{1}{10}$.

证法 当 $x\neq 5$ 时，$\forall \varepsilon>0$，解不等式

$$\left|\frac{x-5}{x^2-25}-\frac{1}{10}\right|=\frac{1}{10}\left|\frac{x-5}{x+5}\right|<\varepsilon$$

找 δ 有困难．因为函数 $\dfrac{x-5}{x^2-25}$ 在 5 的极限只与 5 的附近 x 有关，所以可限定 x 的变化范围．如限定 $|x-5|<1$，即 $4<x<6$，这是取定了一个 $\delta=1$．然后在保留因式 $|x-5|$ 的情况下，放大求解．

证明 限定$0<|x-5|<1$，即$4<x<6$，且$x\neq5$. $\forall\varepsilon>0$，要使不等式

$$\left|\frac{x-5}{x^2-25}-\frac{1}{10}\right|=\frac{1}{10}\left|\frac{x-5}{x+5}\right|<\frac{1}{10}\frac{|x-5|}{4+5}=\frac{1}{90}|x-5|<\varepsilon$$

成立. 解不等式$\frac{1}{90}|x-5|<\varepsilon$得$|x-5|<90\varepsilon$. 取$\delta=\min(90\varepsilon,1)$. 于是,

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\min(90\varepsilon,1)>0,\forall x:0<|x-5|<\delta$，有

$$\left|\frac{x-5}{x^2-25}-\frac{1}{10}\right|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{x\to5}\frac{x-5}{x^2-25}=\frac{1}{10}.$$

例 9. 证明$\lim\limits_{x\to a}x^m=a^m$，　$m\in\mathbf{N}$.

证明 限定$|x-a|<1$，有$|x|<|a|+1$. $\forall\varepsilon>0$，要使不等式

$$\begin{aligned}|x^m-a^m|&=|x-a||x^{m-1}+x^{m-2}a+\cdots+a^{m-1}|\\&\leqslant|x-a|(|x|^{m-1}+|x|^{m-2}|a|+\cdots+|a|^{m-1})\\&<|x-a|\cdot m(|a|+1)^{m-1}<\varepsilon\end{aligned}$$

成立. 从不等式$|x-a|\cdot m(|a|+1)^{m-1}<\varepsilon$，解得

$$|x-a|<\frac{\varepsilon}{m(|a|+1)^{m-1}}.$$

取$\delta=\frac{\varepsilon}{m(|a|+1)^{m-1}}$. 于是，　$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\frac{\varepsilon}{m(|a|+1)^{m-1}}>0$,

$\forall x:0<|x-a|<\delta$，有$|x^m-a^m|<\varepsilon$，即

$$\lim_{x\to a}x^m=a^m.$$

例 10. 设$g(x)=\dfrac{1}{1+10^{\frac{1}{x}}}$，证明：

(i) $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=0$,　　　(ii) $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=1$.

证明 (i) $\forall x>0$. $\forall\varepsilon>0$，要使不等式

$$|g(x)-0|=\frac{1}{1+10^{\frac{1}{x}}}<\varepsilon$$

成立．解得$x<\dfrac{1}{\lg\left(\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right)}\left(限定\ 0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}\right)$．取$\delta=\dfrac{1}{\lg\left(\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right)}$.

于是，

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\frac{1}{\lg\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)}>0,\ \forall x:0<x<\delta,\ 有\ |g(x)-0|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to 0^+}g(x)=0.$$

(ii) $\forall x<0$．$\forall\varepsilon>0$，要使不等式

$$|g(x)-1|=\left|\frac{1}{1+10^{\frac{1}{x}}}-1\right|=1-\frac{1}{1+10^{\frac{1}{x}}}<\varepsilon$$

成立．解得$x>\dfrac{1}{\lg\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}\left(限定 0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}\right)$．取$\delta=-\dfrac{1}{\lg\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}$．于是，

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=-\frac{1}{\lg\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}>0,\forall x:-\delta<x<0,\ 有\ |g(x)-1|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to 0^-}g(x)=1.$$

由于$\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)$，根据定理 1，函数 $g(x)$在 0 不存在极限．

练习题　2.3

1．证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+3}=0$.　　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}=0$.　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

(5) $\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)=7$.　　(6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=3$.

(7) $\lim\limits_{x\to 0^-}2^{\frac{1}{x}}=0$.　　(8) $\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0$.

2. 证明下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{4x^2-7x+3}=\frac{1}{4}$.　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{4x^2-7x+3}=2$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-1}{4x^2-7x+3}=-\frac{1}{3}$.

*　　*　　*　　*

3. 证明下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\frac{1}{2}$.　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 1^-}\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}=\frac{\pi}{2}$.　　(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$.

§2.4　函数极限的定理

一、函数极限的性质

§2.3 给出了两类六种函数极限,即

$$\lim_{x\to+\infty}f(x),\ \lim_{x\to-\infty}f(x),\ \lim_{x\to\infty}f(x),$$

$$\lim_{x\to a}f(x),\ \lim_{x\to a^+}f(x),\ \lim_{x\to a^-}f(x).$$

每一种函数极限与收敛数列都具有类似的性质和四则运算法则. 本节仅就经常遇到的函数极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 给出与收敛数列相类似的一些定理及其证明. 读者不难写出其它五种函数极限的相应的定理,并给出证明.

定理 1. (唯一性)　若函数 $f(x)$ 在 a 存在极限,则它的极限是唯一的.

证明 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$与$\lim\limits_{x\to a}f(x)=c$,即

$$\forall \varepsilon>0,\begin{cases}\exists\delta_1>0,\forall x:0<|x-a|<\delta_1,\text{有}|f(x)-b|<\varepsilon,\\ \exists\delta_2>0,\forall x:0<|x-a|<\delta_2,\text{有}|f(x)-c|<\varepsilon.\end{cases}$$

$\exists\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0,\forall x:0<|x-a|<\delta$,同时有

$$|f(x)-b|<\varepsilon \text{ 与 } |f(x)-c|<\varepsilon.$$

于是,$\forall x:0<|x-a|<\delta$,有

$$\begin{aligned}|b-c|&=|b-f(x)+f(x)-c|\\&\leqslant|b-f(x)|+|f(x)-c|<2\varepsilon,\end{aligned}$$

即$b=c$. 从而函数$f(x)$在a的极限是唯一的. □

定理 2.(局部有界性) 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$,则$\exists M>0$,$\exists\delta_0>0$,$\forall x:0<|x-a|<\delta_0$,有$|f(x)|\leqslant M$.

证明 已知$\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$,即

$\exists\varepsilon_0>0,\exists\delta_0>0,\forall x:0<|x-a|<\delta_0$,有$|f(x)-b|<\varepsilon_0$. 从而,$\forall x:0<|x-a|<\delta_0$,有

$$|f(x)|=|f(x)-b+b|\leqslant|f(x)-b|+|b|<|b|+\varepsilon_0.$$

于是,$\exists M=|b|+\varepsilon_0>0,\exists\delta_0>0,\forall x:0<|x-a|<\delta_0$,有

$$|f(x)|\leqslant M. \ \square$$

定理 3.(保序性) 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$与$\lim\limits_{x\to a}g(x)=c$,且$b<c$,则$\exists\delta_0>0,\forall x:0<|x-a|<\delta_0$,有$f(x)<g(x)$.

证明 已知$\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$与$\lim\limits_{x\to a}g(x)=c$,即

$\exists\varepsilon_0=\dfrac{c-b}{2}>0$,分别

$\exists\delta_1>0,\forall x:0<|x-a|<\delta_1$,有$|f(x)-b|<\dfrac{c-b}{2}$,从而

$$f(x)<\frac{b+c}{2},$$

$\exists\delta_2>0,\forall x: 0<|x-a|<\delta_2$，有 $|g(x)-c|<\frac{c-b}{2}$，从而

$$\frac{b+c}{2}<g(x).$$

于是，$\exists\delta_0=\min\{\delta_1,\delta_2\},\forall x: 0<|x-a|<\delta_0$，同时有

$$f(x)<\frac{b+c}{2} \text{与} \frac{b+c}{2}<g(x),$$

即 $f(x)<g(x)$. □

推论 1. 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ 与 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=c$，且 $\exists\delta_0>0$，$\forall x: 0<|x-a|<\delta_0$，有 $f(x)\leqslant g(x)$（或 $f(x)\geqslant g(x)$），则 $b\leqslant c$（或 $b\geqslant c$）.

证明 只证 $b\leqslant c$ 的情况. 应用反证法 假设 $c<b$. 根据定理 3，$\exists\delta>0(\delta\leqslant\delta_0)$，$\forall x: 0<|x-a|<\delta$，有 $g(x)<f(x)$. 与已知条件矛盾. □

推论 2.（保号性） 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$，且 $b<0$（或 $b>0$），则 $\exists\delta_0>0,\forall x: 0<|x-a|<\delta_0$，有 $f(x)<0$（或 $f(x)>0$）.

证明 在定理 3 中，取 $g(x)=0$，有 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$. 于是，$\exists\delta_0>0,\forall x: 0<|x-a|<\delta_0$，有 $f(x)<0$（或 $f(x)>0$）. □

定理 4.（四则运算） 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 a 都存在极限，则函数 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$，$\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ 也存在极限，且

1) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$， 其中 $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$

证明 只给出 2) 的证明. 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ 与 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=c$，即

$$\forall \varepsilon>0,\begin{cases}\exists\delta_1>0,\forall x:0<|x-a|<\delta_1,\text{有}|f(x)-b|<\varepsilon,\\ \exists\delta_2>0,\forall x:0<|x-a|<\delta_2,\text{有}|g(x)-c|<\varepsilon.\end{cases}$$

又由已知$\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$. 根据定理 2, $\exists M>0$ 与 $\exists\delta_0>0$, $\forall x$: $0<|x-a|<\delta_0$, 有 $|f(x)|\leqslant M$.

$\exists\delta=\min\{\delta_0,\delta_1,\delta_2\}>0$, $\forall x$: $0<|x-a|<\delta$, 同时有

$|f(x)-b|<\varepsilon$, $|g(x)-c|<\varepsilon$ 与 $|f(x)|\leqslant M$.

于是, $\forall x$: $0<|x-a|<\delta$, 有

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-bc|&=|f(x)g(x)-cf(x)+cf(x)-bc|\\&\leqslant|f(x)||g(x)-c|+|c||f(x)-b|\leq M\varepsilon+|c|\varepsilon\\&=(M+|c|)\varepsilon,\end{aligned}$$

即
$$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=bc=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x).\ \square$$

定理 5. (复合函数极限)设有复合函数 $f[g(x)]$. 若

1) $\lim\limits_{x\to a}g(x)=b$,

2) $\forall x\in\mathring{U}(a)$, 有 $u=g(x)\in\mathring{U}(b)$,

3) $\lim\limits_{u\to b}f(u)=A$,

则 $\lim\limits_{x\to a}f[g(x)]=A$.

证明 由条件 3), 即

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\eta>0$, $\forall u$: $0<|u-b|<\eta$, 有 $|f(u)-A|<\varepsilon$.

由条件 1), 即

对上述 $\eta>0$, $\exists\delta>0$, $\forall x$: $0<|x-a|<\delta$, 有 $|g(x)-b|<\eta$.

再由条件 2), 有 $0<|g(x)-b|=|u-b|<\eta$. 于是,

$\forall\varepsilon>0$, ($\exists\eta>0$, 从而) $\exists\delta>0$, $\forall x$: $0<|x-a|<\delta$, 有 ($0<|g(x)-b|=|u-b|<\eta$. 从而) $|f(u)-A|=|f[g(x)]-A|<\varepsilon$,

即
$$\lim_{x\to a}f[g(x)]=A.\ \square$$

定理 5 是求极限进行换元的理论根据.

二、函数极限与数列极限的关系

函数极限与数列极限是分别定义的，形式上似乎没有什么联系，但是本质上两者却可以互相转化.

定理 6. （海涅①定理） $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b\Longleftrightarrow$ 对任意数列 $\{a_n\}$②，$a_n\neq a$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=b$.

证法　必要性应用函数极限定义和数列极限定义，可证得极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=b$.

充分性，因为在已知条件中，这样的数列 $\{a_n\}$ 是任意的，当然是无限多的，所以从已知条件出发直接证明有 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ 是困难的. 在这种情形，通常应用反证法. 假设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq b$，我们能够构造某一个数列 $\{a_n\}$，$a_n\neq a$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，但是有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)\neq b$，与已知条件矛盾.

证明　必要性（$\Longrightarrow$）　已知 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$，即

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x:0<|x-a|<\delta$，有 $|f(x)-b|<\varepsilon$.

对任意数列 $\{a_n\}$，$a_n\neq a$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 根据数列极限定义，对上述 $\delta>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，有

$$0<|a_n-a|<\delta.$$

从而，$\forall n>N$，有 $|f(a_n)-b|<\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=b.$$

充分性（$\Longleftarrow$）应用反证法. 假设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq b$，根据函数极限的否定叙述，

$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x:0<|x-a|<\delta$，有 $|f(x)-b|\geqslant\varepsilon_0$.

---

① 海涅(H. E. Heine 1821—1881)德国数学家.

② 要求 a_n 属于函数 $f(x)$ 的定义域，并注意“任意”二字.

取　$\delta_1=1$, $\exists a_1$: $0<|a_1-a|<1$, 有 $|f(a_1)-b|\geqslant\varepsilon_0$,

$\delta_2=\frac{1}{2}$, $\exists a_2$: $0<|a_2-a|<\frac{1}{2}$, 有 $|f(a_2)-b|\geqslant\varepsilon_0$

……

$\delta_n=\frac{1}{n}$, $\exists a_n$: $0<|a_n-a|<\frac{1}{n}$, 有 $|f(a_n)-b|\geqslant\varepsilon_0$,

……

于是，构造出一个数列$\{a_n\}$，$a_n\neq a$，因为 $\delta_n=\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 显然，$\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)\neq b$，与已知条件矛盾. □

海涅定理是沟通函数极限和数列极限之间的桥梁. 根据海涅定理的必要性，函数 $f(x)$在 a 的极限可化为函数值数列的极限；根据海涅定理的充分性，又能够把数列极限的性质转移到函数极限上来. 其它五种函数极限

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=b,\quad \lim_{x\to a^-}f(x)=b,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=b,$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=b,\quad \lim_{x\to\infty}f(x)=b$$

分别有其相应的海涅定理，读者可把它们写出来，并予以证明.

应用海涅定理判别函数在某一点不存在极限比较简便. 根据海涅定理必要性的逆否命题有：

推论 1. 若存在某个数列$\{a_n\}$，$a_n\neq a$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，而它的函数值数列$\{f(a_n)\}$不存在极限，则函数 $f(x)$在 a 也不存在极限.

推论 2. 若存在某两个数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$，$a_n\neq a$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 与 $b_n\neq a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=c$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=d$，而 $c\neq d$，则函数 $f(x)$在 a 不存在极限.

例 1. 证明：函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$在 0 不存在极限.

证明　应用推论 2. 取

$$a_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}},\quad b_n=\frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}},\quad n\in\mathrm{N}\ .$$

显然，$a_n\neq 0, \lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$；$b_n\neq 0, \lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$. 有

$$f(a_n)=\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad f(b_n)=\sin\left(2n\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-1.$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=1, \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)=-1$. 于是，函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 0 不存在极限.

三、函数极限存在判别法

定理 7. 若 $\forall x\in\mathring{U}(a)$，有 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，且

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)=b,$$

则 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b.$

证法　应用海涅极限定理和数列极限的两边夹定理（§2.2 定理 7）。

证明 已知 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=b$，根据海涅定理的必要条件在 $\mathring{U}(a)$ 内任意数列 $\{a_n\}$，$a_n\neq a$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，有

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty} h(a_n)=b.$$

又已知 $\forall n\in\mathrm{N}$，有 $f(a_n)\leqslant g(a_n)\leqslant h(a_n)$. 由 §2.2 定理 7，有

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n)=b.$$

再根据海涅定理的充分条件，有

$$\lim_{x\to a} g(x)=b.\ \square$$

将定理 7 的 $x\to a$ 换成 $x\to+\infty$ 也成立，即

定理 8. 若 $\forall x\in(a,+\infty)$，有 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，且

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} h(x)=b,$$

则 $$\lim_{x\to+\infty} g(x)=b.$$

证明从略.

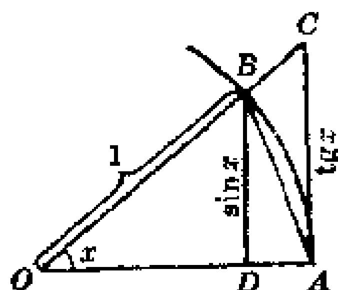


图 2.7

例 2. 证明$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$

证明 首先证明$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1.$

如图 2.7, $\overset{\frown}{AB}$是以点O为心半径为 1 的圆弧. 过A作圆弧的切线与OB的延长线交于点C, 连结AB.

设$\angle DOB=x$(按弧度计算), 且$0<x<\frac{\pi}{2}$. 显然,

$$\triangle AOB\text{ 面积}<\text{扇形 }AOB\text{ 面积}<\triangle AOC\text{ 面积},$$

即 $$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\text{tg}x \quad \text{或} \quad \sin x<x<\text{tg}x.$$

以 $\sin x>0$ 除之, 得

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x} \quad \text{或} \quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

由 § 2.3 例 7, $\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$. 根据定理 7, 有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1.$$

其次, 当 $x<0$ 时, 设 $x=-y$. $x\to0^-\Longleftrightarrow y\to0^+$. 根据定理 5,

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{y\to0^+}\frac{\sin(-y)}{-y}=\lim_{y\to0^+}\frac{\sin y}{y}=1.$$

再根据 § 2.3 定理 1, 有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

注 当 $x\to0$ 时, $\sin x\to0$, 在形式上$\frac{\sin x}{x}\to\frac{0}{0}$. $\forall x\neq0$, 总有

$\sin x \neq x$，即$\frac{\sin x}{x} \neq 1$. 当$|x|$充分小时，$|\sin x|$与$|x|$都充分小，但是比值$\frac{\sin x}{x}$却无限趋近于1. 见下表：

x	$1 \| 1$	$\frac{1}{2} \| 0.5$	$\frac{1}{4} \| 0.25$	$\frac{1}{8} \| 0.125$	$\frac{1}{16} \| 0.0625$	$\frac{1}{32} \| 0.03125$	$\cdots \to 0$
$\sin x \approx$	0.8415	0.4794	0.2474	0.1247	0.06246	0.03124	$\cdots \to 0$
$\frac{\sin x}{x} \approx$	0.8415	0.9588	0.9896	0.9974	0.99935	0.99984	$\cdots \to 1$

由此表看到，当$x \to 0$时，$\sin x$与x无限趋近于0的"速度"越来越接近. 只有在$x \to 0$的极限状态，二者趋近于0的速度才能相等，此时二者之比的极限才能是1.

例3. 证明：$\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

证明 先证$x \to +\infty$情况. $\forall x > 1$，有$[x] \leqslant x < [x]+1$，从而

$$1+\frac{1}{[x]+1} < 1+\frac{1}{x} \leqslant 1+\frac{1}{[x]}.$$

由幂函数（底数大于1）严格增加，有

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

由§2.2例9，有

$$\lim_{x \to +\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$= e.$$

$$\lim_{x \to +\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \to \infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = e.$$

根据定理8，有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

再证 $x\to-\infty$ 情况. 设 $x<0$, 且 $x=-y$. $x\to-\infty\Longleftrightarrow y\to+\infty$.

根据定理 5, 有

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^y$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e.$$

于是,
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

这个极限也可换成另一种形式. 设 $x=\frac{1}{\alpha}$. $x\to\infty\Longleftrightarrow\alpha\to0$, 有

$$\lim_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$$

上述两个极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 是数学分析中两个重要极限. 后面有多处用到它们, 特别在第五章将用它们导出重要的公式.

定理 9. **(柯西收敛准则)** 极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在 $\Longleftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall x',x''$: $0<|a-x'|<\delta$ 与 $0<|a-x''|<\delta$, 有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

证明 **必要性**($\Longrightarrow$) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$, 即

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x$: $0<|x-a|<\delta$, 有 $|f(x)-b|<\varepsilon$.

从而, $\forall x',x''$: $0<|x'-a|<\delta$ 与 $0<|x''-a|<\delta$, 同时有

$$|f(x')-b|<\varepsilon \quad 与 \quad |f(x'')-b|<\varepsilon.$$

于是, $|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-b|+|b-f(x'')|<2\varepsilon$.

充分性($\Longleftarrow$) 已知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0, \forall x',x''$: $0<|x'-a|<\delta$ 与 $0<|x''-a|<\delta$, 有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

任意数列$\{a_n\}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a, a_n\neq a$. 根据数列极限定义，对上述$\delta>0$，$\exists N\in\mathbf{N}, \forall n_1, n_2>N$，同时有

$$0<|a_{n_1}-a|<\delta \quad 与 \quad 0<|a_{n_2}-a|<\delta.$$

从而，有

$$|f(a_{n_1})-f(a_{n_2})|<\varepsilon.$$

根据数列柯西准则（§2.2定理8），数列$\{f(a_n)\}$收敛，设$\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=b$. （往证，$\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$，从而极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在）.

已知$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0, \forall x, y: 0<|x-a|<\delta$与$0<|y-a|<\delta$，有

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

又由$\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=b\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a, a_n\neq a\right)$，对上述$\delta>0$，$\exists n_0\in\mathbf{N}$，有$0<|a_{n_0}-a|<\delta$，从而

$$|f(a_{n_0})-b|<\varepsilon.$$

取$y=a_{n_0}$. 同时有

$$|f(x)-f(a_{n_0})|<\varepsilon \quad 与 \quad |f(a_{n_0}-b|<\varepsilon.$$

于是，有$|f(x)-b|\leqslant|f(x)-f(a_{n_0})|+|f(a_{n_0})-b|<2\varepsilon$，

即 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$. □

其它类型的函数极限（$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$）也有相应的柯西收敛准则. 请读者自行写出.

四、例

应用已知极限$\lim\limits_{x\to a}x^m=a^m(m\in\mathbf{N})$，$\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}\ (a>0)$，$\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$，和两个重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$与$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

等，以及函数极限的四则运算法则，能够求一些函数的极限。

例 4. 求极限 $\lim\limits_{x\to a}P(x)$，其中 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 是多项式函数，n 是自然数，$a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是常数。

解
$$\lim_{x\to a}P(x)=\lim_{x\to a}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)$$
$$=\lim_{x\to a}a_0x^n+\lim_{x\to a}a_1x^{n-1}+\cdots+\lim_{x\to a}a_n$$
$$=a_0a^n+a_1a^{n-1}+\cdots+a_n=P(a).$$

例 5. 求极限 $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 都是多项式函数，且 $Q(a)\neq 0$。

解 由例 4 及极限运算法则，有
$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}P(x)}{\lim\limits_{x\to a}Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}.$$

例 6. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$。

解 不能应用商的极限(因为分母的极限是 0)。
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\ (\text{因为 } x\neq 0)$$
$$=\frac{2}{\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+x}^{①}+\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x}}=\frac{2}{1+1}$$
$$=1.$$

---

① 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+x}=1$，应用了定理 5．设 $1+x=u, x\to 0 \Longleftrightarrow u\to 1$．从而，$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+x}=\lim\limits_{u\to 1}\sqrt{u}=\sqrt{1}=1$．以后凡是遇到求极限需要进行简单的换元，予以省略．如 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=1$，等。

例 7. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}{\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=\frac{2}{3}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}=\frac{2}{3}.$$

例 8. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

例 9. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

例 10. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}=\frac{1}{e}.$$

例 11. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x^2)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 $$\lim_{x\to 0}(1+3x^2)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+3x^2)^{\frac{1}{3x^2}}\right]^3$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}(1+3x^2)^{\frac{1}{3x^2}}\right]^3=e^3.$$

例 12. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)^{x^2}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}}{\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x^2}\right)^{-x^2}=e\cdot e=e^2.$$

练习题 2.4

1. 证明：若当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)$ 存在极限，则极限唯一．

2. 用极限定义直接证明定理 3 的推论 2．

3. 用极限定义证明：若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b,\lim\limits_{x\to a}g(x)=c$，则

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=b-c.$$

4. 用极限定义证明：若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b\neq0$，则 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{b}$.

5. 证明：若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，且 $g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 有界，则

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)g(x)=0.$$

6. 证明：若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，则 $\exists M>0$ 和 $\exists A>0,\forall x:|x|>A$，有 $|f(x)|\leq M$.

7. 证明：若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=b$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)g(x)=ab$.

8. 用极限定义证明定理 7 和定理 8．

9. 用不等式叙述下列符号的意义：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq A$, (2) $\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)\neq B$.

10. 写出极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在的柯西收敛准则及其否定叙述，并证明：

(1) 当 $x\to+\infty$ 时，函数 $\dfrac{\cos x}{x}$ 存在极限．

(2) 当 $x\to+\infty$ 时，函数 $\sin x$ 不存在极限．

11. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 是周期函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，则 $\forall x\in\mathbf{R}$，有

$f(x)=0$(或 $f(x)\equiv 0$).

12. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{2x^2-5}$, (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x^3-1}{x^5-x}$,

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$, (4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$,

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$, (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$,

(7) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$, (8) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$,

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{(a+bx)(c+dx)}-\sqrt{ac}}{x}$,

(10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ (m,n 是自然数)

13. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{4x}$, (2) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{3}{x}$,

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$, (4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$,

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sin x}{x}$, (6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$,

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+3}\right)^x$, (8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}x}$,

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$, (10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-2}{x^3+3}\right)^{x^3}$

* * * *

14. 证明:若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 单调增加,且有界,则极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 都存在.

15. 已知下列极限,确定 a 与 b:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$. (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+a}+b}{x^2-1}=1$.

16. 写出极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 的海涅定理，并给以证明.

17. 应用海涅定理证明：若函数 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 有定义，且单调增加，则 $\forall x_0\in(a,b)$，极限 $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在，且

$$f(x_0-0)\leqslant f(x_0)\leqslant f(x_0+0).$$

18. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 严格增加，且 $x_n\in(a,b)$，$n=1,\ 2,\cdots$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

19. 用极限运算法则及定理，验证下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})=\dfrac{1}{1-x}\ (|x|<1)$，

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{\sin x}{x}$，

(3) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$，

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{a}\left[\dfrac{b}{x}\right]=\dfrac{b}{a}\qquad(a>0,b>0)$，

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{x}{a}\right]\dfrac{b}{x}=0\qquad(a>0,b>0)$.

§2.5 无穷小与无穷大

一、无穷小

定义 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$，则称函数 $f(x)\ (x\to a)$ 是**无穷小**.

在此定义中，将 $x\to a$ 换成 $x\to a^+$，$x\to a^-$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$ 以及 $n\to\infty$ 可定义不同形式的无穷小. 例如：

当 $x\to 0$ 时，函数 x^3，$\sin x$，$\mathrm{tg}\,x$ 都是无穷小.

当 $x\to+\infty$ 时，函数 $\dfrac{1}{x^2}$，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，$\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\,x$ 都是无穷小.

当 $n\to\infty$ 时，数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$，$\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$，$\left\{\dfrac{n}{n^2+1}\right\}$ 都是无穷小.

本节主要讨论无穷小 $f(x)\ (x\to a)$.

根据极限定义或极限四则运算定理，不难证明，无穷小有以下几个性质：

性质 1. 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)(x\to a)$ 都是无穷小，则函数 $f(x)\pm g(x)(x\to a)$ 是无穷小.

性质 2. 若函数 $f(x)(x\to a)$ 是无穷小，函数 $g(x)$ 在 a 的某去心邻域 $\mathring{U}(a,\eta)$ 有界，则函数 $f(x)g(x)(x\to a)$ 是无穷小.

特别是，若函数 $f(x)$ 与 $g(x)(x\to a)$ 都是无穷小，则函数 $f(x)g(x)(x\to a)$ 也是无穷小.

性质 3. 极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b\Longleftrightarrow f(x)=b+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)(x\to a)$ 是无穷小.

性质 3 指出：任何形式的函数极限总可将这个函数表为它的极限与无穷小的和，反之亦然．通常在论证问题的过程中，要去掉极限符号，要应用这个性质 3.

二、无穷大

定义 设函数 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(a)$ 有定义．$\forall B>0,\exists\delta>0,\forall x$: $0<|x-a|<\delta$，有 $|f(x)|>B$，则称函数 $f(x)(x\to a)$ 是**无穷大**，有时也称函数 $f(x)$ 在 a 的"极限"是无穷大，表为

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty \quad 或 \quad f(x)\to\infty(x\to a).$$

若将上述定义中的不等式 $|f(x)|>B$ 分别改为

$$f(x)>B \quad 与 \quad f(x)<-B,$$

则分别称函数 $f(x)(x\to a)$ 是**正无穷大**与**负无穷大**，并分别表为

$$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty \quad 或 \quad f(x)\to+\infty(x\to a)$$

与

$$\lim_{x\to a}f(x)=-\infty \quad 或 \quad f(x)\to-\infty(x\to a).$$

无穷大，正无穷大和负无穷大列表对比如下：

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \Longleftrightarrow \forall B>0,$	$\exists\delta>0,$	$\forall x: 0<\lvert x-a\rvert<\delta,$	有$\lvert f(x)\rvert>B$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty \Longleftrightarrow \forall B>0,$	$\exists\delta>0,$	$\forall x: 0<\lvert x-a\rvert<\delta,$	有$f(x)>B$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty \Longleftrightarrow \forall B>0,$	$\exists\delta>0,$	$\forall x: 0<\lvert x-a\rvert<\delta,$	有$f(x)<-B$

在这三个“无穷大”的定义中，将$x\to a$换为$x\to a^+$，$x\to a^-$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$以及$n\to\infty$可定义不同形式的“无穷大”．读者自行写出．

证明函数是无穷大，其证法与证明函数存在极限相同．

例 1． 证明 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}=\infty$．

证明 $\forall B>0$，要使不等式

$$\left|\frac{1}{x-3}\right|=\frac{1}{|x-3|}>B$$

成立．解得$|x-3|<\dfrac{1}{B}$．取$\delta=\dfrac{1}{B}$．于是，

$$\forall B>0,\exists\delta=\frac{1}{B}>0,\forall x:0<|x-3|<\delta,\text{有}\left|\frac{1}{x-3}\right|>B,\text{即}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}=\infty.$$

例 2． 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty, a>1$．

证明 $\forall B>0(B>1)$，要使不等式

$$a^x>B$$

成立．解得$x>\log_a B$．取$A=\log_a B>0$．于是，

$\forall B>0,\exists A=\log_a B>0,\forall x>A$，有$a^x>B$，即

$$\lim_{x\to+\infty}a^x=+\infty.$$

例 3． 证明 $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln(1-x)=-\infty$．

证明 $\forall B>0$，要使不等式

$$\ln(1-x)<-B$$

成立. 解得 $1-x<e^{-B}$ 或 $1-e^{-B}<x$. 取 $\delta=e^{-B}$. 于是,

$\forall B>0, \exists\delta=e^{-B}>0, \forall x: 1-\delta<x<1$, 有 $\ln(1-x)<-B$, 即

$$\lim_{x\to 1^-}\ln(1-x)=-\infty.$$

根据无穷大的定义,不难证明,无穷大有如下性质:

性质 1. 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)(x\to a)$ 都是无穷大, 则函数 $f(x)g(x)(x\to a)$ 是无穷大.

性质 2. 若函数 $f(x)(x\to a)$ 是无穷大,函数 $g(x)$ 在 a 的某去心邻域 $\mathring{U}(a,\eta)$ 有界,则函数 $f(x)+g(x)(x\to a)$ 也是无穷大.

证明 已知 $g(x)$ 在 $\mathring{U}(a,\eta)$ 有界, 即

$\exists M>0, \ \forall x: 0<|x-a|<\eta$, 有 $|g(x)|\leqslant M$.

又已知 $f(x)(x\to a)$ 是无穷大, 即 $\forall B>M$ $(\forall(B-M)>0)$, $\exists\tau>0, \forall x: 0<|x-a|<\tau$, 有 $|f(x)|>B$.

$\exists\delta=\min\{\eta,\tau\}, \forall x: 0<|x-a|<\delta$, 同时有

$$|g(x)|\leqslant M \quad 与 \quad |f(x)|>B.$$

于是, $$|f(x)+g(x)|\geqslant|f(x)|-|g(x)|>B-M,$$

即 $$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty. \square$$

注 两个无穷大的代数和可能不是无穷大. 例如, 指数函数 a^x 与 $-a^x(x\to+\infty, a>1)$ 都是无穷大, 但它们的和 $a^x+(-a^x)=0(x\to+\infty, a>1)$ 不是无穷大,而是无穷小.

性质 3. 若函数 $f(x)(x\to a)$ 是无穷小(或无穷大), 且 $f(x)\neq 0$, 则函数 $\frac{1}{f(x)}(x\to a)$ 是无穷大(或无穷小).

证明 已知函数 $f(x)(x\to a)$ 是无穷小, 即 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x$: $0<|x-a|<\delta$, 有 $|f(x)|<\varepsilon$ 或 $\left|\frac{1}{f(x)}\right|>\frac{1}{\varepsilon}$. 于是,

$\forall B>0\left(B=\frac{1}{\varepsilon}\right)$, $\exists\delta>0$, $\forall x: 0<|x-a|<\delta$, 有$\left|\frac{1}{f(x)}\right|>B$, 即函数$\frac{1}{f(x)}(x\to a)$是无穷大.

同法可证另一种情况. □

因为当 $x\to\infty$ 时, $x^n(n\in\mathbf{N})$是无穷大, 所以 $\frac{1}{x^n}$ 是无穷小, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$.

例 4. 求极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m},$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 和 $b_0, b_1, \cdots, b_m$ 是常数, $a_0\neq0, b_0\neq0, n, m\in\mathbf{N}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$

$$=\lim_{x\to\infty}x^{n-m}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\cdots+\frac{b_m}{x^m}}.$$

当 $n=m$ 时, $\lim\limits_{x\to\infty}x^{n-m}=1$; 当 $n<m$ 时, $\lim\limits_{x\to\infty}x^{n-m}=0$; 当 $n>m$ 时, $\lim\limits_{x\to\infty}x^{n-m}=\infty$. 于是,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n=m,\\ 0, & \text{当 } n<m,\\ \infty, & \text{当 } n>m.\end{cases}$$

三、无穷小的比较

首先比较三个无穷小$\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$与$\left\{\frac{1}{n^3}\right\}$$(n\to\infty)$趋近于0的速度, 见下表:

n	1	2	4	8	10	…	100	…	$\to\infty$
$\frac{1}{n}$	1	0.5	0.25	0.125	0.1	…	0.01	…	$\to 0$
$\frac{1}{n^2}$	1	0.25	0.0625	0.015625	0.01	…	0.0001	…	$\to 0$
$\frac{1}{n^3}$	1	0.125	0.015625	0.001953	0.001	…	0.000001	…	$\to 0$

由上表看到，这三个无穷小趋近于 0 的速度有显著差异. $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ 比 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 快，而 $\left\{\frac{1}{n^3}\right\}$ 又比 $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ 快. 这只是直观的描述. 何谓“快”? “快”到什么程度?需要给出定量的定义.

定义 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ $(x\to a)$ 都是无穷小，且 $g(x)\neq 0$.

1. 若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$，称 $f(x)$ 比 $g(x)$ 是**高阶无穷小**.

2. 若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=b\neq 0$，称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是**同阶无穷小**.

特别是，若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$，称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是**等价无穷小**.

3. 若以 $x(x\to 0)$ 为标准无穷小，且 $f(x)$ 与 x^α（α 是正常数）是同阶无穷小，称 $f(x)$ 是关于 x 的 **α 阶无穷小**.

例如：

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=0$，即 $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ 比 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 是高阶无穷小.

由此可见，所谓“高阶”，就是无穷小 $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ 趋近于 0 的速度比另一个无穷小 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 趋近于 0 的速度更快.

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}=\frac{1}{2}$，即 $\operatorname{tg}x-\sin x$ 与 $\sin^3 x(x\to 0)$ 是同阶

无穷小.

由此可见,所谓"同阶",就是无穷小 $\operatorname{tg}x-\sin x$ 与 $\sin^3 x\,(x\to 0)$ 趋近于0的速度"差不多".

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 即 $\sin x$ 与 $x\,(x\to 0)$ 是等价无穷小.

由此可见,所谓"等价",就是无穷小 $\sin x$ 与 $x\,(x\to 0)$ 趋近于0的速度"基本相同".

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$, 即 $1-\cos x$ 是关于 x 的二阶无穷小.

为了书写简便,下面给出几个常用的符号.

设有 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(a)$ 有定义,且 $g(x)\neq 0$.

1. 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, 表为 $f(x)=o(g(x))\ (x\to a)$.

2. 若 $\exists K>0$ 与 $\exists\delta>0$, $\forall x: 0<|x-a|<\delta$, 有 $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|\leqslant K$, 表为 $f(x)=O(g(x))\ (x\to a)$.

3. 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, 表为 $f(x)\sim g(x)\ (x\to a)$.

不难验证, 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=b\neq 0$. 根据极限定义,对 $\varepsilon_0=1$, $\exists\delta>0$, $\forall x: 0<|x-a|<\delta$, 有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|-|b|\leqslant\left|\frac{f(x)}{g(x)}-b\right|<1,$$

即
$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|<|b|+1=K\text{(常数)}.$$

于是, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=b\neq 0$, 可表为 $f(x)=O(g(x))\ (x\to a)$.

特别,当 $g(x)\equiv 1$ 时:

$f(x)\ (x\to a)$ 是无穷小,表为 $f(x)=o(1)\ (x\to a)$.

$f(x)$在 a 的邻域有界，表为 $f(x)=O(1)$.

将这些符号用在两个无穷小 $f(x)$ 与 $g(x)$ $(x\to a)$ 的比较上，有：

若 $f(x)$比 $g(x)$是高阶无穷小，表为 $f(x)=o(g(x))$ $(x\to a)$;

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，表为 $f(x)\sim g(x)$ $(x\to a)$.

例如：$\frac{1}{n^2}=o\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n\to\infty)$, $\sin x\sim x(x\to 0)$.

注 o 和 O 可以进行运算.

例如，$\quad O(f(x))\cdot o(g(x))=o(f(x)\cdot g(x))$ $(x\to a)$.

事实上，设$\alpha(x)=O(f(x))$与$\beta(x)=o(g(x))$，即$\forall x\in\mathring{U}(a)$，有

$$\left|\frac{\alpha(x)}{f(x)}\right|\leqslant K \quad 与 \quad \lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{g(x)}=0,$$

其中K是常数．根据无穷小的性质 2，有

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)\cdot\beta(x)}{f(x)\cdot g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{f(x)}\cdot\frac{\beta(x)}{g(x)}=0,$$

或
$$\alpha(x)\cdot\beta(x)=o(f(x)\cdot g(x)),$$

即
$$O(f(x))\cdot o(g(x))=o(f(x)\cdot g(x)) \quad (x\to a).$$

这类等式的意义与通常数值等式的意义不同．等号的左端是条件，等号的右端是结论.

如果将等号两端的符号交换位置，即

$$o(f(x)\cdot g(x))=O(f(x))\cdot o(g(x)),$$

它就失去了意义．这类等式表示的是某种性质，不是指的数值相等.

练习题 2.5

1．将下列符号的意义用不等式叙述出来：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\qquad$ (2) $\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=+\infty$,

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = -\infty$,　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} s(x) = -\infty$,

(5) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$,　　(6) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \infty$.

2. 证明:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+1}{x^2} = \infty$,　　(2) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{x-1} = -\infty$,

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_2 x = -\infty$,　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$,

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty \quad (a<1)$,　　(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\operatorname{tg} x = +\infty$.

3. 证明: 若 $\lim\limits_{x\to a} P(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} Q(x) = A$, 则

$$\lim_{x\to a}[P(x)+Q(x)] = +\infty.$$

4. 证明: 若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = B$, 则 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)] = \infty$.

5. 证明: 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} Q(x) = A>0$, 则

$$\lim_{x\to+\infty} P(x)Q(x) = +\infty.$$

6. 证明: 当 $x\to a$ 时, 符号 o 具有下列性质:

(1) $o[f(x)] \pm o[f(x)] = o[f(x)]$.

(2) $o[cf(x)] = o[f(x)]$, 其中 c 是常数, 且 $c\neq 0$.

(3) $o\{o[f(x)]\} = o[f(x)]$.

7. 证明: $f(x)\sim g(x)\ (x\to a) \Longleftrightarrow f(x)-g(x) = o(g(x))$.

8. 证明:

(1) $x^2\sin x = o(x) \quad (x\to 0)$,　　(2) $\dfrac{x+2}{x^4+3} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \quad (x\to\infty)$,

(3) $\sin\dfrac{2}{x} = O\left(\dfrac{1}{x}\right) \quad (x\to\infty)$,　　(4) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad (x\to+\infty)$,

(5) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\sim x \quad (x\to 0)$, (6) $x^n-1\sim n(x-1) \quad (x\to 1)$

*　　*　　*　　*

9. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 单调增加, 存在数列 $\{a_n\}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = b$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$.

10. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow$ 任意数列 $\{a_n\}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 有

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = +\infty.$$

第三章　连续函数

第一章讨论了数学分析的研究对象——函数．第二章又给出了研究函数的方法——极限．这就为我们用分析的方法研究函数奠定了基础．那么数学分析应用极限方法主要是研究哪一类函数呢？数学分析的发展史告诉我们，无论在理论上或在应用中都应从连续函数开始．这是因为，一方面在生产实际中所遇到的函数多是连续函数．例如，流体的连续流动，气温的连续上升，压力的连续增加，等等；另一方面，我们常常直接或间接地借助于连续函数讨论一些不连续函数．于是，连续函数就成为数学分析研究的主要对象．

§3.1　连续函数

一、连续函数概念

已知函数 $f(x)$ 在 a 存在极限 b，即 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$，$a$ 可能属于函数 $f(x)$ 的定义域；a 也可能不属于函数 $f(x)$ 的定义域．既使 a 属于函数 $f(x)$ 的定义域，$f(a)$ 也不一定等于 b．但是，当 $f(a)=b$ 时，有着特殊的意义．

定义　设函数 $f(x)$ 在 $U(a)$ 有定义．若函数 $f(x)$ 在 a 存在极限，且极限就是 $f(a)$，即

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a),\tag{1}$$

则称函数 $f(x)$ 在 a **连续**，a 是函数 $f(x)$ 的**连续点**．

函数 $f(x)$ 在 a 连续，不仅 a 属于函数 $f(x)$ 的定义域，且有(1)

式极限. 因此函数 $f(x)$ 在 a 连续比函数 $f(x)$ 在 a 存在极限有更高的要求.

用极限的"ε—δ 定义",函数 $f(x)$ 在 a 连续(即(1)式极限)$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x: |x-a|<\delta$, 有 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

将(1)式极限改写为

$$\lim_{x \to a}[f(x)-f(a)]=0. \tag{2}$$

设 $x=a+\Delta x$ 或 $\Delta x=x-a$. Δx 称为自变量 x 在 a 的**改变量**. 设

$$\Delta y=f(x)-f(a)=f(a+\Delta x)-f(a),$$

Δy 称为函数 y 在 a 的**改变量**. 如图 3.1. $x \to a \Longleftrightarrow \Delta x \to 0$. 于是,由(2)式,

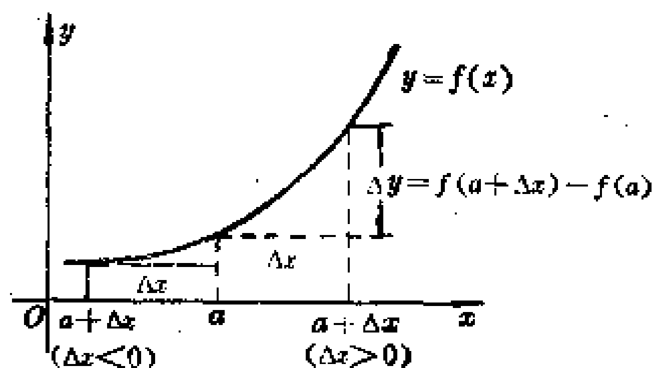


图 3.1

函数 $f(x)$ 在 a 连续 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0}\Delta y=0$.

有时只需讨论函数 $f(x)$ 在 a 左侧或右侧的连续性,有下面左右连续概念:

定义 设函数 $f(x)$ 在以 a 为左(右)端点的区间有定义. 若

$$\lim_{x \to a^+}f(x)=f(a)=f(a+0) \qquad \left(\lim_{x \to a^-}f(x)=f(a)=f(a-0)\right)$$

则称函数 $f(x)$ 在 a **右连续(左连续)**.

根据 § 2.3 定理 1, 有

$f(x)$ 在 a 连续 $\Longleftrightarrow f(x)$ 在 a 既右连续又左连续

或 $$\lim_{x \to a}f(x)=f(a) \Longleftrightarrow \lim_{x \to a^+}f(x)=\lim_{x \to a^-}f(x)=f(a).$$

定义 若函数 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续(若区间 I 左(右)端点属于 I,函数 $f(x)$ 在左(右)端点右连续(左连续)),则称函数 $f(x)$ 在区间 I 连续.

二、例

多项式函数 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 定义域是R. 由§2.4例4, $\forall a\in\mathbf{R}$,有

$$\lim_{x\to a}P(x)=P(a),$$

即多项式函数 $P(x)$ 在 a 连续,从而多项式函数 $P(x)$ 在其定义域R连续.

有理函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的定义域是 $G=\mathbf{R}-\{x|Q(x)=0\}$,其中 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 都是多项式函数. 由§2.4例5, $\forall a\in G$,有

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)},$$

即有理函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 在 a 连续,从而有理函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 在其定义域 $G=\mathbf{R}-\{x|Q(x)=0\}$ 连续.

余弦函数 $\cos x$ 的定义域是R. 由§2.3例7, $\forall a\in\mathbf{R}$,有

$$\lim_{x\to a}\cos x=\cos a,$$

即余弦函数 $\cos x$ 在 a 连续,从而余弦函数 $\cos x$ 在其定义域R连续.

下面证明正弦函数 $\sin x$ 与指数函数 a^x 在其定义域R都连续.

例 1. 证明: $f(x)=\sin x$ 在R连续.

证明 $\forall a\in\mathbf{R}$. 已知 $\forall x\in\mathbf{R}$,有不等式

$$\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|\leqslant 1 \quad 与 \quad \left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\leqslant\frac{|x-a|}{2}.$$

$\forall\varepsilon>0$，要使不等式

$$|\sin x-\sin a|=2\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\leqslant 2\frac{|x-a|}{2}=|x-a|<\varepsilon$$

成立，只须取 $\delta=\varepsilon$. 于是，

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\varepsilon>0,\forall x:|x-a|<\delta$，有 $|\sin x-\sin a|<\varepsilon$，即

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a.$$

也就是，正弦函数 $\sin x$ 在 a 连续. 从而，正弦函数 $\sin x$ 在其定义域 R 连续.

例 2. 证明 $f(x)=a^x\ (0<a\neq 1)$ 在 R 连续.

证明 首先证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}a^x=\lim\limits_{x\to 0^-}a^x=1$（即 $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$）.

$\forall x:0<x<1,\exists n\in\mathbf{N}$，使 $\frac{1}{n+1}\leqslant x<\frac{1}{n}$，$x\to 0^+\Longleftrightarrow n\to\infty$. 从而

当 $0<a<1$ 时，有 $a^{\frac{1}{n}}<a^x\leqslant a^{\frac{1}{n+1}}$；

当 $a>1$ 时，有 $a^{\frac{1}{n+1}}\leqslant a^x<a^{\frac{1}{n}}$.

由 § 2.1 例 6，$\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$. 根据 § 2.4 定理 7，有

$$\lim_{x\to 0^+}a^x=1.$$

$\forall x<0$，设 $x=-y$，有 $y>0$. $x\to 0^-\Longleftrightarrow y\to 0^+$，有

$$\lim_{x\to 0^-}a^x=\lim_{y\to 0^+}a^{-y}=\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{a^y}=1.$$

于是，
$$\lim_{x\to 0}a^x=1.$$

其次证明，$\forall x_0\in\mathbf{R}$，有 $\lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$（或 $\lim\limits_{x\to x_0}(a^x-a^{x_0})=0$）.

事实上，$\lim\limits_{x\to x_0}(a^x-a^{x_0})=\lim\limits_{x\to x_0}a^{x_0}(a^{x-x_0}-1)$.

设 $y=x-x_0$. $x\to x_0\Longleftrightarrow y\to 0$. 由上述结果，有

$$\lim_{x\to x_0}(a^x-a^{x_0})=a^{x_0}\lim_{x\to x_0}(a^{x-x_0}-1)$$

$$=a^{x_0}\lim_{y\to 0}(a^y-1)=0,$$

或
$$\lim_{x\to x_0}a^x=a^{x_0},$$

即指数函数 a^x 在 x_0 连续. 从而指数函数 a^x 在其定义域 R 连续.

三、间断点及其分类

定义 若函数 $f(x)$ 在 a 不满足连续定义的条件，则称函数 $f(x)$在 a **间断**(或**不连续**), a 是函数 $f(x)$的**间断点**(或**不连续点**).

函数 $f(x)$在 a 不满足连续定义的条件只有三种情况:

1) 函数 $f(x)$在 a 没有定义.

2) 极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在，即 $f(a-0)=f(a+0)$，但
$$\lim_{x\to a}f(x)\neq f(a).$$

3) 极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)$不存在;

① $f(a-0)$ 与 $f(a+0)$都存在,但 $f(a-0)\neq f(a+0)$.

② $f(a-0)$ 与 $f(a+0)$至少有一个不存在.

因此 a 是函数 $f(x)$的间断点相应地有以下三种情况:

1. 可去间断点

若极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在,即 $f(a-0)$ 与 $f(a+0)$都存在，且 $f(a-0)=f(a+0)$，而 $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq f(a)$或 a 不属于函数 $f(x)$的定义域，则称 a 是函数 $f(x)$的**可去间断点**.

设 a 是函数 $f(x)$的可去间断点,定义新函数
$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\neq a,\\ \lim\limits_{x\to a}f(x), & x=a,\end{cases}$$

显然，函数 $F(x)$在 a 连续，称函数 $F(x)$是函数 $f(x)$在 a 的**连续开拓**.

例如，函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，而 0 不属于函数

$f(x)=\frac{\sin x}{x}$的定义域. 从而 0 是函数$f(x)=\frac{\sin x}{x}$的可去间断点. 设

$$F(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}, & x=0.\end{cases}$$

函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$在 0 的连续开拓.

也可在区间的端点进行连续开拓.

设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 连续, 且 a 的右极限 $f(a+0)$ 与 b 的左极限 $f(b-0)$ 都存在, 定义新函数

$$F(x)=\begin{cases}f(a+0), & x=a,\\ f(x), & x\in(a,b),\\ f(b-0), & x=b.\end{cases}$$

显然, 函数 $F(x)$ 在闭区间$[a,b]$连续. 这就是, 函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 的两个端点 a 与 b 同时进行连续开拓.

2. 第一类间断点

若 $f(a-0)$ 与 $f(a+0)$ 都存在, 且 $f(a-0)\neq f(a+0)$, 则称 a 是函数 $f(x)$ 的**第一类间断点**.

例如, 函数
$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

已知
$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}x=1,$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}x=-1.$$

即 $f(0-0)$ 与 $f(0+0)$ 都存在, 且 $f(0-0)\neq f(0+0)$. 从而 0 是函数 $\operatorname{sgn}x$ 的第一类不连续点.

3. 第二类间断点

若 $f(a-0)$ 与 $f(a+0)$ 至少有一个不存在，则称 a 是函数 $f(x)$ **的第二类间断点**

例如，函数
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x>1,\\ 1, & x\leqslant 1.\end{cases}$$

已知
$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=1.$$
$$f(1+0)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty.$$

即 $f(1+0)$ 不存在．从而 1 是函数 $f(x)$ 的第二类间断点(也称无穷间断点)．

再例如，函数
$$g(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

由 §2.4 例 1，$g(0-0)$ 与 $g(0+0)$ 都不存在．从而 0 是函数 $g(x)$ 的第二类间断点(也称为振动间断点)．

练习题 3.1

1. 证明下列函数在其定义域连续：

(1) $f(x)=\sqrt[3]{x+4}$，　　(2) $g(x)=\sin\dfrac{1}{x}$.

2. 设 $f(a)$ 有意义，用"$\varepsilon-\delta$ 语言"叙述函数 $f(x)$ 在 a 不连续．

3. 证明：若函数 $f(x)$ 在 a 连续，则函数 $|f(x)|$ 在 a 也连续．逆命题是否成立？

4. 证明：若函数 $f(x)$ 在区间 I 连续，且对任意有理数 $r\in I$，有 $f(r)=0$，则 $\forall x\in I$，有 $f(x)=0$.

5. 证明：若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 单调增加，则 $f(x)$ 的间断点都是第一类间断点．

6. 证明：若函数 $f(x)$ 是奇函数或偶函数，且 $f(x)$ 在 $a(\neq 0)$ 连续，则函数 $f(x)$ 在 $-a$ 也连续.

7. 求下列函数的间断点，并指出其类型.

(1) $y=\frac{x}{(1+x)^2}$.　　(2) $y=\frac{1+x}{2-x^2}$.

(3) $y=\frac{x}{\sin x}$.　　(4) $y=\frac{1}{\ln|x|}$.

(5) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.　　(6) $y=e^{-\frac{1}{x}}$.

(7) $y=\sin\frac{1}{x}$.　　(8) $y=\frac{\sin x}{|x|}$.

8. 在下列函数中，A 取什么值，函数能连续开拓?

(1) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-16}{x-4}, & x\neq 4,\\ A, & x=4.\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-8}{x^2-4}, & x\neq 2,\\ A+1, & x=2.\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ A+2, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x-1)}{x-1}, & x\neq 1,\\ A, & x=1.\end{cases}$

*　　*　　*　　*

9. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $U(a)$ 有定义，且极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=A,$$

则函数 $f(x)$ 在 a 连续.

10. 证明：若函数 $f(x)$ 在 R 连续，对任意常数 $c>0$，则函数

$$F(x)=\begin{cases}-c, & f(x)<-c,\\ f(x), & |f(x)|\leqslant c,\\ c, & f(x)>c.\end{cases}$$

在 R 也连续.

11. 证明：黎曼[①]函数

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x=\frac{m}{n}, \text{其中 } m\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{N}, \text{且 } m \text{ 与 } n \text{ 互质},\\ 1, & x=0,\\ 0, & x \text{ 是无理数},\end{cases}$$

---

① 黎曼(Riemann 1826—1866)德国数学家

在任意有理点 x 不连续，在任意无理点 x 连续。

§3.2 连续函数的性质

一、连续函数的运算及其性质

根据极限四则运算定理及函数连续的定义，立即可得连续函数的四则运算定理.

定理 1. 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 a 连续，则函数

$$f(x)\pm g(x),\quad f(x)g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}\quad (g(a)\neq 0)$$

在 a 也连续.

由复合函数求极限定理及函数连续的定义，立即可得复合函数连续性定理.

定理 2. 若函数 $y=\varphi(x)$ 在 a 连续，且 $b=\varphi(a)$，而函数 $z=f(y)$ 在 b 连续，则复合函数 $z=f[\varphi(x)]$ 在 a 连续.

证明 已知 $z=f(y)$ 在 b 连续，即

$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall y:|y-b|<\eta$，有 $|f(y)-f(b)|<\varepsilon$.

又已知 $y=\varphi(x)$ 在 a 连续，且 $b=\varphi(a)$，即

对上述 $\eta>0,\exists\delta>0,\forall x:|x-a|<\delta$，有

$$|\varphi(x)-\varphi(a)|=|y-b|<\eta.$$

于是，$\forall\varepsilon>0$，($\exists\eta>0$，从而) $\exists\delta>0,\forall x:|x-a|<\delta$，有

$$(|\varphi(x)-\varphi(a)|=|y-b|<\eta,\text{从而})$$

$$|f[\varphi(x)]-f[\varphi(a)]|=|f(y)-f(b)|<\varepsilon.\quad\square$$

已知指数函数 $f(y)=a^y\ (a>0)$ 在 $\mathbf{R}$ 连续，正弦函数 $y=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 连续，从而它们的复合函数 $f(\sin x)=a^{\sin x}$ 在其定义域 $\mathbf{R}$ 也连续.

与极限的局部保号性（§2.4 定理 3 推论 2）类似，有连续函数

的保号性定理.

定理 3. (保号性)　若函数$f(x)$在 a 连续，且$f(a)>0(f(a)<0)$，则 $\exists\delta>0, \forall x: |x-a|<\delta$，有 $f(x)>0(f(x)<0)$.

证明　已知$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)>0$，即

$$\exists\frac{f(a)}{2}>0, \exists\delta>0, \forall x: |x-a|<\delta, 有$$

$$|f(x)-f(a)|<\frac{f(a)}{2} \quad 或 \quad f(a)-\frac{f(a)}{2}<f(x).$$

于是，$\forall x: |x-a|<\delta$，有 $f(x)>f(a)-\dfrac{f(a)}{2}=\dfrac{f(a)}{2}>0$.

同法可证，$f(x)<0$ 的情况. □

二、闭区间连续函数的性质

闭区间的连续函数有几个理想的性质，这些性质的几何意义都十分明显. 它们的证明要用到实数的连续性. 将它们的证明放在第四章.

定理 4. (有界性)　若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$连续，则函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$有界，即 $\exists M>0, \forall x\in[a,b]$，有

$$|f(x)|\leqslant M.$$

一般说来，开区间(或半开区间)的连续函数不一定有界. 例如，在半开区间$(0,1]$，连续函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$无界.

定理 5. (最值性)　若函数 $f(x)$在闭区间连续，则函数 $f(x)$在闭区间$[a, b]$能取到最小值 m 与最大值 M，即 $\exists x_1, x_2\in[a,b]$，使(如图 3.2)

$$f(x_1)=m \quad 与 \quad f(x_2)=M,$$

且 $\forall x\in[a,b]$，有

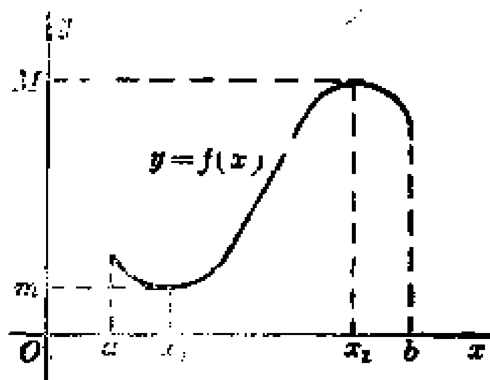


图 3.2

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

一般说来，开区间连续函数可能取不到最大值或最小值．例如，函数 $f(x)=x$ 在开区间(0，1)既取不到最大值，也取不到最小值．

引理 （零点定理） 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，且 $f(a)f(b)<0$(即 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号)，则在区间 (a,b) 至少存在一点 c，使

$$f(c)=0.$$

引理的几何意义是，在闭区间 $[a,b]$ 的连续曲线 $y=f(x)$，且连续曲线的始点 $(a,f(a))$ 与终点 $(b,f(b))$ 分别在 x 轴的两侧，则此连续曲线至少与 x 轴有一个交点(如图 3.3)．

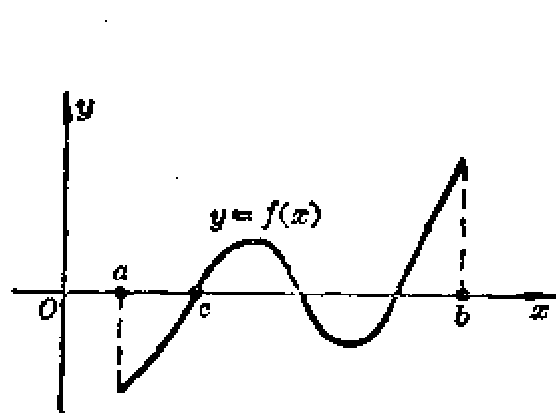


图 3.3

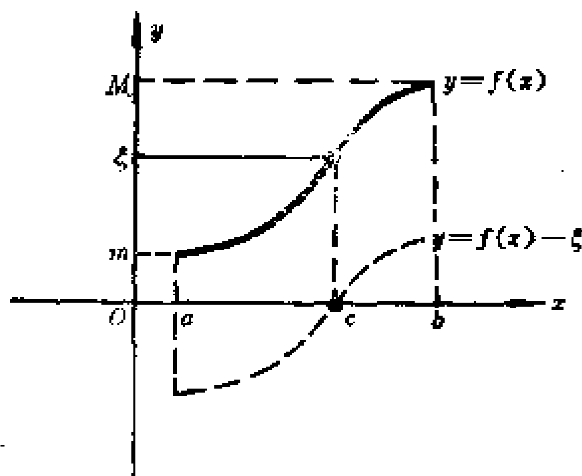


图 3.4

定理 6. （介值性） 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，m 与 M 分别是函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 的最小值与最大值，ξ 是 m 与 M 之间任意数(即 $m\leqslant\xi\leqslant M$)，则在闭区间 $[a,b]$ 至少存在一点 c，使(如图 3.4)

$$f(c)=\xi.$$

证明 如果 $m=M$，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 是常数．显然，定理成立．

如果 $m<M$，根据定理 5，在闭区间$[a,b]$上必存在二点 x_1 与 x_2，使 $f(x_1)=m, f(x_2)=M$. 不妨设 $x_1<x_2$，且 $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$. 已知 $f(x_1)\leqslant\xi\leqslant f(x_2)$. 如果 $f(x_1)=\xi$ 或 $f(x_2)=\xi$，则 $c=x_1$ 或 $c=x_2$，定理成立. 只须证明 $f(x_1)<\xi<f(x_2)$的情况. 作辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-\xi.$$

根据定理 1，函数 $\varphi(x)$在闭区间$[a,b]$连续，从而在闭区间$[x_1,x_2]$也连续，且

$$\varphi(x_1)=f(x_1)-\xi<0 \quad 与 \quad \varphi(x_2)=f(x_2)-\xi>0.$$

根据引理，在区间(x_1,x_2)至少存在一点 c，使 $\varphi(c)=0$ 或 $f(c)-\xi=0$，即

$$f(c)=\xi. \quad \square$$

注 在定理 6 的证明中，辅助函数 $\varphi(x)$的图象就是函数 $f(x)$的图象沿 y 轴向下平行移了 ξ 一段距离（如图 3.4）. 这样就把一般情况化成了满足引理条件的特殊情况. 根据引理，定理 3 就得到了证明.

例 1. 证明：奇次多项式

$$P(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n+1}$$

至少存在一个实根，其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 都是常数，且 $a_0\neq 0$.

证明 已知多项式 $P(x)$在 $\mathbf{R}$ 连续. 将 $P(x)$改写为

$$P(x)=x^{2n+1}\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}}\right).$$

不妨设 $a_0>0$，有

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=+\infty \quad 与 \quad \lim_{x\to-\infty}P(x)=-\infty.$$

于是，存在 $r>0$，使 $P(r)>0$ 与 $P(-r)<0$. 根据零点定理，在$(-r,r)$内至少存在一点 c，使 $P(c)=0$，即奇次多项式 $P(x)$至少存在一个实根.

例 2. 证明：超越方程 $x=\cos x$ 在$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$内至少存在一个实根.

证明 已知函数 $\varphi(x)=x-\cos x$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$连续，并且

$$\varphi(0)=-1<0 \quad 与 \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0.$$

根据零点定理，函数 $\varphi(x)$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内至少存在一点 c，使

$$\varphi(c)=c-\cos c=0,$$

即超越方程 $x=\cos x$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内至少存在一个实根.

例 3. 任意正数 a 存在唯一正的 n 次方根 $\sqrt[n]{a}$.

证明 首先证明存在性. 考虑函数

$$f(x)=x^n-a.$$

显然，函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 连续. $\exists b>0$，使 $f(b)=b^n-a>0$，又

$$f(0)=-a<0.$$

根据零点定理，$\exists c\in(0,\ b)$，使 $f(c)=c^n-a=0$，即 $c=\sqrt[n]{a}$.

其次证明唯一性. 设 $c=\sqrt[n]{a}$ 与 $d=\sqrt[n]{a}$，或 $a=c^n$ 与 $a=d^n$，有

$$c^n-d^n=(c-d)(c^{n-1}+c^{n-2}d+\cdots+cd^{n-2}+d^{n-1})=a-a=0.$$

因为 c 与 d 都是正数，所以 $c=d$，即 n 次方根 $\sqrt[n]{a}$ 唯一.

三、反函数的连续性

根据 §1.3 定理 1，若函数 $y=f(x)$ 在数集 A 严格增加（严格减少），则函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，且反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $f(A)$ 也严格增加（严格减少）.

若数集 A 是区间 I，且函数 $y=f(x)$ 在区间 I 是严格单调的连续函数. 根据定理 5 和定理 6，不难证明，$f(I)$ 也是区间. 那么反

函数 $x=f^{-1}(y)$ 在区间 $f(I)$ 是否仍保持连续性呢？有下面定理：

定理 7. 若函数 $y=f(x)$ 在区间 I① 连续，且严格增加（严格减少），则反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $f(I)$ 也连续.

证明 $\forall \eta\in f(I)$. 根据定理 6 与 $f(x)$ 在区间 I 严格增加，存在唯一一个 $\xi\in I$，使

$$f(\xi)=\eta \quad 或 \quad f^{-1}(\eta)=\xi.$$

不妨设 ξ 在区间 I 的内部（当 ξ 是 I 的端点时，可同法证明，读者自行完成）.

$\forall \varepsilon>0$，使 $(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)\subset I$，设

$$f(\xi-\varepsilon)=\eta_1$$

与 $$f(\xi+\varepsilon)=\eta_2$$

或 $$f^{-1}(\eta_1)=\xi-\varepsilon$$

与 $$f^{-1}(\eta_2)=\xi+\varepsilon.$$

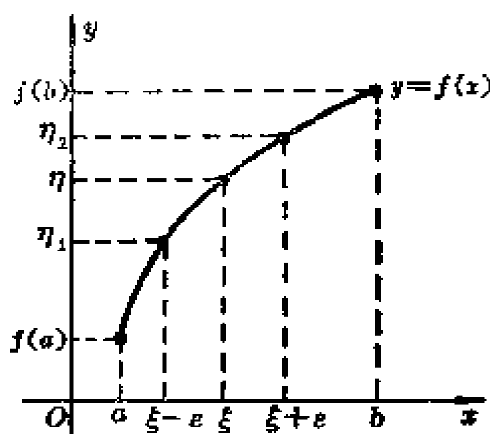


图 3.5

显然，$\eta_1<\eta<\eta_2$，如图 3.5. 取 $\delta=\min\{\eta-\eta_1,\eta_2-\eta\}$. 于是，$\forall y:|y-\eta|<\delta$，有 $\eta_1<y<\eta_2$. 由于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 严格增加，有

$$f^{-1}(\eta_1)<f^{-1}(y)<f^{-1}(\eta_2) \quad 或 \quad \xi-\varepsilon<f^{-1}(y)<\xi+\varepsilon,$$

$$|f^{-1}(y)-\xi|<\varepsilon \quad 或 \quad |f^{-1}(y)-f^{-1}(\eta)|<\varepsilon,$$

即反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 η 连续，从而反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $f(I)$ 连续. □

四、初等函数的连续性

我们已知常数函数 $y=c$（c 是常数），三角函数 $y=\sin x$（§3.1 例 1），$y=\cos x$（§2.3 例 7），指数函数 $y=a^x$（$0<a\neq1$，§3.1 例 2）

① 区间 I 可以是闭区间、开区间、半开区间或无穷区间.

在各自的定义域 R 都连续.

因为指数函数 $y=a^x(0<a\neq1)$在定义域 R 连续，且严格单调，根据定理 7，所以它的反函数——对数函数 $y=\log_a x$ 在其定义域$(0,+\infty)$连续.

因为三角函数 $y=\sin x, y=\cos x$ 在其定义域 R 都连续，根据定理 1，所以三角函数

$$y=\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad y=\operatorname{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x},$$

$$y=\sec x=\frac{1}{\cos x},\quad y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$$

在各自的定义域都连续.

因为正弦函数 $y=\sin x$ 在闭区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$连续，且严格增加，根据定理 7，所以它的反函数——反正弦函数 $y=\arcsin x$ 在其定义域$[-1,1]$连续. 同理，反三角函数

$$y=\arccos x,\quad y=\operatorname{arc\,tg}x,\quad y=\operatorname{arc\,ctg}x$$

在各自的定义域都连续.

幂函数 $y=x^\alpha(\alpha\in\mathbf{R})$的定义域，由于$\alpha$ 的不同可能有四种情况: $\mathbf{R}, \mathbf{R}-\{0\}, [0,+\infty), (0,+\infty)$. 不难证明，$\forall\alpha\in\mathbf{R}$，幂函数 $y=x^\alpha$ 在开区间$(0,+\infty)$都连续.

事实上，$\forall x>0, y=x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$，即幂函数 $y=x^\alpha$ 是两个连续函数 $y=e^u$ 与 $u=\alpha\ln x$ 的复合函数，根据定理 2，幂函数 $y=x^\alpha$ 在开区间$(0,+\infty)$连续.

只有当 $\alpha>0$ 时($\alpha=0$，幂函数蜕化为常数函数 $y=1$)，幂函数 $y=x^\alpha$ 的定义域才含有 0. 此时，有

$$\lim_{x\to0^+}x^\alpha=0=0^\alpha,$$

即幂函数 $y=x^\alpha$ 在 0 右连续.

当幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的定义域是 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{R}-\{0\}$ 时，幂函数 $y=x^{\alpha}$ 必是奇函数或偶函数，由练习题 3.1 第 6 题，幂函数在 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{R}-\{0\}$ 连续.

于是，幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$ 在其定义域连续.

综上所述，六类基本初等函数：常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数在它们各自的定义域都连续.

已知"凡是由基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次复合所生成的函数是初等函数". 根据定理 1 和定理 2，得到：

初等函数(定义域仅是孤立点集除外)在其定义域连续.

这个结论对判别函数的连续性和求函数极限都很方便. 例如，若函数 $f(x)$ 是初等函数，且点 x_0 或区间 I 属于函数 $f(x)$ 的定义域，那么函数 $f(x)$ 在点 x_0 或在区间 I 连续.

求初等函数 $f(x)$ 在其定义域的一点 x_0 的极限，由连续定义，有

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)=f(\lim_{x\to a}x).$$

上式等号的左端是先"f"后"lim"，等号的右端是先"lim"后"f"，即函数 $f(x)$ 在 a 连续等价于"f"与"lim"可以交换次序.

于是，求连续函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限就化为求函数 $f(x)$ 在点 x_0 的函数值. 例如：

例 4. 求极限 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4}$.

解

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{2}{\sqrt{1+2x}+3}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{3}.\qquad\left(\frac{2}{\sqrt{1+2x}+3}\text{在点 4 连续}\right)$$

例5. 求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

解
$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$$

$$=\cos\left[\lim_{x\to a}\frac{x+a}{2}\right]\cdot\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\qquad\left(\cos\frac{x+a}{2}\text{在点 }a\text{ 连续}\right)$$

$$=\cos a.\qquad\left(\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=1\right)$$

例6. 求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$, $a>0$.

解
$$\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\ln\frac{x}{a}$$

$$=\lim_{x\to a}\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\lim_{x\to a}\ln\left[\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^{\frac{a}{x-a}}\right]^{\frac{1}{a}}$$

$$=\frac{1}{a}\ln\left[\lim_{x\to a}\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^{\frac{a}{x-a}}\right]$$

$$=\frac{1}{a}\ln e=\frac{1}{a}.$$

尚有几个常用的极限.

例7. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]$$
$$=\ln e=1.$$

例 8. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$, $a>0$.

解 设 $y=a^x-1$ 或 $x=\dfrac{\ln(1+y)}{\ln a}$. $x\to 0\Longleftrightarrow y\to 0$,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y\ln a}{\ln(1+y)}=\ln a\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}$$

$$=\frac{\ln a}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y}}=\ln a. \text{(应用例 7)}$$

例 9. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}$.

解 设 $y=(1+x)^\alpha-1$ 或 $\alpha\ln(1+x)=\ln(1+y)$. $x\to 0\Longleftrightarrow$ 0,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{y}{\ln(1+y)}=\alpha\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y}}=\alpha.$$

求函数极限时,例 7、例 8、例 9 可作为公式使用. 例如, 求极限 $(a>0)$

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-a^a}{x-a}=\lim_{x\to a}a^a\frac{a^{x-a}-1}{x-a}=a^a\lim_{x\to a}\frac{a^{x-a}-1}{x-a}\quad(\text{设 } y=x-a)$$

$$=a^a\lim_{y\to 0}\frac{a^y-1}{y}=a^a\ln a. \text{(应用例 8)}.$$

练习题 3.2

1. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 a 连续,且 $f(a)<0$, 则 $\exists\delta>0,\forall x: |x-a|<\delta$, 有 $f(x)<0$.

2. 用函数连续的"ε-δ"定义证明,若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 a 连续,则函数

$$f(x)\pm g(x),\quad f(x)g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}\quad (g(a)\neq 0)$$

也在a都连续.

3. 证明：若函数$y=f(x)$在$[a, b]$严格增加，且连续，则反函数$x=f^{-1}(y)$在点$\alpha=f(a)$右连续，即

$$\lim_{y\to\alpha^+} f^{-1}(y)=f^{-1}(\alpha).$$

4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$，　(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$，(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$，

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}$，　(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$，

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x-1)}$，　(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$.

5. 证明：若函数$f(x)$在$(a, +\infty)$连续，且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$与$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$，则$f(x)$在$(a, +\infty)$有界.

6. 证明：若函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$除一个（或有限个）第一类不连续点外连续，则$f(x)$在$[a,b]$有界.

7. 证明：若函数$f(x)$与$g(x)$在$[a, b]$连续，且$f(a)<g(a)$，$f(b)>g(b)$，则$\exists c\in(a,b)$，使$f(c)=g(c)$.

8. 证明：若函数$f(x)$在$[a,b)$连续，且$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$，则函数$f(x)$在$[a,b)$能取到最小值.

9. 证明下列方程：

(1) $x^2\cos x-\sin x=0$ 在$\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$内至少有一个实根.

(2) $\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{7}{x-2}+\dfrac{16}{x-3}=0$ 在$(1,2)$与$(2,3)$内各有一个实根.

(3) $x^5-2x^2+x+1=0$ 在$(-1,1)$内至少有一个实根.

(4) $x-2\sin x=a$ $(a>0)$至少有一个正实根.

10. 证明：若函数$f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$连续，则函数

$$F(x)=\max\{f(x),g(x)\}\quad 与\quad \phi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$

在$[a,b]$都连续.

(提示：$\max\{f(x),\ g(x)\}=\dfrac{1}{2}\ (f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|)$ 与 $\min\{f(x),\ g(x)\}=\dfrac{1}{2}\ (f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|)$，也可用连续定义

证明).

* * * *

11. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$, (2) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$,

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$, (4) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^{x})^{\frac{1}{x}}$,

(5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{x}-x^{a}}{x-a}\ (a>0)$, (6) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^{x}}{h^{2}}\ (a>0)$,

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}$, (8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^{n}$

$(a>0, b>0)$.

12. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 a 连续, 则函数

$$f^{+}(x)=\max\{f(x),0\} \quad 与 \quad f^{-}(x)=\min\{f(x),0\}$$

在 a 都连续.

13. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$, 且 $t_1+t_2+\cdots+t_n=1$, $t_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$, 则在 $[a,b]$ 内至少存在一点 ξ, 使

$$f(\xi)=t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n).$$

14. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 单调, 且 $f(x)$ 取到 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 中间的所有的数, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 连续.

15. 证明: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 连续, 且非常数, 则函数值集合 $A=\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$ 是一个闭区间 $[m, M]$, 其中 m 与 M 分别是 A 的最小值与最大值.

16. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 且函数值集合也是 $[a,b]$, 则至少存在一点 $x_0\in[a,b]$, 使 $f(x_0)=x_0$, 即至少有一个不动点 x_0.

17. 证明: 若 $\forall x,y\in\mathbf{R}$, 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 且 $f(x)$ 在 0 连续, 则函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 连续, 且 $f(x)=ax$, 其中 $a=f(1)$ 是常数.

第四章　实数的连续性

极限的理论问题首先是极限的存在问题．一个数列是否存在极限，不仅与数列本身的结构有关，而且也与数列所在的数集有关．如果在有理数集Q讨论极限，那么，单调有界的有理数列就可能不存在极限．例如，单调有界的有理数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$就不存在极限，因为它的极限（无理数$e$）不属于有理数集．从运算来说，有理数集关于极限运算不封闭，即有理数列的极限不一定还是有理数．如果在实数集上讨论极限，情况就不同了，这时，任意单调有界的实数列都存在极限，即§2.2的公理．从运算来说，实数集关于极限运算是封闭的．这个性质就是实数集的连续性．实数集的连续性是实数集有别于有理数集的重要特征，是实数集的优点．因此，将极限理论建立在实数集之上，极限理论就有了巩固的基础．描述实数集的连续性有多种不同的方法．本章是在§2.2公理的基础上，证明与公理等价的其它几个关于实数集连续性的定理．

§4.1　实数连续性定理

一、闭区间套定理

定理 1. （闭区间套定理）　设有闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$．若

1) $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$,

则存在唯一数l属于所有的闭区间（即$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=l$），且

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=l.$$

证明 由条件 1)，数列$\{a_n\}$单调增加有上界 b_1，数列$\{b_n\}$单调减少有下界 a_1，即

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots\leqslant b_n\leqslant\cdots\leqslant b_2\leqslant b_1.$$

根据公理，数列$\{a_n\}$收敛，设 $\lim_{n\to\infty}a_n=l$. 由条件 2)，有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}b_n&=\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n+a_n)\\&=\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)+\lim_{n\to\infty}a_n=0+l=l.\end{aligned}$$

于是，
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=l.$$

对任意取定的 $k\in\mathbf{N}$，$\forall n>k$，有 $a_k\leqslant a_n<b_n\leqslant b_k$. 从而

$$a_k\leqslant\lim_{n\to\infty}a_n=l=\lim_{n\to\infty}b_n\leqslant b_k,$$

或 $a_k\leqslant l\leqslant b_k$，即 l 属于所有的闭区间.

证明 l 唯一性. 假设还有一个 l' 也属于所有的闭区间，从而 $\forall n\in\mathbf{N}$，有 $l,l'\in[a_n,b_n]$，有

$$|l-l'|\leqslant b_n-a_n.$$

由条件 2)，有 $l=l'$，即 l 是唯一的. □

闭区间套定理的几何意义是，有一列闭线段(两个端点也属于此线段)，后者被包含在前者之中，并且这些闭线段的长构成的数列以 0 为极限，则这一列闭线段存在唯一一个公共点. 如图 4.1.

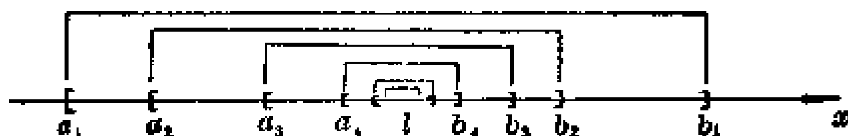


图 4.1

一般来说，将闭区间列换成开区间列，区间套定理不一定成立. 例如，开区间列$\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}$，显然满足两条:

1) $(0,1)\supset\left(0,\frac{1}{2}\right)\supset\cdots\supset\left(0,\frac{1}{n}\right)\supset\cdots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-0\right)=0$.

但是,不存在数 l 属于所有的开区间.

在什么情况下应用闭区间套定理呢?一般来说,证明问题需要找到具有某种性质 P 的一个数,常常应用闭区间套定理将这个数"套"出来. 怎样应用闭区间套定理呢?首先构造一个具有性质 P^* 的闭区间,性质 P^* 要根据性质 P 来定.其次,通常采用二等分法,将此闭区间二等分,至少有一个闭区间具有性质 P^*. 然后继续使用二等分法,得到满足闭区间套定理条件的和具有性质 P^* 的闭区间列. 根据闭区间套定理,就得到唯一一个具有性质 P 的数.见本节定理 2、定理 3 和 § 4.2 定理 3 的证明.

二、确界定理

如果非空数集 E 有上界,则它有无限多个上界.在这无限多个上界之中,有一个上界 β 与数集 E 有一种特殊的关系.

定义. 设 E 是非空数集. 若 $\exists\beta\in\mathbf{R}$,且

1) $\forall x\in E$,有 $x\leqslant\beta$;

2) $\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0\in E$,有 $\beta-\varepsilon<x_0$,

则称 β 是数集 E 的**上确界**,表为

$$\beta=\sup E①.$$

不难看到:1) 表明 β 是数集 E 的上界;2) 表明小于 β 的任意数 $\beta-\varepsilon$ 都不是 E 的上界,即 E 的上确界 β 是数集 E 的最小的上界. 类似地有:

定义. 设 E 是非空数集. 若 $\exists\alpha\in\mathbf{R}$,且

---

① "sup"是 supremum(上确界)的缩写.

1) $\forall x \in E$, 有 $\alpha \leqslant x$;

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in E$, 有 $x_0 < \alpha + \varepsilon$,

则称 α 是数集 E 的**下确界**, 表为

$$\alpha = \inf E①.$$

同样不难看到: 1) 表明 α 是数集 E 的下界; 2) 表明大于 α 的任意数 $\alpha+\varepsilon$ 都不是 E 的下界, 即 E 的下确界 α 是数集 E 的最大的下界.

例如, $\sup\left\{\frac{n}{n+1}\middle|\ n\in\mathrm{N}\right\}=1$, $\quad \inf\left\{\frac{n}{n+1}\middle|\ n\in\mathrm{N}\right\}=\frac{1}{2}$.

事实上, 1) $\forall n \in \mathrm{N}$, 有 $\frac{n}{n+1}<1$;

2) $\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathrm{N}$, 有 $1-\varepsilon<\frac{n_0}{1+n_0}\left(\text{只须 } n_0>\frac{1}{\varepsilon}-1 \text{ 即可}\right)$,

即
$$\sup\left\{\frac{n}{n+1}\middle|\ n\in\mathrm{N}\right\}=1.$$

1) $\forall n \in \mathrm{N}$, 有 $\frac{1}{2} \leqslant \frac{n}{n+1}$;

2) $\forall \varepsilon>0, \exists n_0=1$, 有 $\frac{n_0}{n_0+1}=\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\varepsilon$,

即
$$\inf\left\{\frac{n}{n+1}\middle|\ n\in\mathrm{N}\right\}=\frac{1}{2}.$$

例如, $\sup\{1,2,3,4\}=4$, $\quad \inf\{1,2,3,4\}=1$.

事实上, 1) $\forall k \in\{1,2,3,4\}$, 有 $k \leqslant 4$;

2) $\forall \varepsilon>0, \exists 4 \in\{1,2,3,4\}$, 有 $4-\varepsilon<4$,

即
$$\sup\{1,2,3,4\}=4.$$

1) $\forall k \in\{1,2,3,4\}$, 有 $1 \leqslant k$;

2) $\forall \varepsilon>0, \exists 1 \in\{1,2,3,4\}$, 有 $1<1+\varepsilon$,

即
$$\inf\{1,2,3,4\}=1.$$

---

① "inf"是 infimum (下确界) 的缩写.

再例如，$\sup(-\infty,b]=b$，　$\inf(a,+\infty)=a$.

事实上，1) $\forall x\in(-\infty,b]$，有 $x\leqslant b$；

2) $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in(-\infty,b]$，有 $b-\varepsilon<x_0$，

即
$$\sup(-\infty,b]=b.$$

1) $\forall x\in(a,+\infty)$，有 $a<x$；

2) $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in(a,+\infty)$，有 $x_0<a+\varepsilon$，

即
$$\inf(a,+\infty)=a.$$

由上述三例可见，有限数集必存在上、下确界，它的上、下确界分别就是有限数集的最大数和最小数．若无限数集存在上(下)确界，它的上(下)确界可能属于该数集(例如，$\sup(-\infty,b]=b$)也可能不属于该数集$\left(\text{例如，}\sup\left\{\frac{n}{n+1}\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}=1\right)$．无上(下)界的数集不存在上(下)确界．那么有上(下)界的数集是否一定存在上(下)确界呢？有下面的定理：

定理 2.（确界定理）　若非空数集 E 有上界（下界），则数集 E 存在唯一的上确界(下确界)．

证法　这里只给出存在上确界的证明．证明存在上确界，首先要找到上确界这个数 β．用什么方法找 β 呢？我们根据已知的条件构造一个闭区间套．应用闭区间套定理，将(上确界) β"套"出来．其次证明 β 就是数集 E 的上确界．最后证明上确界 β 的唯一性．

证明　已知数集 E 非空，设 $a_1\in E$．又已知数集 E 有上界，设 b_1 是 E 的一个上界．显然，$a_1\leqslant b_1$，不妨设 $a_1<b_1$．闭区间 $[a_1,b_1]$ 具有如下性质：

1. $[a_1,b_1]$ 的右侧没有数集 E 的点(因为 b_1 是数集 E 的上界)；

2. $[a_1,b_1]$ 中至少包含有数集 E 的一个点(因为 $a_1\in E$)．

将具有性质 1,2 的闭区间称为具有 P^* 的闭区间．

将闭区间$[a,b]$二等分，所得的两个闭区间$\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right]$与$\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$中必有一个是具有$P^*$的闭区间.

事实上，已知$\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$具有性质1，如果$\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$中至少包含数集$E$的一个点，则$\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$就是具有$P^*$的闭区间. 如果$\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$不包含有数集$E$的点，那么$\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right]$的右侧没有数集$E$的点，即$\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right]$具有性质1，已知$\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right]$具有性质2(因为$a_1\in E$)，则$\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right]$就是具有$P^*$的闭区间. 将$\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right]$与$\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$中具有$P^*$的闭区间表为$[a_2,b_2]$.

同样方法，将闭区间$[a_2,b_2]$二等分，必有一个闭区间是具有P^*的闭区间，表为$[a_3,b_3]$，用二等分法无限进行下去，得到闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$，且

1) $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}=0.$

每个$[a_n,b_n]$都是具有P^*的闭区间. 根据闭区间套定理，存在唯一一个数β属于所有的闭区间$[a_n,b_n]$，且

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\beta.$$

下面证明，数β就是数集E的上确界.

1) $\forall x\in E$，有$x\leqslant\beta$. 用反证法，假设$\exists x_0\in E$，有$\beta<x_0$. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta<x_0$. 根据§2.2定理3的推论2，$\exists m\in\mathbf{N}$，使$b_m<x_0$，即闭区间$[a_m,b_m]$右侧有数集$E$的数$x_0$，与$[a_m,b_m]$具有性质1矛盾.

2) $\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0\in E$, 有 $\beta-\varepsilon<x_0$. 事实上, 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\beta>\beta-\varepsilon$. 根据 § 2.2 定理 3 的推论 2, $\exists m\in\mathbf{N}$, 使 $\beta-\varepsilon<a_m$, 即 $\beta-\varepsilon$ 位于闭区间 $[a_m,b_m]$ 的左侧. 由性质 2, 在 $[a_m,b_m]$ 中, $\exists x_0\in E$, 有 $\beta-\varepsilon<x_0$.

于是, 数 β 是数集 E 的上确界, 即 $\beta=\sup E$.

最后, 证明上确界 β 的唯一性. 用反证法. 假设除 β 外尚有 $\beta'=\sup E$, 且 $\beta\neq\beta'$. 不妨设 $\beta<\beta'$.

一方面, 已知 $\beta=\sup E$, 即 $\forall x\in E$, 有 $x\leqslant\beta$; 另一方面, 已知 $\beta'=\sup E$, 即 $\exists\varepsilon_0=\beta'-\beta>0$, $\exists x_0\in E$, 有 $\beta'-\varepsilon_0=\beta<x_0$. 得到矛盾. 于是, 上确界 β 唯一. □

在什么情况下应用确界定理呢? 一般来说, 在一个有界数集上要想找到与该数集有特殊关系的数(最大的下界或最小的上界), 要使用确界定理, 其作用类似闭区间套定理. 见 § 4.2 定理 2 的证明.

三、有限覆盖定理

设 I 是一个区间(或开或闭), 并有开区间集 S(S 的元素都是开区间, 开区间的个数可有限, 也可无限).

定义 若 $\forall x\in I$, $\exists\Delta\in S$, 有 $x\in\Delta$, 则称开区间集 S 覆盖区间 I.

例如, 设 $I=(0,1)$, $S=\left\{\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)\middle|\, n=1,2,3,\cdots\right\}$, 则开区间集 S 没有覆盖区间 I. 事实上, $\forall n\in\mathbf{N}$, 且 $n>1$, $\frac{1}{n}\in(0,1)$, 但是 $\frac{1}{n}$ 不属于 S 中任何开区间.

设 $I=(0,1)$, $S=\left\{\left(\frac{1}{n+1},1\right)\middle|\, n=1,2,3,\cdots\right\}$, 则 S 覆盖区间 I. 事实上, $\forall x\in(0,1)$, 只要自然数 m 充分大, 有 $\frac{1}{m+1}<x$, 即

$x\in\left(\frac{1}{m+1},1\right)$.

设 $I=[a,b]$，$S=\{(x-\delta_x,x+\delta_x)\mid x\in[a,b],\delta_x>0\}$，则 S 覆盖了区间 $I=[a,b]$. 事实上，$\forall x\in[a,b]$，S 中存在一个区间 $(x-\delta_x,x+\delta_x)$，有 $x\in(x-\delta_x,x+\delta_x)$.

定理 3. （有限覆盖定理） 若开区间集 S 覆盖闭区间 $[a,b]$，则 S 中存在有限个开区间也覆盖了闭区间 $[a,b]$.

证明 用反证法. 假设 S 中任意有限个开区间都不能覆盖闭区间 $[a,b]$，简称 $[a,b]$ 没有有限覆盖. 将闭区间 $[a,b]$ 二等分，分成两个闭区间 $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ 与 $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$，这两个闭区间必至少有一个没有有限覆盖. 这是因为，如果这两个闭区间都有有限覆盖，则整个闭区间 $[a,b]$ 必有有限覆盖，这与 $[a,b]$ 没有有限覆盖矛盾. 将 $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ 与 $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ 之中没有有限覆盖的表为 $[a_1,b_1]$（如果二者都没有有限覆盖，则任取其一）.

用同样的方法将闭区间 $[a_1,b_1]$ 二等分，二者中必至少有一个闭区间没有有限覆盖，表为 $[a_2,b_2]$. 用二等分方法无限进行下去，得到闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ $(a_0=a,b_0=b)$，具有如下的性质：

1) $[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}=0$.

每个闭区间 $[a_n,b_n]$ 都没有有限覆盖. 根据闭区间套定理（定理 1），存在唯一数 α 属于所有闭区间，且

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha. \tag{1}$$

显然，$\alpha\in[a,b]$. 已知开区间集 S 覆盖闭区间 $[a,b]$，从而，S 中必至少存在一个开区间 (p,q)，有 $\alpha\in(p,q)$ 或 $p<\alpha<q$.

根据极限保序性，由(1)式，当 n 充分大时，有 $[a_n,b_n]\subset(p,q)$，即

$$p<a_n\leqslant\alpha\leqslant b_n<q.$$

一方面，闭区间$[a_n, b_n]$没有有限覆盖；另一方面，闭区间$[a_n, b_n]$用S中一个开区间(p, q)就覆盖了，产生矛盾. 这个矛盾是由于最初假设闭区间$[a, b]$没有有限覆盖产生的. 于是，S中存在有限个开区间覆盖闭区间$[a, b]$. □

有限覆盖定理亦称为紧致性定理或海涅—波莱尔[①]定理.

在有限覆盖定理中，将被覆盖的闭区间$[a, b]$改为开区间(a, b)，定理不一定成立. 例如，开区间集$\left\{\left(\frac{1}{n+1}, 1\right)\middle| n=1, 2, \cdots\right\}$覆盖开区间$(0, 1)$. 但是，$S$中任意有限个开区间都不能覆盖开区间$(0, 1)$.

在什么情况应用有限覆盖定理呢？一般来说，如果我们已知在闭区间$[a, b]$每一点的某个邻域内都具有性质P，每一点的邻域（开区间）集覆盖$[a, b]$. 为了将性质P扩充到整个闭区间$[a, b]$，这时用有限覆盖定理能将覆盖$[a, b]$的无限个邻域转化为有限个邻域. 总之，要想将闭区间每一点的局部性质扩充到整个闭区间，常常要用有限覆盖定理. 见定理4和§4.2定理1的证明.

四、聚点定理

首先给出聚点概念.

定义 设E是数轴上的无限点集，ξ是数轴上的一个定点（可以属于E，也可以不属于E）. 若$\forall\varepsilon>0$，点ξ的ε邻域$U(\xi, \varepsilon)$都含有E的无限多个点，则称ξ是E的一个聚点.

例如，设$E=\left\{\frac{1}{n}\middle| n\in\mathbf{N}\right\}$. 显然，0是$E$的一个聚点，且聚点0不属于$E$.

例如，设$E=\{$开区间(a, b)的一切有理点$\}$. 则闭区间$[a, b]$

---

① 波莱尔（Borel 1871—1956）法国数学家.

的每一个点都是 E 的聚点. 因为有理点在数轴上是稠密的，所以 $\forall \xi \in [a,b]$，点 ξ 的任意 ε 邻域 $U(\xi,\varepsilon)$ 都含有开区间 (a,b) 的无限多个有理点.

再例如，设 $E=\{n \mid n\in \mathbf{N}\}$，则无限点集 E 没有聚点.

不难证明：

ξ 是 E 的聚点 $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists x\in E$，有 $x\in \mathring{U}(\xi,\varepsilon)$.

作为练习题，读者自证.

定理4. (聚点定理)数轴上有界无限点集 E 至少有一个聚点.

证法　应用反证法和有限覆盖定理.

证明　已知无限点集 E 有界，设 a 和 b 分别是 E 的下界和上界，从而，有 $E\subset[a,b]$. 假设结论不成立，即闭区间 $[a,b]$ 的任意一点都不是 E 的聚点. $\forall x\in[a,b]$，因为 x 不是 E 的聚点，所以 $\exists \varepsilon_x>0$，使 $U(x,\varepsilon_x)$ 中只含有 E 的有限多个点(也可能没有 E 的点). 这样，构造了开区间集

$$S=\{U(x,\varepsilon_x) \mid x\in[a,b]\}.$$

显然，开区间集 S 覆盖闭区间 $[a,b]$，根据有限覆盖定理(定理3)，S 中存在有限个开区间，设有 n 个开区间(邻域)

$$U(x_1,\varepsilon_{x_1}), U(x_2,\varepsilon_{x_2}), \cdots, U(x_n,\varepsilon_{x_n})$$

也覆盖闭区间 $[a,b]$，当然也覆盖无限点集 E. 因为每一个开区间(邻域)只含有 E 的有限多个点，所以这 n 个开区间也只含有 E 的有限多个点. 与 E 是无限点集矛盾. 于是，E 至少有一个聚点. □

在什么情况下应用聚点定理？以及怎样应用聚点定理？请见下面定理的证明：

五、致密性定理

定理 5. (致密性定理)有界数列 $\{a_n\}$ 必有收敛的子数列 $\{a_{n_k}\}$.

证明 若数列$\{a_n\}$有无限多项相等,设

$$a_{n_1}=a_{n_2}=\cdots=a_{n_k}=\cdots.$$

显然,常数数列$\{a_{n_k}\}$是收敛的子数列.

若数列$\{a_n\}$没有无限多项相等,则有有界无限点集

$$E=\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}.$$

根据聚点定理(定理 4),E 至少有一个聚点 ξ. 下面证明:存在子数列$\{a_{n_k}\}$收敛于 ξ. 根据聚点定义,

取 $\varepsilon=1$, $\exists a_{n_1}\in U(\xi,1)$.

取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$, $\exists a_{n_2}\in U\left(\xi,\frac{1}{2}\right)$, 要求 $n_1<n_2$.

… …

取 $\varepsilon=\frac{1}{k}$, $\exists a_{n_k}\in U\left(\xi,\frac{1}{k}\right)$, 要求 $n_{k-1}<n_k$.

… …

如此无限进行下去,构造了数列$\{a_n\}$的子数列$\{a_{n_k}\}$.

因为 $\forall k\in\mathbb{N}$,有

$$|a_{n_k}-\xi|<\frac{1}{k}.$$

当 $k\to\infty$ 时,有$\frac{1}{k}\to 0$. 所以 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=\xi$,即子数列$\{a_{n_k}\}$收敛. □

在什么情况下应用致密性定理?以及怎样应用致密性定理?请见下面定理的证明:

六、柯西收敛准则

我们已给出数列的柯西收敛准则(§2.2.定理 8). 在那里仅

证明了它的必要性，现在补充证明它的充分性.

定理6. (柯西收敛准则) 数列$\{a_n\}$收敛$\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}, \forall n,m>N, 有 |a_n-a_m|<\varepsilon.$$

证明 **必要性**($\Longrightarrow$)已证.

充分性($\Longleftarrow$)首先证明数列$\{a_n\}$有界.

取 $\varepsilon=1$, $\exists N_1\in\mathbf{N}$, $\forall n>N_1$, 和 $m_0>N_1$, 有 $|a_n-a_{m_0}|<1$. 从而，$\forall n>N_1$，有

$$|a_n|=|a_n-a_{m_0}+a_{m_0}|\leqslant|a_n-a_{m_0}|+|a_{m_0}|<1+|a_{m_0}|.$$

取 $$M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_{N_1}|,1+|a_{m_0}|\}.$$

于是，$\forall n\in\mathbf{N}$，有$|a_n|\leqslant M$，即数列$\{a_n\}$有界.

根据致密性定理(定理 5)，数列$\{a_n\}$ 存在一个收敛的子数列$\{a_{n_k}\}$，设 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=a$.

其次证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

已知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}$, $\forall n,m>N$, 有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$.

又已知 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=a$，即

对上述同样 $\varepsilon>0$, $\exists k\in\mathbf{N}$, $\forall n_k>k$, 有 $|a_{n_k}-a|<\varepsilon$.

取 $L=\max\{N,k\}$. 从而，$\forall n>L$, $\exists n_k>L$, 同时有

$$|a_n-a_{n_k}|<\varepsilon \quad 与 \quad |a_{n_k}-a|<\varepsilon.$$

于是，$|a_n-a|\leqslant|a_n-a_{n_k}|+|a_{n_k}-a|<2\varepsilon$,

即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 或数列$\{a_n\}$收敛. □

柯西收敛准则亦称完备性定理.

闭区间套定理、确界定理、有限覆盖定理、聚点定理、致密性定理、柯西收敛准则的充分条件以及公理(定理 1～6 和 §2.2 公理)，虽然它们的数学形式不同，但是它们都是描述了实数集的连续性. 它们是彼此等价的，即任意一个定理都是其它定理成立的必要充分条件.

练习题 4.1

1. 指出下列数集的上确界与下确界(如果存在)，并验证之:

(1) $\{-10,-2,0,5,8\}$，　　(2) $\left\{(-1)^n\frac{1}{2^n}\mid n=1,2,\cdots\right\}$，

(3) $\left\{1+\frac{4}{n}\mid n=1,2,\cdots\right\}$，　　(4) $\left\{(-1)^{n+1}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\mid n=1,2,\cdots\right\}$，

(5) $\{x\mid x$ 是有理数, $x^2<2\}$，　　(6) $\{x^2\mid -1<x\leqslant 2\}$，

(7) $\{e^x\mid x\in\mathbf{R}\}$，　　(8) $\{\sin x\mid x\in(0,2\pi]\}$.

2. 指出第1题的各点集的聚点集.

3. 证明：若数集 E 有最大数 a，即 $\forall x\in E$，有 $x\leqslant a$，则 $\sup E=a$.

4. 证明：若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则数集 $\{x_n\mid n=1,2,\cdots\}$ 存在上确界与下确界.

5. 证明：若 A 是非空有界数集，$\sup A=a$(或 $\inf A=b$)，且 $-A=\{-x\mid x\in A\}$，则 $\inf(-A)=-a$(或 $\sup(-A)=-b$).

6. 证明：若数集 E 有下界，则数集 E 必有下确界.

7. 证明：若 A 与 B 是两个非空数集，且 $\forall x\in A$ 与 $\forall y\in B$，有 $x\leqslant y$，则

$$\sup A\leqslant\inf B.$$

8. 证明：若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 单调增加，且 $\forall x\in(a,b)$，有 $f(x)\leqslant M$(其中 M 是常数)，则 $\exists c\leqslant M$，使

$$\lim_{x\to b^-}f(x)=c.$$

9. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)>0$，则 $\exists r>0$，$\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)>r$.（提示：可应用闭区间连续函数取最小值，也可应用有限覆盖定理）

10. 证明：ξ 是 E 的聚点 $\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists x\in E$，有 $x\in\mathring{U}(\xi,\varepsilon)$.

*　　*　　*　　*

11. 证明：若 E 是非空有上界数集，设 $\sup E=a$，且 $a\notin E$，则存在数列 $\{x_n\}$，$x_n\in E$，$x_n<x_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

12. 证明：若 A 与 B 是两个非空数集，$A+B=\{x+y\mid x\in A,y\in B\}$，则

$$\sup(A+B)=\sup A+\sup B.$$

13. 证明：　　$\sup\{a_n+b_n\}\leqslant\sup\{a_n\}+\sup\{b_n\}$.

$$\inf\{a_n+b_n\}\geqslant\inf\{a_n\}+\inf\{b_n\}.$$

14. 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$, $0<x\leqslant 1$, $\forall a\in(0,1]$, 都存在开区间 I_a, 当 $\forall x\in I_a$, 有 $|f(x)-f(a)|<\frac{1}{3}$, 则开区间集 $\{I_a|a\in(0,1]\}$ 覆盖 $(0,1]$, 但是没有有限个 I_a 覆盖 $(0,1]$.

15. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且零点集

$$G=\{x|f(x)=0\}\neq\phi,$$

则 $\sup G\in G$, $\inf G\in G$.

16. 用闭区间套定理证明聚点定理.

§4.2 闭区间连续函数性质的证明

一、性质的证明

§3.2 给出了闭区间连续函数的三个性质：有界性、最值性和零点定理，没有给予证明. 本节除给出这三个性质的证明外，还要引入一个新概念——一致连续，并证明闭区间的连续函数必是一致连续(第四个性质). 这四个性质都是建立在实数连续性的基础之上. 因此，它们的证明要应用 §4.1 中描述实数集连续性的定理.

定理 1. (有界性) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 有界，即 $\exists M>0$, $\forall x\in[a,b]$, 有

$$|f(x)|\leqslant M.$$

证法 由已知条件得到函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的每一点的某个邻域有界. 要将函数 $f(x)$ 在每一点的邻域有界扩充到在闭区间 $[a,b]$ 有界，可应用有限覆盖定理，从而能找到 $M>0$.

证明 已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，根据连续定义，

$\forall\alpha\in[a,b]$, 取 $\varepsilon_0=1$, $\exists\delta_\alpha>0$, $\forall x\in(\alpha-\delta_\alpha,\alpha+\delta_\alpha)\cap[a,b]$ 有

$$|f(x)-f(\alpha)|<1.$$

从而，$\forall x\in(\alpha-\delta_\alpha,\alpha+\delta_\alpha)\cap[a,b]$有

$$|f(x)|\leqslant|f(x)-f(\alpha)|+|f(\alpha)|<|f(\alpha)|+1,$$

即 $\forall \alpha\in[a,b]$，函数 $f(x)$在开区间$(\alpha-\delta_\alpha,\alpha+\delta_\alpha)$有界. 显然，开区间集

$$\{(\alpha-\delta_\alpha;\alpha+\delta_\alpha)\mid\alpha\in[a,b]\}$$

覆盖闭区间$[a,b]$. 根据有限覆盖定理(§4.1.定理3)，存在有限个开区间

$$\{(\alpha-\delta_{\alpha_k},\alpha+\delta_{\alpha_k})\mid\alpha_k\in[a,b],k=1,2,\cdots,n\}$$

也覆盖闭区间$[a,b]$，且

$$\forall x\in(\alpha_k-\delta_{\alpha_k},\alpha_k+\delta_{\alpha_k})\cap[a,b],\text{有}|f(x)|\leqslant|f(\alpha_k)|+1,$$
$$k=1,2\cdots,n.$$

取 $M=\max\{|f(\alpha_1)|,|f(\alpha_2)|,\cdots,|f(\alpha_n)|\}+1$. 于是，$\forall x\in[a,b],\exists i\in\{1,2,\cdots,n\}$，且 $x\in(\alpha_i-\delta_{\alpha_i},\alpha_i+\delta_{\alpha_i})\cap[a,b]$，有

$$|f(x)|\leqslant|f(\alpha_i)|+1\leqslant M.\ \square$$

定理 2. (最值性) 若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$连续，则函数 $f(x)$在$[a,b]$ 取到最小值 m 与最大值 M，即在$[a,b]$上存在 x_1 与 x_2，使

$$f(x_1)=m \quad 与 \quad f(x_2)=M,$$

且 $\forall x\in[a,b]$，有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$.

证法 只给出取到最大值的证明. 根据定理 1，函数 $f(x)$在$[a,b]$有界. 设 $\sup\{f(x)\mid x\in[a,b]\}=M$. 只须证明，$\exists x_2\in[a,b]$，使 $f(x_2)=M$，即函数 $f(x)$在 x_2 取到最大值.

证明 设 $\sup\{f(x)\mid x\in[a,b]\}=M$. 用反证法. 假设$\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)<M$. 显然，函数 $M-f(x)$在$[a,b]$连续，且 $M-f(x)>0$. 于是，函数

$$\frac{1}{M-f(x)}$$

在$[a,b]$也连续. 根据定理 1,存在 $C>0$, $\forall x\in[a,b]$,有

$$\frac{1}{M-f(x)}<C \quad 或 \quad f(x)<M-\frac{1}{C},$$

即M不是数集 $\{f(x)|x\in[a,b]\}$的上确界，矛盾. 于是$\exists x_2\in[a,b]$, 使 $f(x_2)=M$. □

定理 3. (零点定理) 若函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$连续，且 $f(a)f(b)<0$(即 $f(a)$与 $f(b)$异号)，则在区间(a,b) 内至少存在一点c,使

$$f(c)=0.$$

证明 不妨设 $f(a)<0, f(b)>0$. 用反证法. 假设 $\forall x\in[a,b]$, 有 $f(x)\neq 0$. 将闭区间 $[a,b]$ 二等分，分点是 $\frac{a+b}{2}$. 已知 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$, 如果 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$, 则函数 $f(x)$在闭区间 $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$的两个端点的函数值的符号相反；如果 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$, 则函数$f(x)$在闭区间$\left[\frac{a+b}{2},b\right]$的两个端点的函数值的符号相反. 于是，两个闭区间$\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$与$\left[\frac{a+b}{2},b\right]$必有一个使函数 $f(x)$ 在其两个端点的函数值的符号相反. 将此闭区间表为$[a_1,b_1]$,有 $f(a_1)f(b_1)<0$.

再将$[a_1,b_1]$二等分，必有一个闭区间，函数 $f(x)$在其两个端点的函数值符号相反. 将此闭区间表为$[a_2,b_2]$,有 $f(a_2)f(b_2)<0$. 用二等分方法无限进行下去，得到闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ $(a_0=a, b_0=b)$,且

1) $[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}=0$.

对每个闭区间$[a_n,b_n]$，有$f(a_n)f(b_n)<0$. 根据闭区间套定理(§4.1定理 1)，存在唯一数 c 属于所有的闭区间，且

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=c. \tag{1}$$

而 $c\in[a,b]$，且 $f(c)\neq0$，设 $f(c)>0$. 一方面，已知函数 $f(x)$在 c 连续，根据连续函数的保号性，$\exists\delta>0$，$\forall x$：$|x-c|<\delta$，即 $\forall x\in(c-\delta,c+\delta)$，有 $f(x)>0$；另一方面，由(1)式，当 n 充分大时，有$[a_n,b_n]\subset(c-\delta,c+\delta)$. 已知$f(a_n)f(b_n)<0$，即函数$f(x)$在$(c-\delta,c+\delta)$ 中某点的函数值小于 0，矛盾. 于是，$f(c)\not>0$. 同法可证$f(c)\not<0$. 所以闭区间$[a,b]$内至少存在一点 c，使 $f(c)=0$. □

二、一致连续性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 连续. $\forall\alpha\in I$ 函数 $f(x)$ 在 α 连续. 根据连续定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$（满足连续定义的 δ 有无限多，取较大者），$\forall x$：$|x-\alpha|<\delta$，有$|f(x)-f(\alpha)|<\varepsilon$.

从连续定义不难看到，δ 的大小，一方面与给定的 ε 有关；另一方面与点 α 的位置也有关，也就是，当 ε 暂时固定时，因点 α 位置的不同，δ 的大小也在变化. 如图 4.2，当 ε 暂时固定时，在点 α 附近，函数图象变化比较“慢”，对应的 δ 较大；在点 β 附近，函数图

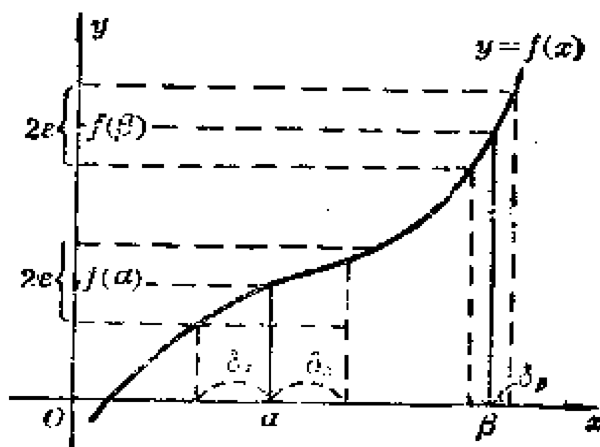


图 4.2

象变化比较“快”，对应的 δ 较小．于是，当 ε 暂时固定时，$\forall\alpha\in I$，$\exists\delta_\alpha>0$，$\forall x$：$|x-\alpha|<\delta_\alpha$，有

$$|f(x)-f(\alpha)|<\varepsilon.$$

无限多个 α，存在无限多个 $\delta_\alpha>0$，那么在无限多个 δ_α 中是否存在最小的正数 δ 呢？换句话说，对无限多个 α 是否存在一个通用的 $\delta>0$（即 $\forall\alpha\in I$，$\forall x$：$|x-\alpha|<\delta$，有 $|f(x)-f(\alpha)|<\varepsilon$）呢？事实上，在区间上的连续函数中，有的不存在通用的 δ，有的存在通用的 δ.

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I① 上有定义．若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x_1,x_2\in I$：$|x_1-x_2|<\delta$，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

称函数 $f(x)$ 在 I **一致连续**（**或均匀连续**）．

根据一致连续定义，若函数 $f(x)$ 在 I 一致连续，则函数 $f(x)$ 在 I 必连续．事实上，将 x_1 固定，令 x_2 变化，即函数 $f(x)$ 在 x_1 连续．因为 x_1 是 I 的任意一点，所以函数 $f(x)$ 在 I 连续．

一致连续的否定就是非一致连续．现将一致连续与非一致连续列表对比如下：函数 $f(x)$ 在区间 I

一致连续	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x_1,x_2\in I$：$\lvert x_1-x_2\rvert<\delta$，有 $\lvert f(x_1)-f(x_2)\rvert<\varepsilon$
非一致连续	$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x_1,x_2\in I$：$\lvert x_1-x_2\rvert<\delta$，有 $\lvert f(x_1)-f(x_2)\rvert\geqslant\varepsilon_0$

例 1. 证明，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[a,1]$ $(0<a<1)$ 一致连续，在 $(0,1]$ 非一致连续．

证明 $\forall\varepsilon>0$，$\forall x_1,x_2\in[a,1]$，要使不等式

$$\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|=\frac{|x_1-x_2|}{|x_1x_2|}\leqslant\frac{1}{a^2}|x_1-x_2|<\varepsilon$$

成立．从不等式 $\dfrac{1}{a^2}|x_1-x_2|<\varepsilon$，解得 $|x_1-x_2|<a^2\varepsilon$．取 $\delta=a^2\varepsilon$.

① 区间 I 可以是开区间、闭区间、半开区间或无穷区间．

于是,

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta=a^2\varepsilon>0, \forall x_1, x_2\in[a,1]: |x_1-x_2|<\delta, \text{ 有}$$

$$\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|<\varepsilon,$$

即函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在$[a,1]$一致连续.

$$\exists \varepsilon_0=\frac{1}{2}>0,\ \forall \delta>0\left(\exists n>\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right),\ \forall \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\in(0,1]:$$

$$\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}<\delta, \qquad \left(n>\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)$$

有
$$\left|f\left(\frac{1}{n+1}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=n+1-n=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

即函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在$(0,1]$非一致连续.

例 2. 证明: 函数 $f(x)=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 一致连续.

证明 $\forall \varepsilon>0, \forall x_1, x_2\in\mathbf{R}$, 要使不等式

$$|\sin x_1-\sin x_2|=2\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|\leqslant|x_1-x_2|<\varepsilon$$

成立. 取 $\delta=\varepsilon$. 于是,

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta=\varepsilon>0, \forall x_1, x_2\in\mathbf{R}: |x_1-x_2|<\delta, \text{ 有}$$

$$|\sin x_1-\sin x_2|<\varepsilon,$$

即函数 $f(x)=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 一致连续.

定理 4. (一致连续性) 若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$连续, 则函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$一致连续.

证法 应用反证法与致密性定理.

证明 假设函数 $f(x)$在$[a,b]$非一致连续, 即

$$\exists \varepsilon_0>0, \forall \delta>0, \exists x', x''\in[a,b]: |x'-x''|<\delta, \text{有}$$

$$|f(x')-f(x'')|\geqslant\varepsilon_0.$$

取 $\delta=1$, $\exists x_1', x_1''\in[a,b]$: $|x_1'-x_1''|<1$, 有

$$|f(x_1')-f(x_1'')|\geqslant\varepsilon_0.$$

$\delta=\frac{1}{2}$, $\exists x_2', x_2''\in[a,b]$: $|x_2'-x_2''|<\frac{1}{2}$, 有

$$|f(x_2')-f(x_2'')|\geqslant\varepsilon_0.$$

…

$\delta=\frac{1}{n}$, $\exists x_n', x_n''\in[a,b]$: $|x_n'-x_n''|<\frac{1}{n}$, 有

$$|f(x_n')-f(x_n'')|\geqslant\varepsilon_0.$$

…

这样在闭区间$[a,b]$内构造两个数列$\{x_n'\}$与$\{x_n''\}$.

根据致密性定理（§4.1 定理 5），数列$\{x_n'\}$存在收敛的子数列$\{x_{n_k}'\}$，设$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}'=\xi\in[a, b]$. 因为$|x_{n_k}'-x_{n_k}''|<\frac{1}{n_k}$, 所以，也有

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}''=\xi.$$

一方面，已知函数 $f(x)$在ξ连续，有

$$\lim_{k\to\infty}|f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')|=|f(\xi)-f(\xi)|=0,$$

即当k充分大时，有 $|f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')|<\varepsilon_0$.

另一方面，$\forall k\in\mathbb{N}$, 有 $|f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')|\geqslant\varepsilon_0$.

矛盾，即函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$一致连续. □

练习题 4.2

1. 证明：若函数 $f(x)$在$[a,b]$连续，则函数 $f(x)$在$[a,b]$取到最小值.
2. 证明：若函数 $f(x)$在$[a,b]$连续，单调增加，且 $f(a)<f(b)$，则
$$\{y\mid y=f(x), x\in[a,b]\}=[f(a), f(b)].$$
3. 证明：(1) $f(x)=x^2$ 在$(-1,1)$一致连续，在 $\mathbb{R}$ 非一致连续.

(2) $f(x)=x+\sin x$ 在R一致连续.

(3) $f(x)=\sqrt{x}$ 在$[1,+\infty)$一致连续.

4. 证明：若函数 $f(x)$ 在区间 I 满足李普希茨[①]条件，即 $\forall x,y\in I$，有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant K|x-y|,$$

其中K是常数，则 $f(x)$ 在 I 一致连续.

5. 证明：若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 I 一致连续，则函数 $f(x)+g(x)$ 在区间 I 也一致连续。

6. 证明：函数 $f(x)$ 在开区间 $(a,\ b)$ 一致连续$\Longleftrightarrow$函数 $f(x)$ 在开区间 $(a,\ b)$ 连续，且 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 都存在.（提示：必要性要用柯西收敛准则）

7. 证明：函数 $f(x)$ 在区间 I 一致连续$\Longleftrightarrow$对区间 I 上任意两个数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$，当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0$.

并证明函数 $f(x)=e^x$ 在R非一致连续.

8. 证明：若函数 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$，则函数 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$一致连续.

9. 应用一致连续定义证明：若函数 $f(x)$ 在$[a,\ b]$与$[b,c]$一致连续，则函数 $f(x)$ 在$[a,c]$一致连续.

10. 证明：若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$连续，则 $\forall\varepsilon>0$，可将$[a,b]$分成有限个小区间：

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n],\quad x_0=a,x_n=b,$$

使 $\forall x_i',x_i''\in[x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,\cdots,n$，有

$$|f(x_i')-f(x_i'')|<\varepsilon.$$

* * * *

11. 应用一致连续定义证明：多项式 $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，在任意有限区间$[a,b]$一致连续，其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是常数.

12. 证明：若函数 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[bx-f(x)]=0$，其中 b 是非零常数，则函数 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$一致连续.

13. 证明：若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 连续、单调、有界，则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 一致连续.

14. 应用聚点定理证明闭区间连续函数的有界性.

---

① 李普希茨(Lipschitz 1832—1903)德国数学家.

15. 应用致密性定理证明闭区间连续函数的最值性.

16. 应用确界定理证明闭区间连续函数的零点定理.

17. 应用有限覆盖定理证明闭区间连续函数的一致连续性.

第五章　导数与微分

导数与微分是微分学的两个重要概念．数学分析主要任务就是研究函数的各种性态以及函数值的计算或近似计算，导数与微分是解决这些问题的普遍的有效的工具．本章将从两个实际问题抽象出导数概念，进而讨论求导法则和公式．在此基础上再给出微分概念．

§5.1　导　　数

一、实例

导数概念同数学中其它概念一样，也是客观世界事物运动规律在数量关系上的抽象．例如，物体运动的瞬时速度，曲线的切线斜率，非恒稳的电流强度，化学反应速度，等等，都是导数问题．

1．瞬时速度　通常人们所说的物体运动速度是指物体在一段时间内运动的平均速度．例如，一汽车从甲地出发到达乙地，全程120公里，行驶4小时，则汽车行驶的速度是$\frac{120}{4}=30$公里/小时，这仅是回答了汽车从甲地到乙地运行的平均速度．事实上，汽车并不是每时每刻都是以30公里/小时行驶．这是因为，下坡时跑的快些，上坡时跑的慢些，也可能中途停车等，即汽车每时每刻的速度是变化的．一般来说，平均速度并不能反映汽车在某一时刻的瞬间速度．随着科学技术的发展，仅仅知道物体运动的平均速度就不够用了，还要知道物体在某一时刻的瞬间速度，即瞬时

速度．例如，研究子弹的穿透能力，必需知道弹头接触目标时的瞬时速度．

我们已知物体的运动规律，怎样计算物体运动的瞬时速度呢？解决这个问题我们负有双重任务：一方面要回答何谓瞬时速度？另一方面要给出计算瞬时速度的方法．

如果物体作非匀速直线运动，其运动规律（函数）是

$$s=f(t),$$

其中 t 是时间，s 是距离．讨论它在时刻 t_0 的瞬时速度．

未知的瞬时速度并不是一个孤立的概念，它必然与某些已知的概念联系着．那么未知的瞬时速度概念与哪些已知的概念联系着呢？那就是已知的物体运动的平均速度．在时刻 t_0 以前或以后任取一个时刻 $t_0+\Delta t$，Δt 是时间的改变量．当 $\Delta t>0$ 时，$t_0+\Delta t$ 在 t_0 之后；当 $\Delta t<0$ 时，$t_0+\Delta t$ 在 t_0 之前．

当 $t=t_0$ 时，设 $s_0=f(t_0)$．当 $t=t_0+\Delta t$ 时，设物体运动的距离是 $s_0+\Delta s=f(t_0+\Delta t)$，有

$$\Delta s=f(t_0+\Delta t)-s_0=f(t_0+\Delta t)-f(t_0),$$

Δs 是物体在 Δt 时间内运动的距离，是运动规律 $s=f(t)$ 在时刻 t_0 的距离改变量．已知物体在 Δt 时间的平均速度 $v_{\Delta t}$（亦称距离对时间的平均变化率）是

$$v_{\Delta t}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}.$$

当 Δt 变化时，平均速度 $v_{\Delta t}$ 也随之变化．当 $|\Delta t|$ 较小时，理所当然地应该认为，平均速度 $v_{\Delta t}$ 是物体在时刻 t_0 的“瞬时速度”的近似值，当 $|\Delta t|$ 越小它的近似程度也越好．于是，物体在时刻 t_0 的瞬时速度 v_0（亦称距离对时间在 t_0 的变化率）就应是当 Δt 无限趋近于 $0(\Delta t\neq 0)$ 时，平均速度 $v_{\Delta t}$ 的极限，即

$$v_0=\lim_{\Delta t\to 0}v_{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}. \qquad (1)$$

瞬时速度的定义也给出了计算瞬时速度的方法，即计算(1)式的极限.

2. 切线斜率 欲求曲线上一点的切线方程，关键在于求出切线的斜率. 怎样求切线斜率呢？§2.3就特殊情况，已作了讨论.

设有一条平面曲线(如图5.1)，它的方程是$y=f(x)$. 求过该

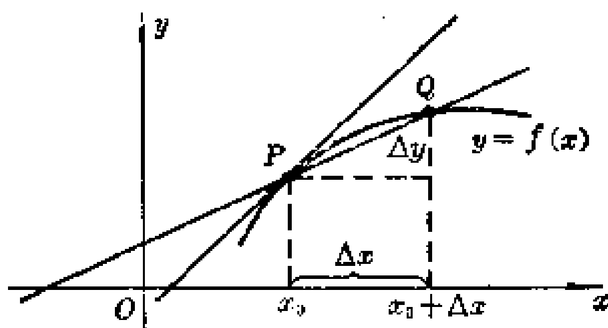


图 5.1

曲线上一点$P(x_0,y_0)(y_0=f(x_0))$的切线斜率.

未知的切线斜率也不是孤立的概念，它与已知的割线斜率联系着. 在曲线上任取另一点Q. 设它的坐标是$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，其中$\Delta x\neq 0$，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 由平面解析几何知，过曲线$y=f(x)$上二点$P(x_0,y_0)$与$Q(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$的割线斜率(即$\Delta y$对$\Delta x$的平均变化率)

$$k'=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta t}.$$

当Δx变化时，即点Q在曲线上变动时，割线PQ的斜率k'也随之变化，当$|\Delta x|$较小时，割线PQ的斜率k'应是过曲线上点P的切线斜率的近似值. 当$|\Delta x|$越小这个近似程度也越好. 于是，当Δx无限趋近于0时，即点Q沿着曲线无限趋近于点P时，割线PQ的极限位置就是曲线过点P的切线，同时割线PQ的斜率k'的极限k就应是曲线过点P的切线斜率(即$y=f(x)$在x_0的变化率)，

即

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{2}$$

于是，过曲线 $y=f(x)$上一点 $P(x_0,y_0)$的切线方程是

$$y-f(x_0)=k(x-x_0).$$

切线斜率的定义也给出了计算切线斜率的方法，即计算(2)式极限.

二、导数概念

上述二例，一个是物理学中的瞬时速度，一个是几何学中的切线斜率，二者的实际意义完全不同. 但是，从数学来看，(1) 式和 (2) 式的数学结构完全相同，都是函数的改变量 Δy 与自变量的改变量 Δx 之比的极限 (当 $\Delta x\to 0$ 时). 这样就有下面的导数概念：

定义 设函数 $y=f(x)$在 $U(x_0)$ 有定义，在 x_0 自变量 x 的改变量是 Δx，相应函数的改变量是 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{3}$$

存在，称函数 $f(x)$在 x_0 **可导**(或存在导数)，此极限称为函数$f(x)$在 x_0 的**导数**(或微商)，表为 $f'(x_0)$ 或$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

或
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

若极限(3)不存在，称函数 $f(x)$在 x_0 **不可导**.

不难看到，上段的二例都是导数问题. 如果物体直线运动规律是 $s=f(t)$，则物体在时刻 t_0 的瞬时速度 v_0 是 $f(t)$在 t_0 的导数

$f'(t_0)$，即 $v_0=f'(t_0)$。如果曲线的方程是 $y=f(x)$，则曲线在点 $P(x_0,y_0)$ 的切线斜率 k 是 $f(x)$ 在 x_0 的导数 $f'(x_0)$，即 $k=f'(x_0)$。

有时为了方便也可将极限(3)改写为下列形式：

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\qquad(\Delta x=h)$$

或
$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.\qquad(x=x_0+\Delta x)$$

在(3)式中，如果自变量的改变量 Δx 只从大于 0 的方向或只从小于 0 的方向趋近于 0，有

定义 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

与
$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

都存在，分别称为函数 $f(x)$ 在 x_0 **右可导**与**左可导**，其极限分别称为函数 $f(x)$ 在 x_0 的**右导数**与**左导数**，分别表为 $f'_+(x_0)$ 与 $f'_-(x_0)$，即

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

与
$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

根据 §2.3 定理 1，有

函数 $f(x)$ 在 x_0 可导 $\Longleftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在 x_0 的左、右导数都存在，且相等，即 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$。

定理 1. 若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 可导，则函数 $y=f(x)$ 在 x_0 连续.

证明 设在 x_0 自变量的改变量是 Δx，相应函数的改变量是

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0$,

即函数 $f(x)$在 x_0 连续. □

注 定理 1 的逆命题不成立,即函数在一点连续,函数在该点不一定可导. 例如,

函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 连续,但是它在 $x=0$ 不可导.

事实上,设在 $x=0$ 自变量的改变量是 Δx,分别有

当 $\Delta x>0$ 时,	当 $\Delta x<0$ 时,
$\Delta y=f(\Delta x)-f(0)=\lvert\Delta x\rvert=\Delta x$,	$\Delta y=f(\Delta x)-f(0)=\lvert\Delta x\rvert=-\Delta x$,
$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$,	$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$,
$f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$.	$f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1$.

显然, $f'_+(0)\neq f'_-(0)$ 于是, 函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 不可导.

函数 $f(x)=|x|$ 的几何图象是一条折线, 如图 5.2. 函数$f(x)=|x|$在 $x=0$ 不可导的几何意义是, 此折线在点 (0,0) 不存在切线.

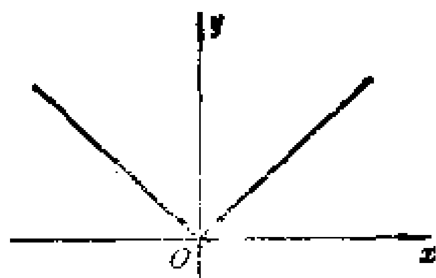


图 5.2

定义 若函数 $f(x)$在区间 I 的每一点都可导 (若区间 I 的左(右)端点属于 I,函数 $f(x)$在左(右)端点右可导(左可导)), 则称函数 $f(x)$在**区间 I 可导**.

若函数 $f(x)$在区间 I 可导, 则 $\forall x\in I$ 都存在(对应)唯一一个导数 $f'(x)$. 根据函数定义,$f'(x)$是区间 I 的函数,称为函数$f(x)$在区间 I 的**导函数**,也简称**导数**,表为

$$f'(x), y' \text{ 或 } \frac{dy}{dx}.$$

三、例

根据导数定义，求函数 $f(x)$ 在点 x 的导数，应按下列步骤进行：

第一步　在点 x 给自变量改变量 Δx，并计算 $x+\Delta x$ 的函数值 $f(x+\Delta x)$；

第二步　计算函数改变量 Δy，即 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$；

第三步作比　$\frac{\Delta y}{\Delta x}$；

第四步　求极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$.

为了简化叙述，在以下诸例中，Δx 都是表示点 x 的自变量的改变量，Δy 都是表示函数 $y=f(x)$ 相应的改变量.

例1. 求 $f(x)=c$　（c 是常数）在 x 的导数.

解　$f(x+\Delta x)=c$，$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=c-c=0$，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=0,$$

则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

即常数函数的导数为 0.

例2. 求函数 $f(x)=x^n$（n 是自然数）在 x 的导数.

解　$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^n$，

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^n-x^n$$

$$=nx^{n-1}\Delta x-\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$$

$$= nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1},$$

有 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1}\right)$$
$$=nx^{n-1},$$

即 $$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

特别是，当 $n=1$ 时，有 $(x)'=1$.

例 3. 求函数 $f(x)=\sqrt{x}\quad(x>0)$ 在 x 的导数.

解 $f(x+\Delta x)=\sqrt{x+\Delta x}\quad(x+\Delta x>0)$,

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}},$$

有 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

即 $$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

例 4. 求正弦函数 $f(x)=\sin x$ 在 x 的导数.

解 $f(x+\Delta x)=\sin(x+\Delta x)$,

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}},$$

有 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x.$$

$\left(已知\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x,\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1\right)$

即正弦函数 $\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 任意 x 都可导. 于是它在定义域 $\mathbf{R}$ 可导, 并且

$$(\sin x)'=\cos x.$$

同样,余弦函数 $\cos x$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 也可导,并且

$$(\cos x)'=-\sin x.$$

例5. 求对数函数 $f(x)=\log_a x(0<a\neq 1,\ x>0)$ 在 x 的导数.

解 $f(x+\Delta x)=\log_a(x+\Delta x)\qquad(x+\Delta x>0)$,

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x$$

$$=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}},$$

有 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$=\frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a},$$

$\left(已知 \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=e, \quad \log_a e=\frac{\ln e}{\ln a}=\frac{1}{\ln a}\right)$，

即对数函数 $\log_a x$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 任意 x 都可导. 于是它在 $(0, +\infty)$ 可导，并且

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

特别是，自然对数函数 $(a=e)$，有

$$(\ln x)'=\frac{1}{x\ln e}=\frac{1}{x}.$$

求某些函数 $f(x)$ 在特定点 x_0 的导数 $f'(x_0)$，有时要应用导数定义：

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

例 6. 求函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

在点 0 的导数(如图 5.3).

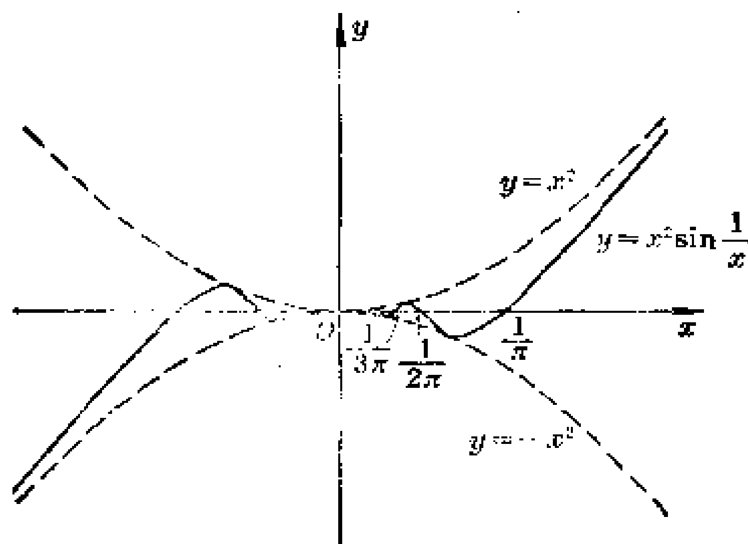


图 5.3

解 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

$f'(0)=0$ 的几何意义是，曲线$y=f(x)$在点$(0,0)$存在切线，切线就是 x 轴(它的斜率为 0)，如图 5.3.

例 7. 证明：函数(如图 5.4)

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

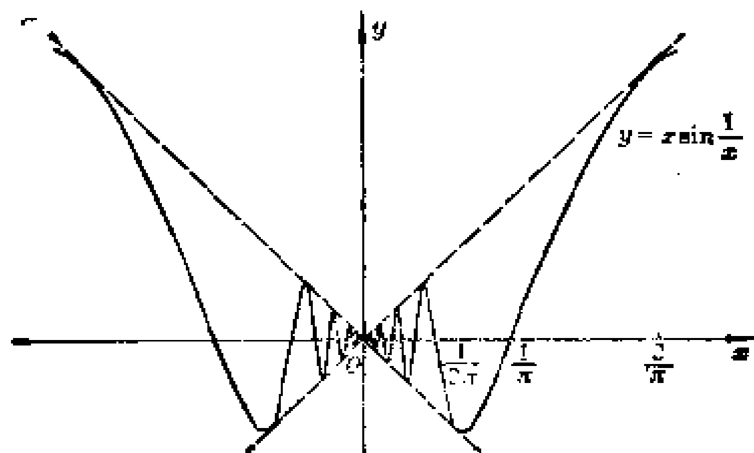


图 5.4

在点 0 连续，但不可导.

证明 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$,

即函数 $f(x)$在点 0 连续，但是，

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\sin\frac{1}{x}.$$

当 $x\to 0$ 时，$\sin\dfrac{1}{x}$ 在-1 与 1 之间无限次振动，不存在极限，即函

数 $f(x)$在点 0 不可导．如图 5.4

例 8． 证明：函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$在点 0 不可导(如图 5.5)

证明

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty,$$

即函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$在点 0 不可导，也称函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在点 0 有无穷大导数．它的几何意义是，曲线$y=\sqrt[3]{x}$在点 (0,0) 存在切线，切线就是 y 轴(它的斜率是$+\infty$)，如图 5.5.

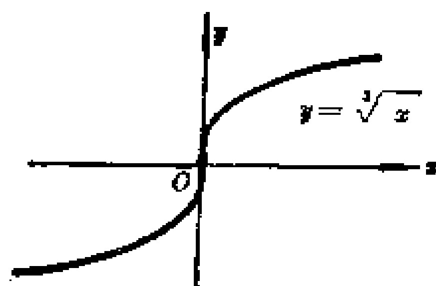


图 5.5

练习题 5.1

1．设质点作直线运动，已知路程 s 是时间 t 的函数

$$s=3t^2+2t+1.$$

求从 $t=2$ 到 $t=2+\Delta t$ 之间的平均速度，并求当 $\Delta t=1$，$\Delta t=0.1$ 与 $\Delta t=0.01$ 的平均速度．再求在 $t=2$ 的瞬时速度．

2．求下列曲线在指定点的切线方程与法线方程：

(1) $y=\frac{1}{x}$，在点(1,1)．

(2) $y=x^3$，在点(2,8)．

(3) $y=2x-x^3$，在点(−1,−1)．

3．求两条抛物线 $y=x^2$ 及 $y=2-x^2$ 在交点处的(两条切线)交角 θ．

4．根据导数定义，求下列函数在点 x 的导数：

(1) $f(x)=\cos x$.　　　(2) $f(x)=\frac{1}{x+1}$,　$x\neq -1$.

(3) $f(x)=\sqrt{x+1}$　$x>-1$　　　(4) $f(x)=\sin 3x$.

5. (1) 函数 $f(x)$ 在 0 可导，且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=$?

(2) 函数 $f(x)$ 在 a 可导，$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)\right]=$?

6. 求函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant c,\\ ax+b, & x<c.\end{cases}$$

在 c 的右导数．当 a 与 b 取何值，函数 $f(x)$ 在 c 可导．

7. 求函数

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(2) $\varphi(x)=|\operatorname{arctg}x|$.

在点 0 的左、右导数．

8. 证明：若 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(a)$ 都存在，则函数 $f(x)$ 在 a 连续．

9. 证明：若 $f'_+(a)>0$，则 $\exists\delta>0$，$\forall x\in(a,a+\delta)$，有 $f(a)<f(x)$．

10. 证明：若函数 $f(x)$ 在 a 可导，则

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a).$$

11. 证明：若 $\forall x\in U(a)$，有 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，$f(a)=g(a)=h(a)$，且 $f'(a)=h'(a)$，则 $g(x)$ 在 a 可导，且 $f'(a)=g'(a)=h'(a)$．

12. (1) 已知半径为 r 的圆的面积与周长分别是 $f(r)=\pi r^2$ 与 $g(r)=2\pi r$，则 $f'(r)=g(r)$．这个事实说明了什么?

(2) 已知半径为 r 的球的体积与面积分别是 $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$ 与 $A(r)=4\pi r^2$，则 $V'(r)=A(r)$．这个事实说明了什么?

*　　　*　　　*　　　*

13. 设函数 $f(x)$ 在 a 可导，且 $f(a)\neq 0$，求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n.$$

14. 设函数 $f(x)$ 在 a 可导，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{h\to a}\dfrac{f(h)-f(a)}{h-a}$，　(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$，

(3) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+2t)-f(a)}{t}$，　(4) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+2t)-f(a+t)}{2t}$，

(5) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+\alpha t)-f(a+\beta t)}{t}$.

15. 证明：若函数 $f(x)$ 在 a 连续，且 $f(a)\neq 0$，而函数 $[f(x)]^2$ 在 a 可导，则函数 $f(x)$ 在 a 也可导.

§5.2　求导法则与导数公式

一、导数的四则运算

求导运算是数学分析的基本运算之一．要求读者迅速、准确求出函数的导数．如果总是按照导数定义去求函数的导数，计算量很大，费时费力．为此要将求导运算公式化，这样就需要求导法则．

定理 1. 若函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在 x 可导，则函数 $u(x)\pm v(x)$ 在 x 也可导，且

$$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x).$$

证明　设 $y=u(x)\pm v(x)$，有

$$\begin{aligned}\Delta y&=[u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)]-[u(x)\pm v(x)]\\&=[u(x+\Delta x)-u(x)]\pm[v(x+\Delta x)-v(x)]=\Delta u\pm\Delta v.\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

已知函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在 x 可导，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'(x)\quad 与\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'(x).$$

于是，$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'(x)\pm v'(x),$$

即函数 $u(x)\pm v(x)$ 在 x 可导，且 $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$. □

应用归纳法，可将定理1推广为求任意有限个函数代数和的导数，即

若 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$ 都在 x 可导，则函数 $u_1(x)\pm u_2(x)\pm\cdots\pm u_n(x)$ 在 x 也可导，且

$$[u_1(x)\pm u_2(x)\pm\cdots\pm u_n(x)]'=u_1'(x)\pm u_2'(x)\pm\cdots\pm u_n'(x).$$

法则1. 有限个函数的代数和的导数等于每个函数导数的代数和.

例1. 求函数 $f(x)=\sqrt{x}+\sin x+5$ 的导数.

解 由§5.1的例，$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$(\sin x)'=\cos x$，$(5)'=0$，有

$$f'(x)=(\sqrt{x}+\sin x+5)'=(\sqrt{x})'+(\sin x)'+(5)'$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\cos x.$$

定理2. 若函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在 x 可导，则函数 $u(x)v(x)$ 在 x 也可导，且

$$[u(x)v(x)]'=u(x)v'(x)+v(x)u'(x).$$

证明 设 $y=u(x)v(x)$，有

$$\begin{aligned}\Delta y&=u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)\\&=u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x+\Delta x)v(x)\\&\qquad+u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x)\\&=u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x)-v(x)]\\&\qquad+v(x)[u(x+\Delta x)-u(x)]\\&=u(x+\Delta x)\Delta v+v(x)\Delta u.\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=u(x+\Delta x)\frac{\Delta v}{\Delta x}+v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

已知函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在 x 可导，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'(x) \quad 与 \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'(x).$$

根据§5.1定理1，函数 $u(x)$ 在 x 连续，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}u(x+\Delta x)=u(x)$. 于是，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}u(x+\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+v(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$=u(x)v'(x)+v(x)u'(x),$$

即函数 $u(x)v(x)$ 在 x 可导，且

$$[u(x)v(x)]'=u(x)v'(x)+v(x)u'(x). \quad \square$$

注 $[u(x)v(x)]'\neq u'(x)v'(x)$.

法则2. 两个函数乘积的导数等于第一个函数乘第二个函数的导数再加上第二个函数乘第一个函数的导数.

应用归纳法，可将定理2推广为求任意有限个函数乘积的导数。

若函数 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$ 在 x 都可导，则 $u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$ 在 x 也可导，且

$$[u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)]'=u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$$
$$+u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x).$$

法则2′. n 个函数乘积的导数等于 n 项和，其中每一项都是一个函数的导数乘其余 $n-1$ 个函数的积(这样的项共有 n 项)。

定理2的特殊情况，当 $v(x)=c$ 是常数时，由定理2，有

$$[cu(x)]'=cu'(x)+u(x)(c)'=cu'(x).$$

法则2″. 常数与函数乘积的导数等于常数乘函数的导数. 或说"常数因子可移到导数符号外边来".

例2. 求函数 $f(x)=\sqrt{x}\sin x$ 的导数.

解 $f'(x)=(\sqrt{x}\sin x)=\sqrt{x}(\sin x)'+\sin x(\sqrt{x})'$

$$=\sqrt{x}\cos x+\sin x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}\cos x+\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}.$$

例 3. 求函数 $f(x)=5\log_2 x-2x^4$ 的导数.

解 由 §5.1 的例 5 与例 2, $(\log_2 x)'=\frac{1}{x\ln 2}$ 与 $(x^4)'=4x^3$, 有

$$f'(x)=(5\log_2 x-2x^4)'=(5\log_2 x)'-2(x^4)'=\frac{5}{x\ln 2}-8x^3.$$

定理 3. 若函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在 x 可导, 且 $v(x)\neq 0$, 则函数 $\frac{u(x)}{v(x)}$ 在 x 也可导, 且

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

证明 设 $y=\frac{u(x)}{v(x)}$, 有

$$\Delta y=\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x)v(x+\Delta x)}$$

$$=\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x)+u(x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x)v(x+\Delta x)}$$

$$=\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x)-u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{v(x)v(x+\Delta x)}$$

$$=\frac{v(x)\Delta u-u(x)\Delta v}{v(x)v(x+\Delta x)}.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x)-u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)v(x+\Delta x)}.$$

已知函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在 x 可导, 有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'(x) \quad 与 \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'(x).$$

根据 §5.1 定理 1, 函数 $v(x)$ 在 x 连续, 即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=v(x)$.

于是,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\ v(x)-u(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)}$$

$$=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2},$$

即函数$\frac{u(x)}{v(x)}$在 x 可导，且$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$. □

注 $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'\neq\frac{u'(x)}{v'(x)}$.

法则3. 两个函数商的导数等于另两个函数的商，其分子是原来函数分子的导数乘分母减去分母的导数乘分子，其分母是原来函数分母的平方.

定理 3 的特殊情况，当 $u(x)=1$ 时. 由定理 3，有

$$\left[\frac{1}{v(x)}\right]'=\frac{(1)'v(x)-1\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}=-\frac{v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

例 4. 求正切函数 $\operatorname{tg}x$ 与余切函数 $\operatorname{ctg}x$ 的导数.

解 由 §5.1 的例 4，$(\sin x)'=\cos x$，$(\cos x)'=-\sin x$，有

$$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x(\sin x)'-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

$$(\operatorname{ctg}x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{\sin x(\cos x)'-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x.$$

例 5. 求正割 $\sec x$ 与余割 $\csc x$ 的导数.

解 $$(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\cos x}=\operatorname{tg}x\sec x.$$

$$(\csc x)'=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=-\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=-\frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\sin x}=-\operatorname{ctg} x\csc x.$$

二、反函数求导法则

为了求指数函数(对数函数的反函数)与反三角函数(三角函数的反函数)的导数,首先给出反函数求导法则.

定理 4. 若函数 $f(x)$在 x 的某邻域连续,并严格单调,函数 $y=f(x)$在 x 可导,且 $f'(x)\neq 0$,则它的反函数 $x=\varphi(y)$在 y $(y=f(x))$可导,且

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

证明 由§1.3 定理 1,函数 $y=f(x)$ 在 x 的某邻域存在反函数 $x=\varphi(y)$.

设反函数 $x=\varphi(y)$ 在点 y 的自变量的改变量是 $\Delta y(\Delta y\neq 0)$,有

$$\Delta x=\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y),$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

已知函数 $y=f(x)$在 x 的某邻域连续和严格单调,根据§3.2 定理 7 和§1.3 定理 1,反函数 $x=\varphi(y)$ 在 y 的某邻域也连续和严格单调,有 $\Delta y\to 0\Longleftrightarrow\Delta x\to 0$; $\Delta y\neq 0\Longleftrightarrow\Delta x\neq 0$. 于是,

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}},$$

有

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x)},$$

即反函数 $x=\varphi(y)$ 在 y 可导，且 $\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$. □

法则 4. 反函数的导数等于原来函数导数的倒数.

例 6 求指数函数 $y=a^x(0<a\neq1)$ 的导数.

解 已知指数函数 $y=a^x$ 是对数函数 $x=\log_a y$ 的反函数，由§5.1 例 5，$(\log_a y)'=\frac{1}{y\ln a}$，有

$$(a^x)'=\frac{1}{(\log_a y)'}=\frac{1}{\frac{1}{y\ln a}}=y\ln a=a^x\ln a,$$

即
$$(a^x)'=a^x\ln a.$$

特别，当 $a=e$ 时，有

$$(e^x)'=e^x\ln e=e^x,$$

即以 e 为底的指数函数 e^x 的导数还等于 e^x，这是以 e 为底的指数函数很好的性质.

例 7. 求反三角函数的导数.

1. $y=\arcsin x\quad\left(-1<x<1,-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$.

$y=\arcsin x$ 在 $(-1,\ 1)$ 连续，且严格增加，存在反函数 $x=\sin y$. 由反函数的求导法则，有

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}.$$

当 $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos y>0$，有

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. $y=\arccos x\quad(-1<x<1,0<y<\pi)$.

$y=\arccos x$ 在 $(-1,\ 1)$ 连续，且严格减少，存在反函数 $x=\cos y$. 由反函数的求导法则，有

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y}$$

$$= -\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}.$$

当 $0<y<\pi$ 时，$\sin y>0$，有

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. $y=\operatorname{arctg} x \quad \left(x\in\mathbf{R},\ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right).$

$y=\operatorname{arctg} x$ 在 $\mathbf{R}$ 连续，且严格增加，存在反函数 $x=\operatorname{tg} y$. 由反函数的求导法则，有

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

即
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

4. $y=\operatorname{arcctg} x \quad (x\in\mathbf{R}, 0<y<\pi).$

$y=\operatorname{arcctg} x$ 在 $\mathbf{R}$ 连续，且严格减少，存在反函数 $x=\operatorname{ctg} y$. 由反函数的求导法则，有

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2},$$

即
$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

三、复合函数求导法则

我们经常遇到的函数多是由几个基本初等函数生成的复合函数. 因此，复合函数的求导法则是求导运算经常应用的一个重要法则.

定理 5. 若函数 $y=f(u)$ 在 u 可导，函数 $u=g(x)$ 在 x 可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在 x 也可导，且

$$\{f[g(x)]\}'=f'(u)g'(x) \quad 或 \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

证明(I) 设在 x 的改变量是 Δx. 由函数 $u=g(x)$, 有 u 的改变量 Δu, 再由函数 $y=f(u)$, 又有 y 的改变量 Δy. 从而, 有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

已知函数 $y=f(u)$ 在 u 可导, 函数 $u=g(x)$ 在 x 可导, 则

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u), \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=g'(x).$$

由 §5.1 定理 1, $u=g(x)$ 在 x 连续, 即当 $\Delta x\to 0$, 有 $\Delta u\to 0$. 于是,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=f'(u)g'(x),$$

即复合函数 $y=f[g(x)]$ 在 x 可导, 且 $\{f[g(x)]\}'=f'(u)g'(x)$. □

注 在上述的证明中, 必须 $\Delta u\neq 0$, 否则 $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ 没有意义. 当 $\Delta x\neq 0$ 时, Δu 能否为 0 呢? 这是可能的. 例如, 函数

$$u(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

在点 0 的情况. $\Delta u=u(0+\Delta x)-u(0)=\Delta x^2\sin\frac{1}{\Delta x}$. 当 $\Delta x=\frac{1}{n\pi}\neq 0$, $n=\pm 1,\pm 2,\cdots$, 而 $\Delta u=0$, 且函数 $u(x)$ 在点 0 可导(见 §5.1 例6). 因此, 上述的证明是不严格的, 下面给出定理 5 的严格证明:

证明(II) 已知函数 $y=f(u)$ 在 u 可导, 即

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u) \quad (\Delta u\neq 0)$$

或
$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)+\alpha,$$

其中 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha=0$. 从而, 当 $\Delta u\neq 0$ 时, 有

$$\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u. \tag{1}$$

当 $\Delta u=0$ 时，显然，$\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u)=0$，(1)式也成立．为此令

$$\alpha=\begin{cases}\alpha, & \Delta u\neq 0,\\ 0, & \Delta u=0.\end{cases}$$

于是，不论 $\Delta u\neq 0$ 或 $\Delta u=0$，(1)式皆成立．用 $\Delta x(\Delta x\neq 0)$ 除(1)式等号两端，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

有
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta u\to 0}\alpha\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$=f'(u)g'(x)+0\cdot g'(x)=f'(u)g'(x),$$

即复合函数 $f[g(x)]$在 x 可导，且$\{f[g(x)]\}'=f'(u)g'(x)$． □

法则 5. 复合函数的导数等于函数对中间变量的导数乘以中间变量对自变量的导数．

应用归纳法，可将定理 5 推广为任意有限个基本初等函数生成的复合函数求导法则．三个函数生成的复合函数求导法则：

若 $y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\psi(x)$都可导，则

$$(f\{\varphi[\psi(x)]\})'=f'(u)\varphi'(v)\psi'(x).$$

例 8. 求函数 $y=\sin 5x$ 的导数．

解 函数 $y=\sin 5x$ 是函数 $y=\sin u$ 与 $u=5x$ 的复合函数．由复合函数求导法则，有

$$(\sin 5x)'=(\sin u)'(5x)'=\cos u\cdot 5=5\cos 5x.$$

例 9. 求对数函数 $y=\ln(-x)\,(x<0)$的导数．

解 函数 $y=\ln(-x)$ 是函数 $y=\ln u$ 与 $u=-x$ 的复合函数，由复合函数求导法则，有

$$[\ln(-x)]'=(\ln u)'(-x)'=\frac{1}{u}\cdot(-1)=\frac{1}{x}.$$

将这一结果与 §5.1 例 5，当 $x>0$ 时，$(\ln x)'=\frac{1}{x}$的结果合并，有

公式

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}\quad (x\neq 0). \tag{2}$$

例 10. 求幂函数 $y=x^\alpha$（α 是实数）的导数.

解 将 $y=x^\alpha$ 两端求自然对数，有 $\ln y=\alpha\ln x$，即

$$y=e^{\alpha\ln x}(x>0),$$

它是函数 $y=e^u$ 与 $u=\alpha\ln x$ 的复合函数. 已知

$$(e^u)'=e^u,\quad (\alpha\ln x)'=\frac{\alpha}{x}.$$

由复合函数求导法则，有

$$(x^\alpha)'=(e^{\alpha\ln x})'=(e^u)'(\alpha\ln x)'=e^u\frac{\alpha}{x}$$

$$=e^{\alpha\ln x}\frac{\alpha}{x}=x^\alpha\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1},$$

即

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

若幂函数 $y=x^\alpha$ 的定义域是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}-\{0\}$，则幂函数 $y=x^\alpha$ 的导数公式 $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ 也是正确的.

例 11. 求幂指函数 $y=\{f(x)\}^{\varphi(x)}$ 的导数.

解 将幂指函数表成指数形式，即

$$y=e^{\varphi(x)\ln f(x)}.$$

它是函数 $y=e^u$ 与 $u=\varphi(x)\ln f(x)$ 的复合函数. 已知

$$[\varphi(x)\ln f(x)]'=\varphi'(x)\ln f(x)+\varphi(x)[\ln f(x)]',$$

其中 $[\ln f(x)]'$ 又是复合函数，其导数是

$$[\ln f(x)]'=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

将它代入上式，有

$$[\varphi(x)\ln f(x)]'=\varphi'(x)\ln f(x)+\varphi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

于是，$(\{f(x)\}^{\varphi(x)})'=(e^u)'[\varphi(x)\ln f(x)]'$

$$=e^{u}\left[\varphi'(x)\ln f(x)+\varphi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

$$=e^{\varphi(x)\ln f(x)}\left[\varphi'(x)\ln f(x)+\varphi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

$$=\{f(x)\}^{\varphi(x)}\left[\varphi'(x)\ln f(x)+\varphi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right].$$

特别当 $f(x)=x,\varphi(x)=x$ 时，函数 $y=x^{x}$ 的导数是

$$(x^{x})'=x^{x}(\ln x+1).$$

例 12. 求函数 $\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$ 与 $\operatorname{ch}x=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$ 的导数.

解 函数 e^{-x} 是函数 e^{u} 与 $u=-x$ 的复合函数，有

$$(e^{-x})'=(e^{u})'(-x)'=e^{u}(-1)=-e^{-x}.$$

于是，

$$(\operatorname{sh}x)'=\left[\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})\right]'=\frac{1}{2}[(e^{x})'-(e^{-x})']$$

$$=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})=\operatorname{ch}x.$$

$$(\operatorname{ch}x)'=\left[\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\right]'=\frac{1}{2}[(e^{x})'+(e^{-x})']$$

$$=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})=\operatorname{sh}x.$$

即

$$(\operatorname{sh}x)'=\operatorname{ch}x,\quad(\operatorname{ch}x)'=\operatorname{sh}x.$$

例 13. 求函数 $\operatorname{th}x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$ 与 $\operatorname{cth}x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$ 的导数.

解 $(\operatorname{th}x)'=\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\right)'$

$$=\frac{(e^{x}+e^{-x})(e^{x}-e^{-x})'-(e^{x}-e^{-x})(e^{x}+e^{-x})'}{(e^{x}+e^{-x})^{2}}$$

$$=\frac{(e^{x}+e^{-x})^{2}-(e^{x}-e^{-x})^{2}}{(e^{x}+e^{-x})^{2}}$$

$$=\frac{1}{\left[\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right]^2}=\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}.$$

$$(\mathrm{cth}x)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right)'$$

$$=\frac{(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})'-(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})'}{(e^x-e^{-x})^2}$$

$$=\frac{(e^x-e^{-x})^2-(e^x+e^{-x})^2}{(e^x-e^{-x})^2}$$

$$=-\frac{1}{\left[\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right]^2}=-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}.$$

即
$$(\mathrm{th}x)'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x},\qquad (\mathrm{cth}x)'=-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}.$$

四、初等函数的导数

以上两段，根据导数的定义和求导法则得到了基本初等函数的导数公式．它们是求初等函数导数的基础．把它们集中起来抄录如下，就是导数公式表：

1. $(c)'=0$，其中 c 是常数．
2. $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$，其中 α 是实数．

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.\qquad (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3. $(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}.\qquad (\ln x)'=\frac{1}{x}.$
4. $(a^x)'=a^x\ln a.\qquad (e^x)'=e^x.$
5. $(\sin x)'=\cos x.\qquad (\cos x)'=-\sin x.$

$$(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.\quad (\mathrm{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x.$$

$$(\sec x)'=\mathrm{tg}\,x\sec x.\qquad (\csc x)'=-\mathrm{ctg}\,x\csc x.$$

6. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

7. $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$. $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$.

$(\mathrm{th}\, x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$. $(\mathrm{cth}\, x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$.

根据求导法则和导数公式表，能求出任意初等函数的导数. 由导数公式表知，基本初等函数的导数还是初等函数. 于是，初等函数的导数仍是初等函数，即初等函数对导数运算是封闭的.

求复合函数的导数，首先要将它"分解"为若干个基本初等函数，然后再应用复合函数的求导法则. 下面用例题说明关于复合函数求导数的方法.

例 14. 求函数 $y = \mathrm{tg}^3 \ln x$ 的导数.

解 将函数 $y = \mathrm{tg}^3 \ln x$ 分解为基本初等函数，设

$$y = u^3,\ u = \mathrm{tg}\, v,\ v = \ln x.$$

由复合函数求导法则，有

$$y' = (u^3)'\,(\mathrm{tg}\, v)'\,(\ln x)' = 3u^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 v} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= 3\,\mathrm{tg}^2 \ln x \cdot \frac{1}{\cos^2 \ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{3\,\mathrm{tg}^2 \ln x}{x \cos^2 \ln x}.$$

(最后要将 u 与 v 用 x 表示出来)

求复合函数的导数，写出中间变量是很麻烦的. 待方法熟练后，可以省略书写中间变量的步骤，从而可简化求导运算. 还是以求函数 $y = \mathrm{tg}^3 \ln x$ 的导数为例，说明其求法.

观察函数 $y = \mathrm{tg}^3 \ln x$，将哪个函数看作是一个整体(一个变量)就能应用导数公式表中的公式求导. 显然，将函数 $\mathrm{tg}\ln x$ 看作是一个整体(即中间变量 u)，就能应用幂函数 (u^3) 的导数公式求导.

不写出中间变量，由复合函数求导法则，有

$$y'=3\text{tg}^2\ln x\cdot(\text{tg }\ln x)'.$$

注意，应用复合函数导数公式之后，接着要乘上方才看作整体的那个函数的导数(即$(\text{tg }\ln x)'$)，这是复合函数求导法则要求的．用同样的方法继续作下去，直到最简的情况．

求$(\text{tg}\ln x)'$．将函数 $\ln x$ 看作一个整体，就能应用正切函数$(\text{tg}x)$的导数公式．由复合函数的求导法则，有

$$y'=3\text{tg}^2\ln x\cdot(\text{tg}\ln x)'=3\text{tg}^2\ln x\frac{1}{\cos^2\ln x}(\ln x)'$$

$$=3\text{tg}^2\ln x\cdot\frac{1}{\cos^2\ln x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{3\text{tg}^2\ln x}{x\cos^2\ln x}.$$

求复合函数的导数逐次应用复合函数求导法则，由表及里，逐步简化，既迅速又准确．

例 15. 求 $y=\ln[\ln(\ln x)]$的导数．

解 将$\ln(\ln x)$看作一个整体，由对数函数$\ln x$的导数公式，有

$$y'=\frac{1}{\ln(\ln x)}[\ln(\ln x)]'.$$

再将 $\ln x$ 看作一个整体，再由对数函数 $\ln x$ 的导数公式，有

$$y'=\frac{1}{\ln(\ln x)}[\ln(\ln x)]'=\frac{1}{\ln(\ln x)}\cdot\frac{1}{\ln x}(\ln x)'$$

$$=\frac{1}{\ln(\ln x)}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}.$$

例 16. 求 $y=\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$的导数．

解 将$\frac{2x}{1-x^2}$看作一个整体，由反正切函数 $\text{arctg}x$ 的导数公式，有

$$y'=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}\frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}.$$

例 17. 求 $y=e^{(1-\sin x)^{\frac{1}{2}}}$ 的导数.

解 $y'=e^{(1-\sin x)^{\frac{1}{2}}}\cdot[(1-\sin x)^{\frac{1}{2}}]'$

$$=e^{(1-\sin x)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{2}(1-\sin x)^{-\frac{1}{2}}(1-\sin x)'$$

$$=e^{(1-\sin x)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{2}(1-\sin x)^{-\frac{1}{2}}(-\cos x)$$

$$=-\frac{1}{2}e^{(1-\sin x)^{\frac{1}{2}}}\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}.$$

例 18. 求 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的导数.

解 $y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})'$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(1+x^2)'\right]$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

例 19. 求 $y=\sin[\cos^2(x^3+x)]$ 的导数.

解 $y'=\cos[\cos^2(x^3+x)]\cdot[\cos^2(x^3+x)]'$

$$=\cos[\cos^2(x^3+x)]\cdot 2\cos(x^3+x)[\cos(x^3+x)]'$$

$$=\cos[\cos^2(x^3+x)]\ 2\cos(x^3+x)\cdot[-\sin(x^3+x)](x^3+x)'$$

$$=\cos[\cos^2(x^3+x)]\cdot 2\cos(x^3+x)\cdot[-\sin(x^3+x)](3x^2+1)$$

$$=-2(3x^2+1)\cdot\cos[\cos^2(x^3+x)]$$
$$\cdot\cos(x^3+x)\sin(x^3+x).$$

练习题 5.2

1. 求下列函数的导数:

(1) $y=x^4+3x^2-6$, (2) $y=6x^{\frac{7}{2}}+4x^{\frac{5}{2}}+2x$,

(3) $y=(1+4x^3)(1+2x^2)$, (4) $y=\frac{a-x}{a+x}$,

(5) $y=\frac{x^3+1}{x^2-x-2}$, (6) $y=x\sin x+\cos x$,

(7) $y=x\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$, (8) $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$,

(9) $y=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}$, (10) $y=\frac{x}{4^x}$,

(11) $y=\frac{\operatorname{arctg}x}{x}$, (12) $y=\sqrt{x}\operatorname{arcctg}x$,

(13) $y=x^2\arccos x$, (14) $y=x10^x$,

(15) $y=x\sin x\ln x$.

2. 求下列函数的导数:

(1) $y=(2x^2-3)^2$, (2) $y=\sqrt{x^2+a^2}$,

(3) $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, (4) $y=\sqrt[3]{x^2+x+1}$,

(5) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$, (6) $y=\operatorname{tg}(ax+b)$,

(7) $y=\sin 2x\cos 3x$, (8) $y=\operatorname{ctg}^2 5x$,

(9) $y=a\sin^3\frac{x}{3}$, (10) $y=a\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)^2$,

(11) $y=\ln\operatorname{tg}x$, (12) $y=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$,

(13) $y=(x\operatorname{ctg}x)^2$, (14) $y=\log_a(x^2+1)$,

(15) $y=\log_3(x^2-\sin x)$, (16) $y=\ln\frac{1+x^2}{1-x^2}$,

(17) $y=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$,

(18) $y=\ln(\ln x)$,

(19) $y=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$,

(20) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$,

(21) $y=\sqrt{a^2+x^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}$,

(22) $y=e^{4x+5}$, (23) $y=7^{x^2+2x}$,

(24) $y=ae^{\sqrt{x}}$, (25) $y=\ln\frac{e^x}{1+e^x}$,

(26) $y=e^{\sin x}$, (27) $y=(\arcsin x)^2$,

(28) $y=\mathrm{arctg}(x^2+1)$, (29) $y=\mathrm{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$,

(30) $y=\arccos(x^2)$,

(31) $y=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}$,

(32) $y=\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ $(0\leqslant x<\pi)$,

(33) $y=\arcsin(\sin x)$, (34) $y=\mathrm{arctg}\frac{4\sin x}{3+5\cos x}$,

(35) $y=\mathrm{arctg}\frac{a}{x}+\ln\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$,

(36) $y=\frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$,

(37) $y=x^{\frac{1}{x}}$, (38) $y=e^{x^x}$,

(39) $y=(\sin x)^x$, (40) $y=(\sin x)^{\cos x}$.

3. 若 $F(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2+1}$，求 $F'(0)$，$F'(-1)$，$F'(1)$.

4. 证明：若函数 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 在 x 皆可导，且在 x 皆不为 0，设 $g(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$，则函数 $g(x)$ 在 x 也可导，且

$$g'(x)=g(x)\left[\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}+\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}+\cdots+\frac{f_n'(x)}{f_n(x)}\right].$$

5. 证明：可导的偶函数的导函数是奇函数；可导的奇函数的导函数是偶函数，并对这个事实给以几何说明.

6. 证明：可导的周期函数的导函数是周期函数.

7. 证明：在曲线 $y=x^2+x+1$ 上横坐标为 $x_1=0, x_2=-1, x_3=-\frac{1}{2}$ 的三点的法线交于一点.

* * * *

8. 证明：若幂函数 $y=x^\alpha$ 的定义域是 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{R}-\{0\}$，则

$$y'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

9. 证明：若函数 $f_{ij}(x)$ 可导 $(i, j=1,2,\cdots,n)$，则

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

10. 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x 可导，求下列函数的导数：

(1) $y=\sqrt{[f(x)]^2+[g(x)]^2}$ $\quad([f(x)]^2+[g(x)]^2\neq 0)$，

(2) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\quad(g(x)\neq 0)$，

(3) $y=\sqrt[g(x)]{f(x)}$ $\quad(g(x)\neq 0, f(x)>0)$，

(4) $y=\log_{f(x)}g(x)$ $\quad(g(x)>0, f(x)>0)$.

§5.3 隐函数与参数方程求导法则

一、隐函数求导法则

何谓隐函数？表示函数 f（对应关系）有多种不同的方法，其中有这样一种方法，自变量 x 与因变量 y 的对应关系 f 是由二元方程 $F(x,y)=0$ 所确定.

定义 设有两个非空数集 A 与 B. 若 $\forall x\in A$，由二元方程 $F(x, y)=0$ 对应唯一一个 $y\in B$，则称此对应关系 f（或写为 $y=f(x)$）是二元方程 $F(x,y)=0$ 确定的**隐函数**.

由隐函数的定义看到，二元方程 $F(x, y)=0$ 确定的隐函数 $y=f(x)$ $(x\in A, y\in B)$ 必是二元方程 $F(x,y)=0$ 的解，因此，

$$\forall x\in A, 有\ F[x,f(x)]=0.\ （或\ F[x,f(x)]\equiv 0）$$

例如，二元方程 $F(x, y)=2x-3y-1=0$ 在 $\mathbb{R}$ 确定（从中解得）一个隐函数.

事实上，$\forall x\in\mathbf{R}$，由二元方程对应唯一一个 $y=\frac{2x-1}{3}\in\mathbf{R}$，且

$$F\left(x,\frac{2x-1}{3}\right)=2x-3\cdot\frac{2x-1}{3}-1\equiv 0.$$

二元方程 $F(x,y)=x^2+y^2-a^2=0\,(a>0)$ 在 $A=[-a,a]$ 确定两个连续的（$B_1=[0,+\infty)$ 与 $B_2=(-\infty,0]$）隐函数.

事实上，$\forall x\in[-a,a]$，由二元方程对应唯一一个

$y_1=\sqrt{a^2-x^2}\in B_1=[0,+\infty)$，且

$F(x,y_1)=F(x,\sqrt{a^2-x^2})\equiv 0.$

与 $y_2=-\sqrt{a^2-x^2}\in B_2=(-\infty,0]$，且

$F(x,y_2)=F(x,-\sqrt{a^2-x^2})\equiv 0.$

于是，二元方程 $F(x,y)=x^2+y^2-a^2=0$ 在 $A=[-a,a]$ 确定了两个连续的隐函数

$y_1=\sqrt{a^2-x^2}\in[0,+\infty)$

与 $y_2=-\sqrt{a^2-x^2}\in(-\infty,0]$.

这两个隐函数的图象是以原点为心以 a 为半径的在区间 $[-a,a]$ 的上半圆与下半圆，如图 5.6.

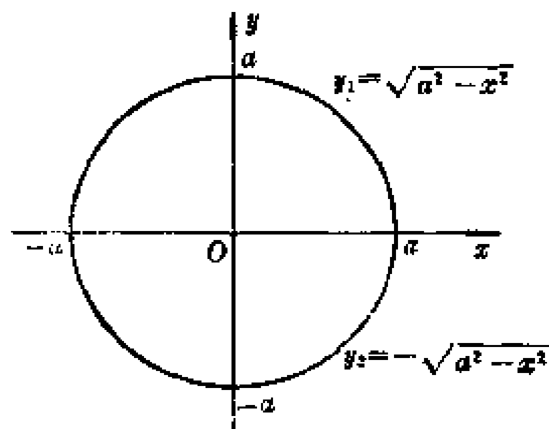


图 5.6

由此可见，所谓隐函数就是对应关系 f 不明显地隐含在二元方程之中. 相对隐函数来说，对应关系 f“明显”的函数，例如，

$$y=x^3+x-5,\ y=\ln\sin x,\ y=\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt{x}+2},\ \text{等等},$$

就是显函数. 在本节之前，所遇到的函数绝大多数都是显函数.

值得注意的是，有些二元方程 $F(x, y)=0$ 确定的隐函数 $y=f(x)$ 并不能用代数方法从中解出来，换句话说，隐函数不是初等函

数或不能化为显函数．关于隐函数的存在性、连续性和可微性等理论问题将在第十一章讲述．本节所讨论的隐函数都是存在的，可导的．

由于二元方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=f(x)$，有

$$F[x,f(x)]\equiv 0.$$

应用复合函数求导法则对恒等式两端求导数，即可求得隐函数的导数．下面举例说明隐函数的求导法则：

例 1. 求方程 $xy+3x^2-5y-7=0$ 确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数．

解 方程两端对 x 求导数，由复合函数的求导法则（注意，y 是 x 的函数），有

$$(xy+3x^2-5y-7)'=0,$$

$$(xy)'+3(x^2)'-5(y)'-(7)'=0,$$

$$xy'+y+6x-5y'=0,$$

解得隐函数的导数 $y'=\dfrac{6x+y}{5-x}$.

例 2. 求方程 $e^y=xy$ 确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数．

解 方程两端对 x 求导数，由复合函数的求导法则（注意，y 是 x 的函数），有

$$e^y y'=y+xy',$$

解得隐函数的导数

$$y'=\frac{y}{e^y-x}=\frac{y}{xy-x}=\frac{y}{x(y-1)}.$$

例 3. 证明：过双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 $(x_0,\ y_0)$ 的切线方程是

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1. \tag{2}$$

证明 首先求过点(x_0, y_0) $(y_0\neq 0)$的切线斜率 k，即求双曲线确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数在点(x_0, y_0)的值.

$$\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)'=(1)', \qquad \frac{2x}{a^2}-\frac{2yy'}{b^2}=0.$$

解得 $y'=\frac{b^2x}{a^2y}$. 在点(x_0, y_0)的切线斜率 $k=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$. 从而，切线方程是

$$y-y_0=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$$

或
$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}.$$

因为点(x_0, y_0)在双曲线上，所以 $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$. 于是，所求的切线方程是

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

当 $y_0=0$ 时，有 $x_0=\pm a$. 过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上点 $(\pm a, 0)$ 的切线方程是 $x=\pm a$①，也满足(2)式.

例 4. 证明：抛物线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ $(0<x<a)$ 上任意点的切线在两个坐标轴上截距的和等于 a.

证明 在抛物线上任取一点 (x_0, y_0)，即 $\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}=\sqrt{a}$. 求抛物线在点$(x_0, y_0)$的切线斜率 k. 由隐函数求导法则，有

---

① 将双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 改写为以 y 为自变量的函数

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2+y^2}, \qquad y\in\mathbf{R}.$$

$$\frac{dx}{dy}=\pm\frac{a}{b}\frac{2y}{2\sqrt{b^2+y^2}}=\pm\frac{a}{b}\frac{y}{\sqrt{b^2+y^2}}.$$

当 $y=0$ 时，$\frac{dx}{dy}=0$，即双曲线在点$(\pm a, 0)$的切线斜率为 0. 于是，双曲线在点$(\pm a, 0)$的切线方程是 $x=\pm a$.

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}y'=0 \text{ 或 } y'=-\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

从而斜率 $k=-\sqrt{\frac{y_0}{x_0}}$. 在点$(x_0,y_0)$的切线方程是

$$y-y_0=-\sqrt{\frac{y_0}{x_0}}(x-x_0).$$

它在 x 轴与 y 轴上的截距分别是 $x_0+\sqrt{x_0y_0}$ 与 $y_0+\sqrt{x_0y_0}$. 于是，二截距之和是

$$\begin{aligned}&(y_0+\sqrt{x_0y_0})+(x_0+\sqrt{x_0y_0})\\&=x_0+2\sqrt{x_0y_0}+y_0=(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0})^2=(\sqrt{a})^2\\&=a.\end{aligned}$$

求某些显函数的导数，直接求它的导数比较繁琐，这时可将它化为隐函数，用隐函数求导法则求其导数，比较简便. 将显函数化为隐函数常用的方法是等号两端取对数，称为对数求导法.

例 5. 求函数 $y=\sqrt[3]{\frac{x^2}{x-a}}$的导数.

解 等号两端取对数，有

$$\ln|y|=\ln\left|\sqrt[3]{\frac{x^2}{x-a}}\right|=\frac{2}{3}\ln|x|-\frac{1}{3}\ln|x-a|.$$

由隐函数的求导法则，有

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{3}\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\frac{1}{x-a}=\frac{x-2a}{3x(x-a)},$$

即

$$y'=\frac{x-2a}{3x(x-a)}\sqrt[3]{\frac{x^2}{x-a}}.$$

例 6. 求幂指函数 $y=x^x(x>0)$的导数(见 §5.2 例 11).

解 等号两端取对数，有

$$\ln y=x\ln x$$

求导数

$$\frac{y'}{y}=\ln x+1,$$

即 $$y'=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1).$$

二、参数方程求导法则

参数方程的一般形式是

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t).\end{cases}\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

若 $x=\varphi(t)$ 与 $y=\psi(t)$ 都可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，又 $x=\varphi(t)$ 存在反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，则 y 是 x 的复合函数，即

$$y=\psi(t),\ t=\varphi^{-1}(x).$$

由复合函数与反函数的求导法则，有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\psi'(t)[\varphi^{-1}(x)]'=\psi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

这就是参数方程的求导公式.

例 7. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 的切线斜率 k.

解 I. 点 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 在上半椭圆上，从椭圆方程中解出上半椭圆方程是

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\qquad y'=\frac{-bx}{a\sqrt{a^2-x^2}},$$

则
$$k=y'\Big|_{x=\frac{a}{\sqrt{2}}}=-\frac{b}{a}.$$

II. 由隐函数求导法，有

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}y'=0\quad 或\quad y'=-\frac{b^2x}{a^2y},$$

则
$$k=y'\Big|_{\substack{x=\frac{a}{\sqrt{2}}\\ y=\frac{b}{\sqrt{2}}}}=-\frac{b}{a}.$$

III. 将椭圆化为参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

点$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$对应的参数 $t = \frac{\pi}{4}$. 由参数方程求导法，有

$$y' = \frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t,$$

则
$$k = y'\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}.$$

例 8. 设炮弹的弹头初速度是 v_0，沿着与地面成 α 角的方向抛射出去. 求在时刻 t_0 时弹头的运动方向（忽略空气阻力，风向等因素）.

解 已知弹头关于时间 t 的弹道曲线的参数方程是

$$\begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha, \\ y = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2, \end{cases}$$

其中 g 是重力加速度（常数）. 由参数方程的求导法，有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_0\sin\alpha - gt}{v_0\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{gt}{v_0\cos\alpha}.$$

设在时刻 t_0 弹头的运动方向与地面的夹角为 φ，有

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha - \frac{gt_0}{v_0\cos\alpha},$$

或
$$\varphi = \operatorname{arc\ tg}\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{gt_0}{v_0\cos\alpha}\right).$$

练习题 5.3

1. 求下列方程确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $y^2 = 4px$,　　　(2) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$,

(3) $y^3 - 3y + 2ax = 0$,　　　(4) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$,

(5) $x^3+y^3-3axy=0$, (6) $y=\cos(x+y)$,

(7) $x+2\sqrt{x-y}+4y=2$, (8) $\sin(xy)=x$.

2. 应用对数求导法，求下列函数的导数：

(1) $y=x\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, (2) $y=\frac{x^2}{1-x}\cdot\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$,

(3) $y=(x+\sqrt{1+x^2})^n$.

(4) $y=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}$,

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 都是常数。

3. 求下列曲线在指定点的斜率：

(1) $x^2+3xy+y^2+1=0$, 在 $(2, -1)$,

(2) $x^3-axy+2ay^2=2a^3$, 在 (a, a),

(3) $\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{y}=1$, 在 $(4, 1)$.

4. 求下列参数方程的导数 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $\begin{cases} x=\frac{1}{t+1}, \\ y=\left(\frac{t}{t+1}\right)^2. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=\frac{3at}{1+t^3}, \\ y=\frac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=a\cos^2 t, \\ y=b\sin^2 t. \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=b\sin^3 t. \end{cases}$

5. 求摆线

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$$

在 $t=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

6. 证明：两个双曲线族 $x^2-y^2=a$ 与 $xy=b$（a 与 b 是任意实数）构成正交网，即每族中任取一条双曲线，二者在交点处的切线垂直，并描绘其图形.

* * * *

7. 若曲线由极坐标方程 $\rho=f(\theta)$ 表示，则曲线可化为以极角 θ 为参数的参数方程

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta=f(\theta)\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta=f(\theta)\sin\theta. \end{cases}$$

求$\frac{dy}{dx}$.

8. 应用第7题证明：两条心脏线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 与 $\rho=a(1-\cos\theta)$ 在交点处的切线垂直.

§5.4 微　分

一、微分概念

已知函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的函数值 $f(x_0)$，欲求函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近一点 $x_0+\Delta x$ 的函数值 $f(x_0+\Delta x)$，常常是很难求得 $f(x_0+\Delta x)$ 的精确值. 在实际应用中，只要求出 $f(x_0+\Delta x)$ 的近似值也就够用了. 为此讨论近似计算函数值 $f(x_0+\Delta x)$ 的方法.

因为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 或 $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\Delta y$，所以只要能近似地计算出 Δy 即可. 显然，Δy 是 Δx 的函数(如图 5.7).

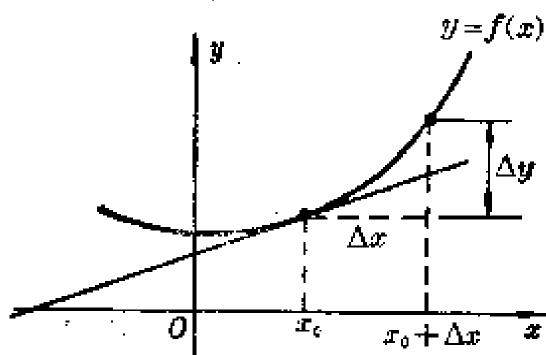


图 5.7

希望有一个关于 Δx 的简便的函数近似代替 Δy，并使其误差满足要求. 在所有关于 Δx 的函数中，一次函数最为简便. 因此，用 Δx 的一次函数 $A\Delta x$（A 是常数）近似代替 Δy，所产生的误差是 $\Delta y-A\Delta x$. 如果 $\Delta y-A\Delta x=o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0)$，那么一次函数 $A\Delta x$ 就有特殊的意义.

定义 若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的改变量 Δy 与自变量 x 的改变

量 Δx，有下列关系

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \tag{1}$$

其中 A 是与 Δx 无关的常数，称函数 $f(x)$ 在 x_0 **可微**，$A\Delta x$ 称为函数 $f(x)$ 在 x_0 的**微分**，表为

$$dy = A\Delta x \quad 或 \quad df(x_0) = A\Delta x.$$

$A\Delta x$ 也称为(1)式的**线性主要部分**. "线性"是因为 $A\Delta x$ 是 Δx 的一次函数. "主要"是因为(1)式的右端 $A\Delta x$ 起主要作用，$o(\Delta x)$ 比 Δx 是高阶无穷小.

从(1)式看到，$\Delta y \approx A\Delta x$ 或 $\Delta y \approx dy$，其误差是 $o(\Delta x)$.

例如，半径为 r 的圆面积 $Q = \pi r^2$. 若半径 r 增大 Δr(自变量的改变量)，则面积 Q 相应的改变量 ΔQ 就是以 r 与 $r+\Delta r$ 为半径的两个同心圆之间的圆环面积(如图 5.8)，即

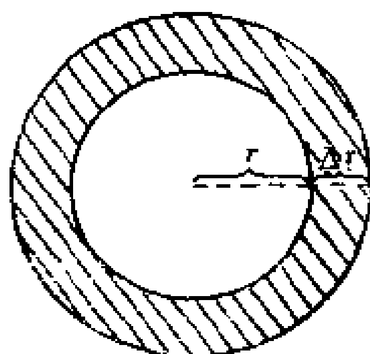


图 5.8

$$\Delta Q = \pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r\Delta r + \pi(\Delta r)^2.$$

显然，ΔQ 的线性主要部分是 $2\pi r\Delta r$，而 $\pi(\Delta r)^2$ 比 Δr 是高阶无穷小(当 $\Delta r \to 0$ 时)，即 $\pi(\Delta r)^2 = o(\Delta r)$.

$$dQ = 2\pi r\Delta r, \quad \Delta Q \approx dQ.$$

它的几何意义是，圆环的面积近似等于以半径为 r 的圆周长为底以 Δr 为高的矩形面积.

再例如，半径为 r 的球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. 当半径 r 的改变量为 Δr 时，ΔV 是

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi(r+\Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= 4\pi r^2\Delta r + 4\pi r(\Delta r)^2 + \frac{4}{3}\pi(\Delta r)^3.$$

显然，ΔV 的线性主要部分是 $4\pi r^2\Delta r$，而 $4\pi r(\Delta r)^2+\frac{4}{3}\pi(\Delta r)^3$ 比 Δr 是高阶无穷小(当 $\Delta r\to 0$ 时)，即

$$4\pi r(\Delta r)^2+\frac{4}{3}\pi(\Delta r)^3=o(\Delta r).$$

$$dV=4\pi r^2\Delta r,\quad \Delta V\approx dV.$$

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 可微，即 $dy=A\Delta x$，那么常数 $A=?$. 下面定理的必要性回答了这个问题：

定理 1. 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 可微 $\Longleftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 可导.

证明 **必要性**($\Longrightarrow$)设函数 $f(x)$ 在 x_0 可微，即

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中 A 是与 Δx 无关的常数. 用 Δx 除之

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

有
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=A,$$

于是函数 $f(x)$ 在 x_0 可导，且 $A=f'(x_0)$.

充分性($\Longleftarrow$)设函数 $f(x)$ 在 x_0 可导，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0),$$

或
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha,\quad \alpha\to 0(\text{当 } \Delta x\to 0 \text{ 时}).$$

从而
$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x),$$

其中 $f'(x_0)$ 是与 Δx 无关的常数，$o(\Delta x)$ 比 Δx 是高阶无穷小，于是函数 $f(x)$ 在 x_0 可微. □

定理 1 指出，函数 $y=f(x)$ 在 x_0 可微与可导是等价的，并且 $A=f'(x_0)$. 于是，函数 $f(x)$ 在 x_0 的微分

$$dy=f'(x_0)\Delta x.$$

由(1)式，有 $\Delta y = dy + o(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$.

从近似计算说，用 dy 近似代替 Δy 有两点好处：1) dy 是 Δx 的线性函数，这一点保证计算简便；2) $\Delta y - dy = o(\Delta x)$，这一点保证近似程度好，即误差比 Δx 是高阶无穷小.

从几何图形说，如图 5.9，PM 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 的切线. 已知切线 PM 的斜率 $\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$.

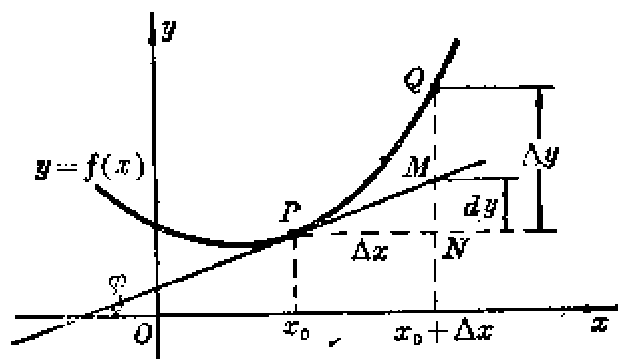


图 5.9

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = QN,$$

$$dy = f'(x_0)\Delta x = \operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta x = \frac{MN}{\Delta x}\Delta x = MN.$$

由此可见，$dy = MN$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的切线 PM 的纵坐标的改变量. 因此，用 dy 近似代替 Δy，就是用在点 $P(x_0, y_0)$ 处切线的纵坐标改变量 MN 近似代替函数 $f(x)$ 的改变量 QN. $QM = QN - MN = \Delta y - dy = o(\Delta x)$.

由微分定义，自变量 x 本身的微分是

$$dx = (x)'\Delta x = \Delta x,$$

即自变量 x 的微分 dx 等于自变量 x 的改变量 Δx. 于是，当 x 是自变量时，可用 dx 代替 Δx. 函数 $y=f(x)$ 在 x 的微分 dy 又可写为

$$dy = f'(x)dx,$$

或 $$f'(x)=\frac{dy}{dx},$$

即函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 等于函数的微分 dy 与自变量的微分 dx 的商. 导数亦称微商就源于此. 在没有引入微分概念之前，曾用 $\frac{dy}{dx}$ 表示导数，但是，那时 $\frac{dy}{dx}$ 是一个完整符号，并不具有商的意义. 当引入微分概念之后，符号 $\frac{dy}{dx}$ 才具有商的意义.

二、微分的运算法则和公式

已知可微与可导是等价的，且 $dy=y'dx$.

由导数的运算法则和导数公式可相应地得到微分运算法则和微分公式.

若函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 可微，则

1) $d[cu(x)]=cdu(x)$，其中 c 是常数.

2) $d[u(x)\pm v(x)]=du(x)\pm dv(x)$.

3) $d[u(x)\cdot v(x)]=u(x)dv(x)+v(x)du(x)$.

4) $d\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]=\frac{v(x)du(x)-u(x)dv(x)}{[v(x)]^2}$.

这里只给出最后一个法则的证明.

$$d\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]=\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'dx=\frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}dx$$

$$=\frac{v(x)u'(x)dx-u(x)v'(x)dx}{[v(x)]^2}$$

$$=\frac{v(x)du(x)-u(x)dv(x)}{[v(x)]^2}.$$

在导数公式表中，将每个公式等号右端都乘上自变量的微分 dx，就是相应函数的微分公式表：

1. $y=c$, $\quad dy=0$，其中 c 是常数.

2. $y=x^\alpha$, $dy=\alpha x^{\alpha-1}dx$, 其中 α 是实数.

$y=\frac{1}{x}$, $dy=-\frac{1}{x^2}dx$.

$y=\sqrt{x}$, $dy=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$.

3. $y=\log_a x$, $dy=\frac{1}{x\ln a}dx$.

$y=\ln x$, $dy=\frac{1}{x}dx$.

4. $y=a^x$, $dy=a^x\ln a dx$.

$y=e^x$, $dy=e^x dx$.

5. $y=\sin x$, $dy=\cos x dx$.

$y=\cos x$, $dy=-\sin x dx$.

$y=\operatorname{tg} x$, $dy=\frac{1}{\cos^2 x}dx$.

$y=\operatorname{ctg} x$, $dy=-\frac{1}{\sin^2 x}dx$.

6. $y=\arcsin x$, $dy=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

$y=\arccos x$, $dy=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

$y=\operatorname{arctg} x$, $dy=\frac{1}{1+x^2}dx$.

$y=\operatorname{arcctg} x$, $dy=-\frac{1}{1+x^2}dx$.

三、微分在近似计算上的应用

若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 可微，则

$$\Delta y=dy+o(\Delta x).$$

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0), \qquad dy = f'(x_0)\Delta x,$$

有
$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x),$$

或
$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x).$$

设 $x=x_0+\Delta x, \Delta x = x-x_0$，上式又可改写为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

或
$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0). \tag{2}$$

(2)式就是函数值 $f(x)$ 的近似计算公式

特别是，当 $x_0=0$，且 $|x|$ 充分小时，(2)式就是

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x. \tag{3}$$

由(3)式可以推得几个常用的近似公式(当 $|x|$ 充分小时)：

1) $\sin x\approx x$, 　　2) $\mathrm{tg}x\approx x$,

3) $\dfrac{1}{1+x}\approx 1-x$, 　　4) $e^x\approx 1+x$,

5) $\ln(1+x)\approx x$, 　　6) $\sqrt[n]{1\pm x}\approx 1\pm\dfrac{x}{n}$,

以上近似公式易证，这里只给最后一个近似公式的证明

已知函数 $f(x)=\sqrt[n]{1\pm x}$，则

$$f(0)=1,\ \ f'(x)=\pm\frac{1}{n}(1\pm x)^{\frac{1}{n}-1},\ \ f'(0)=\pm\frac{1}{n}.$$

由公式(3)，有

$$\sqrt[n]{1+x}\approx 1\pm\frac{x}{n}.$$

例 1. 求 $\mathrm{tg}31°$ 的近似值.

解 函数 $f(x)=\mathrm{tg}x$. 设 $x_0=30°, x=31°, x-x_0=1°=\dfrac{\pi}{180}$.

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x},\ \ f'(30°)=\frac{1}{\cos^2 30°},$$

由公式(2)，有

$$\operatorname{tg}31^\circ \approx \operatorname{tg}30^\circ + \frac{1}{\cos^2 30^\circ} \frac{\pi}{180}.$$

已知 $\operatorname{tg}30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.57735$, $\frac{1}{\cos^2 30^\circ} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0.02327$.

有 $$\operatorname{tg}31^\circ \approx 0.57735 + 0.02327 = 0.60062.$$

$\operatorname{tg}31^\circ$的准确值是 0.6008606….

例 2. 求$\sqrt[3]{131}$与$\sqrt[5]{34}$的近似值.

解 已知当$|x|$很小时,有$(1+x)^{\frac{1}{n}} \approx 1+\frac{x}{n}$. 据此而有

$$\sqrt[3]{131} = \sqrt[3]{5^3+6} = \sqrt[3]{5^3\left(1+\frac{6}{5^3}\right)} = 5\left(1+\frac{6}{5^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\approx 5\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5^3}\right) = 5+\frac{2}{25} = 5.08.$$

$$\sqrt[5]{34} = \sqrt[5]{2^5+2} = \sqrt[5]{2^5\left(1+\frac{1}{2^4}\right)} = 2\left(1+\frac{1}{2^4}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$\approx 2\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{16}\right) = 2+\frac{1}{40} = 2.025.$$

练习题 5.4

1. 求下列函数的微分:

(1) $y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$, (2) $y = x^2 \sin x$,

(3) $y = \frac{x}{1+x^2}$, (4) $y = \ln \operatorname{tg} x$,

(5) $y = e^{ax}\cos bx$, (6) $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$.

2. 求下列函数在指定点的 Δy 与 dy:

(1) $y = x^2 - x$, 在 $x=1$, (2) $y = x^3 - 2x - 1$, 在 $x=2$,

(3) $y = \sqrt{x+1}$, 在 $x=0$.

3. 证明,当$|x|$充分小时,有下列近似公式:

$\sin x \approx x$, $\operatorname{tg} x \approx x$, $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$,

$e^x \approx 1+x$, $\quad \ln(1+x) \approx x$.

4. 证明：当$|x|$充分小，$a>0$，n是自然数，有近似公式

$$\sqrt[n]{a^n+x} \approx a+\frac{x}{na^{n-1}}.$$

并用此公式，求下列各数的近似值：

(1) $\sqrt[4]{80}$, (2) $\sqrt[7]{100}$, (3) $\sqrt[10]{1000}$.

5. 应用微分 dy 近似代替改变量 Δy，求下列各数的近似值：

(1) $\sqrt[3]{1.02}$, (2) $\sin 29°$, (3) $\cos 31°$,

§5.5 高阶导数与高阶微分

一、高阶导数

定义 函数 $f(x)$ 的（一阶）导函数 $f'(x)$ 在 x 的导数，称为函数 $f(x)$ 在 x 的**二阶导数**，表为 $f''(x)$，即

$$f''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}.$$

函数 $f(x)$ 的二阶导函数 $f''(x)$ 在 x 的导数，称为函数 $f(x)$ 在 x 的**三阶导数**，表为 $f'''(x)$. 一般情况，函数 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导函数在 x 的导数，称为函数 $f(x)$ 在 x 的 **n阶导数**，表为 $f^{(n)}(x)$，即

$$f^{(n)}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}.$$

二阶与二阶以上的导数，统称为**高阶导数**. 对于函数 $y=f(x)$ 的高阶导数 $f''(x), f'''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ 也分别表为

$$\frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d^3y}{dx^3},\quad \cdots,\quad \frac{d^ny}{dx^n}.$$

设物体的运动规律（函数）是

$$s=s(t),$$

其中 t 是时间，s 是距离. 已知它的（一阶）导数是物体在时刻 t 的瞬时速度 $v(t)$，即

$$v(t)=s'(t).$$

现在求速度函数 $v(t)$在时刻 t 的导数. 比值

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=\frac{s'(t+\Delta t)-s'(t)}{\Delta t}$$

是物体在 Δt 时间内的平均加速度. 若极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s'(t+\Delta t)-s'(t)}{\Delta t}$$

存在,即

$$v'(t)=s''(t).$$

于是,速度 $v(t)$在时刻 t 的导数, 即运动规律 $s(t)$在时刻 t 的二阶导数 $s''(t)$是物体运动在时刻 t 的加速度.

例如, 已知自由落体的运动规律是 $s=\frac{1}{2}gt^2$. 它的(瞬时)速度 $v(t)$与加速度 $a(t)$分别是

$$v(t)=\left(\frac{1}{2}gt^2\right)'=gt \quad 与 \quad a(t)=\left(\frac{1}{2}gt^2\right)''=g,$$

即自由落体运动的加速度是常数 g, 就是重力加速度. 由此可见, 自由落体运动是等加速度运动.

由函数的高阶导数的定义, 求函数的 n 阶导数就是按求导法则和求导公式逐阶进行 n 次.

例 1. 求 n 次多项式 $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 的各阶导数.

解 $P'_n(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1},$

$$P''_n(x)=n(n-1)a_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+\cdots+2a_{n-2},$$

每求一次导数, 多项式的次数降低一次. 不难得到, $P_n(x)$的 n 阶导数是

$$P_n^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1a_0=n!a_0.$$

而
$$P_n^{(n+1)}(x)=P_n^{(n+2)}(x)=\cdots=0.$$

于是，n 次多项式 $P_n(x)$ 的 n 阶导数是常数 $n!a_0$，高于 n 阶的导数都恒为 0.

例 2. 求 $f(x)=e^{ax}$(a 是常数)的 n 阶导数.

解 $f'(x)=ae^{ax}, f''(x)=a^2e^{ax},\cdots,f^{(n)}(x)=a^ne^{ax}.$

例 3. 求 $f(x)=\sin x$ 的 n 阶导数.

解 $f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$

$$f''(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f'''(x)=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

....

$$f^{(n)}(x)=\cos\left[x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

例 4. 求 $f(x)=\cos x$ 的 n 阶导数.

解 $f'(x)=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$

$$f''(x)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f'''(x)=-\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

....

$$f^{(n)}(x)=-\sin\left[x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

例 5. 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 的 n 阶导数.

解 $f'(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1},$

$$f''(x)=-(1+x)^{-2},$$

$$f'''(x)=1\cdot 2(1+x)^{-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}1\cdot 2\cdots(n-1)(1+x)^{-n}$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

例 6. 求 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$（α 是实数）的 n 阶导数.

解 $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$,

$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

$$f'''(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots[\alpha-(n-1)](1+x)^{\alpha-n}.$$

二、莱布尼兹公式

莱布尼兹公式是求两个函数乘积的高阶导数的公式.

为了书写简便，将函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 简写为 u 与 v. 由乘积的导数公式，有

$$(uv)'=u'v+uv',$$

$$(uv)''=u''v+2u'v'+uv'',$$

$$(uv)'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''. \tag{1}$$

不难发现，(1)式右端很类似二数和的立方公式：

$$(u+v)^3=u^3v^0+3u^2v+3uv^2+u^0v^3 \qquad (v^0=u^0=1). \tag{2}$$

在(2)式中，将次数换成阶数（而 $v^{(0)}=v, u^{(0)}=u$）①，等号左端的和换成积，恰好就是(1)式. 因此，两个函数乘积的 n 阶导数很类似二数和的 n 次幂的展开式.

定理 1. 若 u 与 v 都是 x 的函数，且存在 n 阶导数，则

$$(uv)^{(n)}=C_n^0u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\cdots$$

---

① 规定：$f^{(0)}(x)=f(x)$，即函数 $f(x)$ 的"0 阶"导数就是函数 $f(x)$ 自身.

$$+C_n^{n-1}u'v^{(n-1)}+C_n^n uv^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}, \tag{3}$$

其中 $C_n^k=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$. (3)式称为**莱布尼兹公式**.

证明 用归纳法证明. 当 $n=1$ 时, (3)式成立, 即

$$(uv)'=\sum_{k=0}^{1}C_1^k u^{(1-k)}v^{(k)}=C_1^0u'v+C_1^1uv'=u'v+uv'.$$

设 $n=m$, (3)式成立, 即

$$(uv)^{(m)}=\sum_{k=0}^{m}C_m^k u^{(m-k)}v^{(k)}.$$

则

$$(uv)^{(m+1)}=[(uv)^{(m)}]'=\left(\sum_{k=0}^{m}C_m^k u^{(m-k)}v^{(k)}\right)'$$

$$=\sum_{k=0}^{m}C_m^k[u^{(m-k)}v^{(k)}]'$$

$$=\sum_{k=0}^{m}C_m^k[u^{(m-k+1)}v^{(k)}+u^{(m-k)}v^{(k+1)}]$$

$$=\sum_{k=0}^{m}C_m^k u^{(m-k+1)}v^{(k)}+\sum_{k=0}^{m}C_m^k u^{(m-k)}v^{(k+1)}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}C_m^k u^{(m-k+1)}v^{(k)}+\sum_{k=1}^{m+1}C_m^{k-1}u^{(m-k+1)}v^{(k)} \text{①}$$

$$=u^{(m+1)}v+\sum_{k=1}^{m}C_m^k u^{(m-k+1)}v^{(k)}$$

$$+\sum_{k=1}^{m}C_m^{k-1}u^{(m-k+1)}v^{(k)}+uv^{(m+1)}$$

---

① k 从 0 到 m, 将 k 换成 $k-1$, 则 k 就从 1 到 $m+1$, 即

$$\sum_{k=0}^{m}C_m^k u^{(m-k)}v^{(k+1)}=\sum_{k=1}^{m+1}C_m^{k-1}u^{(m-k+1)}v^{(k)}$$

$$=u^{(m+1)}v+\sum_{k=1}^{m}(C_m^k+C_m^{k-1})①u^{(m-k+1)}v^{(k)}+uv^{(m+1)}$$

$$=u^{(m+1)}v+\sum_{k=1}^{m}C_{m+1}^k u^{(m-k+1)}v^{(k)}+uv^{(m+1)}$$

$$=\sum_{k=0}^{m+1}C_{m+1}^k u^{(m+1-k)}v^{(k)},$$

即 $n=m+1$ 也成立. □

例 7. $y=x^2e^{2x}$, 求 $y^{(20)}$.

解 设 $u=e^{2x}$, $v=x^2$,

$u'=2e^{2x}$, $v'=2x$,

$u''=2^2e^{2x}$, $v''=2$,

…… $v'''=0$.

$u^{(20)}=2^{20}e^{2x}$.

由莱布尼兹公式,有

$$y^{(20)}=u^{(20)}v+C_{20}^1u^{(19)}v'+C_{20}^2u^{(18)}v''$$

$$=2^{20}\cdot e^{2x}\cdot x^2+20\cdot 2^{19}\cdot e^{2x}\cdot 2x+190\cdot 2^{18}\cdot e^{2x}\cdot 2$$

$$=2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95).$$

例 8. $y=x^2\cos x$, 求 $y^{(50)}$.

解 设 $u=\cos x$, 已知 $u^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

$$v=x^2, v'=2x, v''=2, v'''=0.$$

由莱布尼兹公式,有

$$y^{(50)}=x^2\cos\left(x+50\cdot\frac{\pi}{2}\right)+C_{50}^1 2x\cos\left(x+49\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+C_{50}^2 2\cos\left(x+48\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

---

① $C_m^k+C_m^{k-1}=C_{m+1}^k$

$$= -x^2\cos x + 50\cdot 2x(-\sin x) + 1225\cdot 2\cos x$$

$$= -x^2\cos x - 100x\sin x + 2450\cos x.$$

例 9. 多项式 $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ 称为勒让德① n 次多项式. 求 $P_n(1)$ 与 $P_n(-1)$.

解 将 $P_n(x)$ 改写为 $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x+1)^n(x-1)^n$.

设 $u=(x+1)^n,\quad v=(x-1)^n$.

$$\frac{d(x+1)^n}{dx}=n(x+1)^{n-1},$$

$$\frac{d(x-1)^n}{dx}=n(x-1)^{n-1},$$

$$\frac{d^2(x+1)^n}{dx^2}=n(n-1)(x+1)^{n-2},$$

$$\frac{d^2(x-1)^n}{dx^2}=n(n-1)(x-1)^{n-2},$$

……

$$\frac{d^{n-1}(x+1)^n}{dx^{n-1}}=n(n-1)\cdots 2(x+1),$$

$$\frac{d^{n-1}(x-1)^n}{dx^{n-1}}=n(n-1)\cdots 2(x-1),$$

$$\frac{d^n(x+1)^n}{dx^n}=n!,$$

$$\frac{d^n(x-1)^n}{dx^n}=n!.$$

由莱布尼兹公式,有

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\left[(x+1)^n\frac{d^n(x-1)^n}{dx^n}\right.$$

① 勒让德(Legendre 1752—1833)法国数学家.

$$+C_n^1\frac{d(x+1)^n}{dx}\frac{d^{n-1}(x-1)^n}{dx^{n-1}}+\cdots$$

$$+C_n^{n-1}\frac{d^{n-1}(x+1)^n}{dx^{n-1}}\frac{d(x-1)^n}{dx}+C_n^n\frac{d^n(x+1)^n}{dx^n}(x-1)^n\Bigg].$$

在上式等号右端方括号中，从第二项起及以后各项都包含着因式 $x-1$，当 $x=1$ 时，皆为0. 于是，

$$P_n(1)=\frac{1}{2^n n!}(x+1)^n\frac{d^n(x-1)^n}{dx^n}\Bigg|_{x=1}=\frac{1}{2^n n!}2^n n!=1.$$

在上式等号右端方括号中，从倒数第二项起及以前各项都包含着因式 $x+1$，当 $x=-1$ 时，皆为0. 于是，

$$P_n(-1)=\frac{1}{2^n n!}C_n^n\frac{d^n(x+1)^n}{dx^n}(x-1)^n\Bigg|_{x=-1}$$

$$=\frac{1}{2^n n!}n!(-2)^n=(-1)^n.$$

三、高阶微分

函数 $y=f(x)$ 的高阶微分的定义类似于高阶导数的定义.

定义 函数 $y=f(x)$ 的微分 $dy=f'(x)dx$（dx 是常数）的微分，称为函数 $f(x)$ 的**二阶微分**，表为 d^2y. 一般情况，函数 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶微分 $d^{n-1}y$ 的微分，称为函数 $f(x)$ 的 **n 阶微分**，表为 d^ny. 二阶以及二阶以上的微分，统称为**高阶微分**.

根据高阶微分的定义，函数 $y=f(x)$ 的各阶微分是

$$dy=f'(x)dx.$$

$$d^2y=d(dy)=d(f'(x)dx)=[f'(x)dx]'dx=f''(x)dx^2.$$

$$d^3y=d(d^2y)=d(f''(x)dx^2)=[f''(x)dx^2]'dx$$

$$=f'''(x)dx^3.$$

一般情况

$$d^ny=d(d^{n-1}y)=d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1})$$

$$=[f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}]'dx=f^{(n)}(x)dx^n,$$

即 $$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n \quad 或 \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}. \tag{4}$$

注 $$dx^n = (dx)^n, \quad dx^n \neq d(x^n).$$

在高阶微分概念之前，函数 $y=f(x)$ 的 n 阶导数的符号 $\frac{d^n y}{dx^n}$ 是一个完整的符号，不具有商的意义．在高阶微分概念之后，$d^n y$ 是函数 $y=f(x)$ 的 n 阶微分．由(4)式知，函数 $y=f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)=\frac{d^n y}{dx^n}$ 是函数 $y=f(x)$ 的 n 阶微分 $d^n y$ 与自变量微分 dx 的 n 次方 dx^n 的商.

由(4)式，n 阶微分 $d^n y$ 是 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 与 dx^n 的乘积．于是求 n 阶微分主要就是求 n 阶导数．因此，求高阶微分之例从略.

练习题 5.5

1．求下列函数的二阶导数与二阶微分：

(1) $y=\sin ax+\cos bx$，　　(2) $y=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$，

(3) $y=\frac{x^2+1}{(x+1)^3}$，　　(4) $y=\operatorname{arctg}\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

2．求下列方程所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的二阶导数：

(1) $x^2+y^2=r^2$，　　(2) $y^2=2px$，

(3) $x^2-xy+y^2=1$，　　(4) $y^2+2\ln y=x^4$.

3．求下列函数的 n 阶导数：

(1) $y=xe^x$，　　(2) $y=\frac{1-x}{1+x}$，

(3) $y=x\sin x$，　　(4) $y=(x^2+2x+2)e^{-x}$.

4．证明：函数 $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$ ($C_1, C_2, \lambda_1, \lambda_2$ 都是常数)满足方程

$$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y=0.$$

5．已知 $e^{xy}=a^x b^y$，证明：

$$(y-\ln a)y''-2(y')^2=0.$$

6．设函数 $z=g(y)$，$y=f(x)$ 都存在二阶导数，求复合函数 $z=g[f(x)]$ 的二阶导数.

7. 已知参数方程 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$和 y 关于 x 的导数公式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

证明：$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt}\right)\bigg/\frac{dx}{dt}=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

8. 应用第 7 题的公式，求下列参数方程的二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $\begin{cases}x=2t-t^2,\\ y=3t-t^3.\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t).\end{cases}$

9. 设有 n 次多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$. 证明，若将它改写为

$$f(x)=b_n(x-a)^n+b_{n-1}(x-a)^{n-1}+\cdots+b_0,$$

则 $$b_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(a),k=0,1,2,\cdots,n.\ f^{(0)}(a)=f(a).$$

10. 证明，函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

在 $x=0$ 存在任意阶导数，且 $f^{(n)}(0)=0,n=1,2,\cdots$.

*　　*　　*　　*

11. 证明：若 $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$，有 $f'(x)>0$，且 $f''(x_0)$存在，则函数 $y=f(x)$的反函数 $x=\varphi(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 存在二阶导数，且

$$\varphi''(y_0)=-\frac{f''(x_0)}{[f'(x_0)]^3}.$$

12. 证明：函数 $f(x)$是 n 次多项式，a 是方程 $f(x)=0$ 的 k $(k\leqslant n)$ 重根 $\Longleftrightarrow$

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(k-1)}(a)=0,\text{ 而 } f^{(k)}(a)\neq0.$$

13. 证明：勒让德多项式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^nn!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

满足微分方程

$$(1-x^2)P_n''(x)-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)=0.$$

第六章　微分学基本定理及其应用

导数是研究函数性态的重要工具，仅从导数概念出发并不能充分体现这种工具的作用，它需要建立在微分学的基本定理的基础之上，这些基本定理统称为“**中值定理**”.

§6.1　中 值 定 理

一、洛尔[①]定理

首先给出极值概念.

定义　设函数 $f(x)$ 在区间 I 有定义. 若 $x_0 \in I$，且存在 x_0 的某邻域 $U(x_0) \subset I$，$\forall x \in U(x_0)$，有

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad (f(x) \geqslant f(x_0)),$$

则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的**极大点**（**极小点**），$f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的**极大值**（**极小值**）.

极大点与极小点统称为**极值点**，极大值与极小值统称为**极值**.

极值点 x_0 必在区间 I 的内部（即不能是区间 I 的端点），$f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的极值是与函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 上函数值 $f(x)$ 比较而言的. 因此极值是一个局部概念. 函数 $f(x)$ 在区间 I 上可能有很多的极大值（或极小值），但只能有一个最大值（如果存在最大值）和一个最小值（如果存在最小值）. 若函数 $f(x)$ 在区间 I 的内部某点 x_0 取最大值（最小值），则 x_0 必是函数 $f(x)$ 的极大点（极小点）.

---

① 洛尔（Rolle　1652～1719）法国数学家.

费尔马[①]定理 设函数 $f(x)$ 在区间 I 有定义. 若函数 $f(x)$ 在 x_0 可导, 且 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点, 则

$$f'(x_0)=0.$$

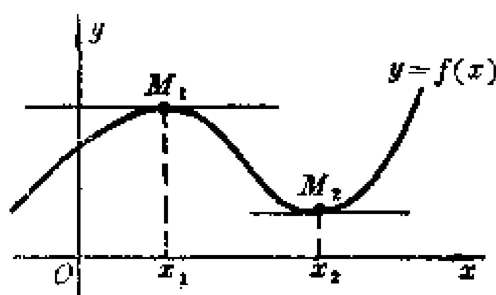


图 6.1

几何意义 若曲线 $y=f(x)$ 上一点 $(x_0,f(x_0))$ 存在切线, 且 x_0 是它的极值点, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线平行 x 轴. 如图 6.1, x_1 是极大点, x_2 是极小点, 曲线 $y=f(x)$ 上的点 $M_1(x_1,f(x_1))$ 与点 $M_2(x_2,f(x_2))$ 的切线都平行 x 轴.

证法 证明 x_0 是极大点的情况. 同法可证 x_0 是极小点的情况. 只须证明

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0.$$

证明 不妨设, x_0 是函数 $f(x)$ 的极大点, 即存在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)\subset I$, $\forall x\in U(x_0)$, 有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\quad 或\quad f(x)-f(x_0)\leqslant 0.$$

由已知条件和极限的保号性:

当 $x>x_0$ 时, 有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0.$$

从而,

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0.$$

当 $x<x_0$ 时, 有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0.$$

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0.$$

已知函数 $f(x)$ 在 x_0 可导, 有

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=0.\ \square$$

洛尔定理 若函数 $f(x)$ 满足下列条件:

① 费尔马(Fermat 1601～1665)法国数学家.

1) 在闭区间$[a,b]$连续;

2) 在开区间(a,b)可导;

3) $f(a)=f(b)$,

则在(a,b)内至少存在一点c,使

$$f'(c)=0.$$

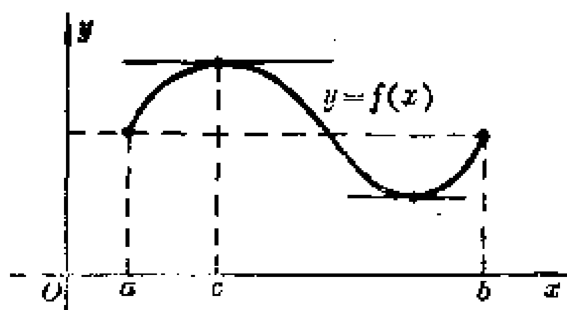


图 6.2

几何意义 在闭区间$[a,b]$上有连续曲线$y=f(x)$,曲线上每一点都存在切线,在闭区间$[a,b]$的两个端点a与b的函数值相等,即$f(a)=f(b)$,则曲线上至少有一点,过该点的切线平行x轴(如图 6.2).

证法 应用费尔马定理,只须证明,函数$f(x)$在(a,b)内至少存在一个极值点c.

证明 由条件 1) 和 § 3.2 定理 5,函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$取到最小值m与最大值M.下面分两种情况讨论:

如果$m=M$,则$f(x)$在闭区间$[a,b]$是常数函数.于是,

$\forall x\in(a,b)$,有$f'(x)=0$,即(a,b)内任意一点都可取作c,使$f'(c)=0$.

如果$m<M$,由条件 3),函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$两个端点a与b的函数值$f(a)$与$f(b)$不可能同时一个是最大值一个是最小值,因此函数$f(x)$在开区间(a,b)内至少存在一个极值点c(如图 6.2).根据费尔马定理,有

$$f'(c)=0.\ \square$$

二、拉格朗日[①]定理

拉格朗日定理 若函数$f(x)$满足下列条件:

1) 在闭区间$[a,b]$连续;

2) 在开区间(a,b)可导,

① 拉格朗日(Lagrange 1736~1813)法国数学家.

则在开区间(a,b)内至少存在一点c，使

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad (1)$$

几何意义 如图6.3，在$\triangle ABP$中，$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\operatorname{tg}\alpha$，其中$\alpha$是割线$AB$与$x$轴的交角，即$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$是通过曲线$y=f(x)$上二点$A(a,f(a))$与$B(b,f(b))$的割线斜率．拉格朗日定理的几何意义是：若闭区间$[a,b]$上有一条连续曲线，曲线上每一点都存在切线，则曲线上至少存在一点$M(c,f(c))$，过点M的切线平行于割线AB.

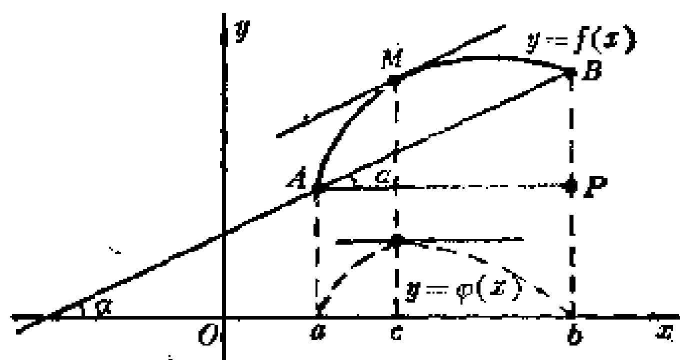


图 6.3

证法 不难看到，当$f(a)=f(b)$时，拉格朗日定理就成为洛尔定理，即洛尔定理是拉格朗日定理的特殊情况．为了应用特殊的洛尔定理证明一般的拉格朗日定理，需要作一个辅助函数$\varphi(x)$，使它满足洛尔定理的条件．由平面解析几何知，通过二点$A(a,f(a))$与$B(b,f(b))$的割线方程(函数)是

$$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

设辅助函数$\varphi(x)$是函数$f(x)$与割线AB的方程之差，即

$$\varphi(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right].$$

不难验证，辅助函数$\varphi(x)$满足洛尔定理的条件．辅助函数$y=$

$\varphi(x)$的图象是闭区间$[a,b]$的一条新曲线，图 6.3的虚线．若曲线 $y=\varphi(x)$上一点$(c,\varphi(c))$的切线平行于x轴，则曲线$y=f(x)$上一点$(c,f(c))$的切线就平行于割线AB.

证明 作辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

可知函数$\varphi(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，又有$\varphi(a)=\varphi(b)=0$，根据洛尔定理，在(a,b)内至少存在一点c，使$\varphi'(c)=0$. 而

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

于是，
$$\varphi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

即
$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \quad \square$$

因为不论$a<b$或$a>b$，比值$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$不变，所以(1)式对$a<b$或$a>b$都成立，即

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

或
$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a),\quad c\text{在}a\text{与}b\text{之间}.$$

因为$\exists c\in(a,b)\Longleftrightarrow\exists\theta\in(0,1)$，使$c=a+\theta(b-a)$，所以(1)式也常写为

$$f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a),\quad 0<\theta<1$$

或
$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)\cdot h,\qquad 0<\theta<1.$$

拉格朗日定理是微分学最重要的定理之一，也称**微分中值定理**．它是沟通函数与其导数之间的桥梁，是应用导数的局部性研究函数整体性的重要数学工具．

三、柯西定理

柯西中值定理 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足下列条件:

1) 在闭区间 $[a,b]$ 连续;

2) 在开区间 (a,b) 可导，且 $\forall x\in(a,b)$，有 $g'(x)\neq 0$，

则在 (a,b) 内至少存在一点 c，使

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \tag{2}$$

证法 证明方法与证明微分中值定理相同，也是作辅助函数. 辅助函数的作法是将证明微分中值定理时的辅助函数 $\varphi(x)$ 中的单个字母 a,b,x 分别改换为 $g(a),g(b),g(x)$，即辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$

证明 首先证明 $g(b)-g(a)\neq 0$. 用反证法，假设 $g(b)-g(a)=0$，即 $g(b)=g(a)$. 根据洛尔定理，在 (a,b) 内至少存在一点 c；使 $g'(c)=0$，与已知条件矛盾. 其次作辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$

(注意 $g(b)-g(a)\neq 0$，辅助函数 $F(x)$ 才有意义) 不难验证，辅助函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 满足洛尔定理的三个条件. 根据洛尔定理，在 (a,b) 内至少存在一点 c，使 $F'(c)=0$. 而

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x),$$

于是，$F'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0$，

即
$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \ \square$$

不难看到，在柯西中值定理中，当 $g(x)=x$ 时，$g'(x)=1$，$g(a)=a$，$g(b)=b$，则(2)式就是

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),$$

即微分中值定理是柯西中值定理的特殊情况.

四、例

例 1. 若函数 $f(x)$ 在区间 I 可导，且 $\forall x\in I$，有 $f'(x)=0$，则 $\forall x\in I$，有 $f(x)=C$（常数），即 $f(x)$ 是常数函数.

证明 在区间 I 取定一点 x_0 及 $\forall x\in I$. 显然，函数 $f(x)$ 在 $[x_0, x]$ 或 $[x, x_0]$ 上满足微分中值定理的条件. 根据微分中值定理，有

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0),\ \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}.$$

已知 $f'(\xi)=0$，从而

$$f(x)-f(x_0)=0 \quad \text{或} \quad f(x)=f(x_0).$$

设 $f(x_0)=C$，即 $\forall x\in I$，有 $f(x)=C$.

已知常数函数的导数是零，反之，例 1 指出：导数恒为零的函数必是常数函数.

推论 若 $\forall x\in I$（区间），有 $f'(x)=g'(x)$，则 $\forall x\in I$，有 $f(x)=g(x)+C$，其中 C 是常数.

证明 $\forall x\in I$，有 $[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)=0$. 由例 1，有

$$f(x)-g(x)=C \quad \text{或} \quad f(x)=g(x)+C,$$

其中 C 是常数.

例 2. 证明：$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$，$x\in(-1, 1)$.

证明 已知 $\forall x\in(-1, 1)$，有

$$(\arcsin x+\arccos x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0.$$

由例1，$\arcsin x+\arccos x=C$，其中 C 是常数.

为了确定常数 C，令 $x=0$，有

$$C=\arcsin 0+\arccos 0=\frac{\pi}{2},$$

即
$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

例 3. 证明：当 $0<a<b$ 时，有不等式

$$\frac{b-a}{1+b^2}<\operatorname{arctg} b-\operatorname{arctg} a<\frac{b-a}{1+a^2}.$$

证明 函数 $\operatorname{arctg} x$ 在 $[a,b]$ 满足微分中值定理的条件，有

$$\operatorname{arctg} b-\operatorname{arctg} a=(\operatorname{arctg} x)'|_{x=c}(b-a)$$
$$=\frac{b-a}{1+c^2},\qquad a<c<b.$$

而

$$\frac{b-a}{1+b^2}<\frac{b-a}{1+c^2}<\frac{b-a}{1+a^2},$$

有
$$\frac{b-a}{1+b^2}<\operatorname{arctg} b-\operatorname{arctg} a<\frac{b-a}{1+a^2}.$$

例 4. 若函数 $f(x)$ 在 a 的邻域 $U(a)$ 连续，除 a 外可导，且 $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=l$，则函数 $f(x)$ 在 a 可导，且 $f'(a)=l$.

证明 $\forall x\in U(a)$，且 $x\neq a$. 显然，函数 $f(x)$ 在 $[a,x]$ 或 $[x,a]$ 满足微分中值定理的条件，则在 a 与 x 之间至少存在一点 c_x，使

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c_x),$$

当 $x\to a$ 时，有 $c_x\to a$. 从而，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{c_x\to a} f'(c_x).$$

由已知条件，有 $\lim\limits_{c_x\to a} f'(c_x)=l$，即

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{c_x \to a} f'(c_x) = l,$$

由导数定义知，函数 $f(x)$ 在 a 可导，且 $f'(a)=l$.

例 5. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，对 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间任意 μ，则在 (a,b) 内至少存在一点 c，使 $f'(c)=\mu$.

证明 不妨设 $f'_+(a)<f'_-(b)$ ($f'_+(a)>f'_-(b)$ 情况，同法可证)，

$$f'_+(a)<\mu<f'_-(b).$$

作辅助函数 $F(x)=f(x)-\mu x$，有 $F'(x)=f'(x)-\mu$.

显然，$F'_+(a)=f'_+(a)-\mu<0$ 与 $F'_-(b)=f'_-(b)-\mu>0$，

即
$$F'_+(a)=\lim_{x \to a^+} \frac{F(x)-F(a)}{x-a}<0$$

与
$$F'_-(b)=\lim_{x \to b^-} \frac{F(x)-F(b)}{x-b}>0.$$

由极限保号性，

$$\exists x_1 \in (a,b)，使 \quad \frac{F(x_1)-F(a)}{x_1-a}<0,$$

从而
$$F(x_1)-F(a)<0 \text{ 或 } F(x_1)<F(a).$$

$$\exists x_2 \in (a,b)，\quad 使 \quad \frac{F(x_2)-F(b)}{x_2-b}>0,$$

从而
$$F(x_2)-F(b)<0 \text{ 或 } F(x_2)<F(b).$$

于是，$F(x)$ 在 (a,b) 内至少存在一个极小点 c①. 根据费尔马定理，有

$$F'(c)=f'(c)-\mu=0, \quad 即 f'(c)=\mu.$$

例 5 指出，区间 I 的导函数 $f'(x)$ 具有介值性. 虽然导函数 $f'(x)$ 在

---

① 因为函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，所以函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 取最小值. 由于 $\exists x_1, x_2 \in (a,b)$，有 $F(x_1)<F(a)$ 与 $F(x_2)<F(b)$，从而函数 $F(x)$ 在 (a,b) 内至少存在一个极小点 c.

区间 I 可能有间断点，但是它也具有介值性．因此，导函数 $f'(x)$ 不能有第一类间断点(否则，导函数 $f'(x)$ 不具有介值性)，只能有第二类间断点．这是导函数的一个重要性质．

练习题 6.1

1. 证明：函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ 在区间 $(1,3)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$.

2. 举例说明：(1)在洛尔定理中，三个条件有一个不成立，定理的结论就可能不成立．(2)在洛尔定理中，使导数为零的点不是唯一的．

3. 证明：若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 有正根 x_0，则方程

$$na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$$

必存在小于 x_0 的正根．

4. 证明：方程 $x^3-3x+c=0$ 在区间 $(0,1)$ 内没有两个不同的实根．(提示：用反证法)

5. 证明：若函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0$，$|f'(x)|<1$，则 $|f(x)|<|x|$，$x\neq0$.

6. 证明：若函数 $f(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=k$，则

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=k.$$

7. 证明：若 $\forall x\in\mathbb{R}$，有 $f'(x)=a$，则 $f(x)=ax+b$.

8. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，且 $f(a)<f(b)$，则在 (a,b) 内至少存在一点 c，使 $f'(c)>0$.

9. 证明下列不等式：

(1) $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$，

(2) $\dfrac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\dfrac{1}{x}$，　$x>0$，

(3) $ay^{a-1}(x-y)<x^a-y^a<ax^{a-1}(x-y)$，　$a>1,0<y<x$，

(4) $\dfrac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}>\dfrac{\sin x_3-\sin x_2}{x_3-x_2}$，　$0\leqslant x_1<x_2<x_3\leqslant\pi$，

(5) $\dfrac{1}{n^p}<\dfrac{1}{p-1}\left(\dfrac{1}{(n-1)^{p-1}}-\dfrac{1}{n^{p-1}}\right)$，　$p>1,n\geqslant2$.

$\left(\text{提示：在}[n-1,n]\text{考虑函数 } f(x)=\dfrac{1}{x^{p-1}}\right)$

10. 证明:

(1) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x=\frac{\pi}{2}$.

(2) $2\operatorname{arctg}x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi\operatorname{sgn}x,\ |x|\geqslant 1$.

11. 证明:若函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 可导,且 $\forall x\in(a,+\infty)$,有 $|f'(x)|\leqslant M$,其中 M 是常数,则 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 一致连续.

12. 证明:若 $\forall x,y\in\mathbf{R}$,有 $|f(x)-f(y)|\leqslant M(x-y)^2$,其中 M 是常数,则 $f(x)$ 是常数函数.

13. 证明:若函数 $f(x)$ 在 $[0,a)$ 可导,$f'(x)$ 单调增加,且 $f(0)=0$,则函数 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,a)$ 也单调增加.

14. 证明:若函数 $f(x)$ 在 x_0 连续,且 $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$,有 $f'(x)<0$; $\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$,有 $f'(x)>0$,则 x_0 是函数 $f(x)$ 的极小点.

* * * *

15. 证明:若 $c_0+\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{3}+\cdots+\frac{c_n}{n+1}=0$, $c_0,c_1,\cdots,c_n$ 是常数,则方程

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n=0$$

在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

16. 证明:若函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 可导,且 $\forall x\in(a,+\infty)$,有 $|f'(x)|\leqslant M$,M 是常数,则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0.$$

17. 证明:若 n 次多项式函数 $P(x)$ 有 $n+1$ 个零点(即方程 $P(x)=0$ 的实根),则 $P(x)\equiv 0$.

18. 证明:若函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 可导,且

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)$$

则在 $(a,+\infty)$ 内至少存在一点 c,使 $f'(c)=0$.

19. 证明:若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导 $(0<a<b)$,则 $\exists c\in(a,b)$,使

$$f(b)-f(a)=cf'(c)\ln\frac{b}{a}.$$

并用此结果证明

$$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{\xi}-1)=\ln\xi\quad(\xi>0).$$

（提示：前者用柯西中值定理，取 $\varphi(x)=\ln x$. 后者取 $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$，$a=1,b=\xi$）

20. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导，则 $\exists\xi\in(0,1)$，使

$$f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)].$$

21. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 存在二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，$f(c)>0$，其中 $a<c<b$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)<0$.

22. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 存在二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 c，使

$$|f''(c)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

$\left(\text{提示：在区间}\left[a,\frac{a+b}{2}\right]\text{与}\left[\frac{a+b}{2},b\right]\text{用微分中值定理}\right)$

23. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导，且 $f(0)=0$，$\forall x\in[0,1]$，有 $|f'(x)|\leqslant|f(x)|$，则 $f(x)=0$，$x\in[0,1]$.

24. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 可导，$\forall x\in\mathbf{R}$，$|f'(x)|\leqslant k$，且 $k<1$，则函数 $f(x)$ 存在不动点 x，即 $f(x)=x$.

§6.2 洛比达[①]法则

一、$\frac{0}{0}$ 型

约定用"0"表示无穷小，用"∞"表示无穷大．已知两个无穷小之比 $\frac{0}{0}$ 或两个无穷大之比 $\frac{\infty}{\infty}$ 可能有各种不同的情况．因此，求 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 形式的极限都要根据函数的不同类型选用相应的方法，洛比达法则是求 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 形式的极限的简便方法．

---

① 洛比达（L'Hospital 1661～1704）法国数学家．

$\frac{0}{0}$与$\frac{\infty}{\infty}$都称为**待定型**. 约定用"1"表示以1为极限的一类函数，待定型还有五种：

$0\cdot\infty$，1^∞，0^0，∞^0，$\infty_1-\infty_2$.

这五种待定型都可化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$的待定型，即

$$0\cdot\infty=\frac{0}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0}\quad 或\quad 0\cdot\infty=\frac{\infty}{\frac{1}{0}}=\frac{\infty}{\infty}.$$

$$\left.\begin{array}{l}1^\infty=e^{\infty\ln 1}=e^{\infty\cdot 0},\\ 0^0=e^{0\ln 0}=e^{0\cdot\infty},\\ \infty^0=e^{0\ln\infty}=e^{0\cdot\infty}.\end{array}\right\}$$

$$\infty_1-\infty_2=\frac{1}{\frac{1}{\infty_1}}-\frac{1}{\frac{1}{\infty_2}}=\frac{\frac{1}{\infty_2}-\frac{1}{\infty_1}}{\frac{1}{\infty_1\infty_2}}=\frac{0}{0}.$$

洛比达法则 I. 若函数$f(x)$与$\varphi(x)$满足下列条件：

1) 在a的某去心邻域$\mathring{U}(a)$可导，且$\varphi'(x)\neq 0$;

2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ 与 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l$,

则
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l.$$

证法　证明洛比达法则要找到两个函数之比与这两个函数的导数之比之间的联系. 柯西中值定理正是实现这种联系的纽带. 为了使函数$f(x)$与$\varphi(x)$在a满足柯西中值定理的条件，将函数$f(x)$与$\varphi(x)$在a作连续开拓. 这不影响定理的证明，因为讨论函数$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$在a的极限与函数$f(x)$与$\varphi(x)$在a的函数值无关.

证明 将函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在 a 作连续开拓，即设

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x), & x\neq a.\\ 0, & x=a.\end{cases}\qquad \varphi_1(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\neq a,\\ 0, & x=a.\end{cases}$$

$\forall x\in \mathring{U}(a)$. 在以 x 与 a 为端点的区间上函数 $f_1(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 满足柯西中值定理的条件，则在 x 与 a 之间至少存在一点 c，使

$$\frac{f_1(x)-f_1(a)}{\varphi_1(x)-\varphi_1(a)}=\frac{f_1'(c)}{\varphi_1'(c)}.$$

已知 $f_1(a)=\varphi_1(a)=0$，$\forall x\neq a$，有 $f_1(x)=f(x)$，$\varphi_1(x)=\varphi(x)$，$f_1'(c)=f'(c)$，$\varphi_1'(c)=\varphi'(c)$. 从而，

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

因为 c 在 x 与 a 之间，所以当 $x\to a$ 时，有 $c\to a$，由条件 3)，有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=l=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.\quad \square$$

洛比达法则 2. 若函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 满足下列条件：

1) $\exists A>0$，在 $(-\infty,-A)$ 与 $(A,+\infty)$ 可导，且 $\varphi'(x)\neq 0$；

2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$；

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l$，

则
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l.$$

证法 应用换元，设 $x=\dfrac{1}{y}$，就将 $x\to\infty$ 换成 $y\to 0$. 于是，函数 $f\left(\dfrac{1}{y}\right)$ 与 $\varphi\left(\dfrac{1}{y}\right)$ 在 $y=0$ 的邻域内满足洛比达法则 1. 由洛比达法则 1 可证洛比达法则 2.

证明 设 $x=\dfrac{1}{y}$. $x\to\infty\Longleftrightarrow y\to 0$. 从而，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)},$$

其中$\lim\limits_{y\to 0}f\left(\frac{1}{y}\right)=0$与$\lim\limits_{y\to 0}\varphi\left(\frac{1}{y}\right)=0$. 根据洛比达法则 1,有

$$\lim_{y\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{\left[f\left(\frac{1}{y}\right)\right]'}{\left[\varphi\left(\frac{1}{y}\right)\right]'}=\lim_{y\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l,$$

即
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l. \quad \Box$$

应用洛比达法则，而极限$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$仍是$\frac{0}{0}$的待定型. 这时只要导函数 $f'(x)$ 与 $\varphi'(x)$ 仍满足洛比达法则的条件$\Bigg($特别是极限$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$存在$\Bigg)$,则

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{\substack{x\to\infty\\(x\to\infty)}}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

一般情况,若

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},\ \lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)},\ \cdots,\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f^{(n-1)}(x)}{\varphi^{(n-1)}(x)}$$

都是$\frac{0}{0}$的待定型，而导函数$f^{(n-1)}(x)$与$\varphi^{(n-1)}(x)$满足洛比达法则的条件$\Bigg($特别是极限$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}$存在$\Bigg)$，则

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\cdots=\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}.$$

例 1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$ $(a>0,b>0)$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 由洛比达法则 1,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(a^x-b^x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a-b^x\ln b}{1}$$

$$=\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}.$$

例 2. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}x}{\sin\dfrac{1}{x}}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}x}{\sin\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\frac{1}{\cos\dfrac{1}{x}}=1.$$

例 3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x\cos x)'}{(\sin^3 x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3\sin^2 x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3\sin x\cos x}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x)'}{(3\sin x\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3(\cos^2 x-\sin^2 x)}=\frac{1}{3}.$$

例 4. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

二、$\frac{\infty}{\infty}$型

洛比达法则 3. 若函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 满足下列条件:

1) 在 a 的某去心邻域 $\mathring{U}(a)$ 可导,且 $\varphi'(x) \neq 0$;

2) $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$;

3) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$,

则 $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l.$$

证明 只证明 $x \to a^-$ 情况. 同法可证 $x \to a^+$ 情况.

由条件 3), $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_1 \in \mathring{U}(a)$, $\forall \xi$: $x_1 < \xi < a$, 有

$$\left| \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} - l \right| < \varepsilon. \tag{1}$$

取定 x_1. $\forall x \in (x_1, a)$, 函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在区间 $[x_1, x]$ 满足柯西中值定理的条件,根据柯西中值定理, $\exists c \in (x_1, x)$, 有

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{\varphi(x) - \varphi(x_1)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

或 $$\frac{f(x) - f(x_1)}{\varphi(x) - \varphi(x_1)} - l = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} - l, \quad x_1 < c < x.$$

用 $\varphi(x) - \varphi(x_1)$ 乘上式的等号两端,有

$$f(x) - f(x_1) - l[\varphi(x) - \varphi(x_1)]$$
$$= \left[\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} - l\right] [\varphi(x) - \varphi(x_1)]$$

或

$$f(x)-l\varphi(x)=\left[\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}-l\right][\varphi(x)-\varphi(x_1)]+[f(x_1)-l\varphi(x_1)].$$

对上式再除以 $\varphi(x)$，有

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}-l=\left[\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}-l\right]\left[1-\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x)}\right]+\frac{f(x_1)-l\varphi(x_1)}{\varphi(x)}. \qquad (2)$$

由条件 2)，有（x_1 是常数）

$$\lim_{x\to a^-}\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x)}=0 \quad 与 \quad \lim_{x\to a^-}\frac{f(x_1)-l\varphi(x_1)}{\varphi(x)}=0.$$

从而，对上述的 $\varepsilon>0$，$\exists x_2>x_1$，$\forall x$：$x_2<x<a$，同时有

$$\left|\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x)}\right|<1 \quad 与 \quad \left|\frac{f(x_1)-l\varphi(x_1)}{\varphi(x)}\right|<\varepsilon.$$

由于 c：$x_1<c<x$，有 $x_1<c<a$，由(1)式，有

$$\left|\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}-l\right|<\varepsilon.$$

于是，由(2)式，$\forall x$：$x_2<x<a$，有

$$\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}-l\right|\leqslant\left|\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}-l\right|\cdot\left(1+\left|\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x)}\right|\right)+\left|\frac{f(x_1)-l\varphi(x_1)}{\varphi(x)}\right|$$
$$<\varepsilon(1+1)+\varepsilon=3\varepsilon,$$

即
$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=l.$$

同法可证，
$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=l.$$

于是，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l. \quad \square$$

在洛比达法则 3 中，将 $x\to a$ 换成 $x\to\infty$ 亦成立．证法同洛比达法则 2 的证法相同．

例 5. 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}3x}$． $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

解 根据洛比达法则 3，有

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\operatorname{tg}x)'}{(\operatorname{tg}3x)'}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{3}{\cos^2 3x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-6\cos 3x\sin 3x}{-6\cos x\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{6\cos 6x}{2\cos 2x}=\frac{-6}{-2}=3.$$

例 6. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}\quad(\alpha>0).\qquad\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0.$

例 7. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}\quad(a>1,\alpha>0).\ \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

解

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^x\ln a}=\begin{cases}0, & 0<\alpha\leqslant 1,\\ \frac{\infty}{\infty}, & \alpha>1.\end{cases}$$

对常数 $\alpha>1$，$\exists n\in\mathbf{N}$，使 $n-1<\alpha\leqslant n(\alpha-n\leqslant 0)$，逐次应用洛比达法则 3，直到第 n 次，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^x\ln a}=\cdots$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}}{a^x(\ln a)^n}=0.$$

例 6 与例 7 说明，$\forall\alpha>0, a>1$，当 $x\to+\infty$ 时，对数函数 $\ln x$，

幂函数 x^a，指数函数 a^x 都是正无穷大. 这三个函数比较，指数函数增长最快，幂函数次之，对数函数增长最慢.

三、其它待定型

1. $0\cdot\infty$ 型

例 8. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$. $(0\cdot\infty)$

解
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0.$$

例 9. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)$ $(a\neq 0)$. $(\infty\cdot 0)$

解
$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)}{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x-a}{x+a}\cdot\frac{-2a}{(x-a)^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2ax^2}{x^2-a^2}=2a.$$

2. 1^∞ 型

例 10. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^x$ （m 是常数）. (1^∞)

解
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{m}{x}\right)},$$

其中
$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{m}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{m}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{m}{x}}\left(-\frac{m}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{m}{1+\frac{m}{x}}=m,$$

有 $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{m}{x}\right)}=e^m.$$

例 11. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ (1^∞)

$$(a_i>0,\ i=1,2,\cdots,n).$$

解 $$\lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)}{n}},$$

其中 $$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n}{x}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}$$

$$=\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\ln(a_1a_2\cdots a_n)=\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

有 $$\lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

3. ∞^0 型

例 12. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$. (∞^0)

解 $$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x},$$

其中 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0,$$

有 $$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}=e^0=1.$$

4. 0^0 型

例 13. 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}(\text{tg}x)^{\sin x}$. (0^0)

解 $\lim\limits_{x\to0^+}(\text{tg}x)^{\sin x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\sin x\ln\text{tg}x}$.

其中 $$\lim_{x\to0^+}\sin x\ln\text{tg}x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\text{tg}x}{\frac{1}{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\text{tg}x\cos^2x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\sin x}{\cos^2x}=0,$$

有 $$\lim_{x\to0^+}(\text{tg}x)^{\sin x}=e^0=1.$$

5. $\infty-\infty$型

例 14. 求极限$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$. $(\infty-\infty)$

解 $$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}.$$

从上述的例题看到，洛比达法则是求待定型极限的有力工具. 值得注意的是，洛比达法则的条件 3）仅是充分条件，即当极限 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$不存在时，而极限 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$仍可能存在. 例如，求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}.$$

极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}$ 不存在，而极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

却存在.

练习题 6.2

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$，

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$，

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$，

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$，

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arcctg}x}$，

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}3x}$，

(7) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x}$，

(8) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$，

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$，

(10) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$，

(11) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$，

(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{m}{x}\right)^x$，

(13) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi}$，

(14) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}$，

(15) $\lim\limits_{x\to0^+}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

2. 证明：若 $f''(a)$ 存在，则

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{h^2}=f''(a).$$

*　　*　　*　　*

3. 问 a 与 b 取何值，有极限

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{a}{x^2}+b\right)=0.$$

4. 问 c 取何值，有极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=4.$$

5. 求下列极限，并指出为什么不能应用洛比达法则：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$.　　　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

6. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有界与可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=b$，则 $b=0$.

§6.3 泰 勒① 公 式

一、泰勒公式

在初等函数中，多项式是最简单的函数．因为多项式函数的运算只有加、减、乘三种运算．如果能将有理分式函数，特别是无理函数和初等超越函数用多项式函数近似代替，而误差又能满足要求，显然，这对函数性态的研究和函数值的近似计算都有重要意义．那么一个函数具有什么条件才能用多项式函数近似代替呢？这个多项式函数的各项系数与这个函数有什么关系呢？用多项式函数近似代替这个函数误差又怎样呢？

首先讨论 n 次多项式函数

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n.$$

由练习题 5.5 第9题，总能将它按着 $(x-a)$ 的幂表为（或展开为）：

$$P(x)=b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\cdots+b_n(x-a)^n,$$

其中　　$b_k=\dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}$，$k=0,1,\cdots,n$.　　$P^{(0)}(a)=P(a)$.

或　　$$P(x)=P(a)+\frac{P'(a)}{1!}(x-a)+\frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

① 泰勒（B. Taylor 1685～1731）英国数学家．

由此可见，将 n 次多项式函数 $P(x)$ 按着 $(x-a)$ 的幂展开，它每项的系数 b_k 由多项式函数 $P(x)$ 唯一确定，即 $b_k=\frac{P^{(k)}(a)}{k!}$.

若任意一个函数 $f(x)$（不一定是多项式函数），只要函数 $f(x)$ 在 a 存在 n 阶导数，总能形式地写出一个相应的 n 次多项式

$$T_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

称为函数 $f(x)$ 在 a 的 **n 次泰勒多项式**.

将函数 $f(x)$ 与它的 n 次泰勒多项式 $T_n(x)$ 的差，表为

$$R_n(x)=f(x)-T_n(x) \quad 或 \quad f(x)=T_n(x)+R_n(x).$$

$R_n(x)$ 称为函数 $f(x)$ 在 a 的 **n 次泰勒余项**，简称**泰勒余项**.

下面讨论用泰勒多项式 $T_n(x)$ 近似代替函数 $f(x)$，其泰勒余项 $R_n(x)$ 的性质（定性的和定量的）. 这是本节讨论的主要问题. 关于 $R_n(x)$ 的定性的性质有下面的定理：

定理 1.（**泰勒定理**）若函数 $f(x)$ 在 a 存在 n 阶导数①，则 $\forall x\in U(a)$，有

$$f(x)=T_n(x)+o[(x-a)^n], \tag{1}$$

其中
$$T_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n;$$

$R_n(x)=o[(x-a)^n](x\to a)$，即 $R_n(x)$ 是比 $(x-a)^n$ 的高阶无

---

① $f^{(n)}(a)$ 存在，即极限 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}=f^{(n)}(a)$ 存在. 从而 $f^{(n-1)}(x)$ 在 $U(a)$ 存在，且在 a 连续. 因为 $f^{(n-1)}(x)$ 在 $U(a)$ 存在，所以 $f^{(n-2)}(x)$ 在 $U(a)$ 可导（当然连续），一直推去下. $f^{(n)}(a)$ 存在意味着：

1) $f^{(n-1)}(x)$ 在 $U(a)$ 存在，且在 a 连续.

2) $f^{(n-2)}(x),f^{(n-3)}(x),\cdots,f(x)$ 在 $U(a)$ 可导.

穷小.

(1) 式称为函数 $f(x)$ 在 a (展开)的泰勒公式.

证法　由高阶无穷小的定义,只须证明

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-a)^n}=0.$$

这是$\frac{0}{0}$的待定型,应用 $n-1$ 次洛比达法则.

证明　$R_n(x)=f(x)-T_n(x)$

$$=f(x)-\left[f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right].$$

$$R'_n(x)=f'(x)-\left[f'(a)+\frac{f''(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}\right].$$

$$R''_n(x)=f''(x)-\left[f''(a)+\frac{f'''(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}\right].$$

……

$$R^{(n-1)}(x)=f^{(n-1)}(x)-\left[f^{(n-1)}(a)+\frac{f^{(n)}(a)}{1!}(x-a)\right].$$

(对它不能再求导数) 当 $x\to a$ 时,显然, $R_n(x)$, $R'_n(x)$, …, $R^{(n-1)}(x)$以及$(x-a)^k$ ($k\in\mathbb{N}$) 都是无穷小. 于是,由洛比达法则,有

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{R'_n(x)}{n(x-a)^{n-1}}=\lim_{x\to a}\frac{R''_n(x)}{n(n-1)(x-a)^{n-2}}=\cdots$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)}=\frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\left[\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}-f^{(n)}(a)\right]$$

$$=\frac{1}{n!}[f^{(n)}(a)-f^{(n)}(a)]=0. \quad \square$$

特别是，当 $a=0$ 时（函数 $f(x)$ 在 0 存在 n 阶导数），(1)式是

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n),$$

称为**马克劳林公式**.

定理 1 给出的余项 $R_n(x)=o[(x-a)^n]$ 称为**皮亚诺余项**. 皮亚诺余项 $o[(x-a)^n]$ 只是给出余项（或误差）的定性描述，它不能估算余项（或误差）$R_n(x)$ 的数值. 因此还要进一步给出余项 $R_n(x)$ 的定量公式.

定理 2.（泰勒中值定理） 若函数 $f(x)$ 在 $U(a)$ 存在 $n+1$ 阶导数，$\forall x\in\mathring{U}(a)$，函数 $G(t)$ 在以 a 与 x 为端点的闭区间 I 连续，在其开区间可导，且 $G'(t)\neq 0$，则 a 与 x 之间至少存在一点 c，使

$$\begin{aligned}f(x)=f(a)&+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots\\&+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!G'(c)}(x-c)^n[G(x)-G(a)],\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n!G'(c)}(x-c)^n[G(x)-G(a)]$.

证法　应用柯西中值定理.

证明　$\forall t\in I$，设（将 n 次泰勒多项式 $T_n(x)$ 中的 a 换为 t）

$$\begin{aligned}F(t)=f(t)&+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+\cdots\\&+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n.\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}F'(t)=f'(t)-f'(t)&+\frac{f''(t)}{1!}(x-t)-\frac{f''(t)}{1!}(x-t)\\&+\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2+\cdots-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\end{aligned}$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

不难看到，函数 $F(t)$ 与 $G(t)$ 在闭区间 I 连续，在其开区间可导，且 $G(t)\neq 0$，满足柯西中值定理的条件，根据柯西中值定理，在 a 与 x 之间至少存在一点 c，使

$$\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(c)}{G'(c)}=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!G'(c)}(x-c)^n,$$

或
$$F(x)-F(a)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!G'(c)}(x-c)^n[G(x)-G(a)]. \tag{3}$$

已知
$$F(x)=f(x),$$

$$F(a)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

将它们代入(3)式之中，移项，有

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!G'(c)}(x-c)^n[G(x)-G(a)],$$

其中
$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!G'(c)}(x-c)^n[G(x)-G(a)].\quad \square$$

由于函数 $G(t)$ 是任意的，(2)式中的余项 $R_n(x)$ 是很为一般的。今后主要应用 $G(t)$ 的两种特殊情况：

一是，取 $G(t)=(x-t)^{n+1}$，它满足定理 2 的条件，有

$$G'(t)=-(n+1)(x-t)^n,\quad G(x)=0;\quad G(a)=(x-a)^{n+1}.$$

将它们代入 $R_n(x)$ 之中，有

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\qquad c \text{ 在 } a \text{ 与 } x \text{ 之间},$$

称为**拉格朗日余项**。带有拉格朗日余项的泰勒公式与马克劳林公式分别是

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

$$c \text{ 在 } a \text{ 与 } x \text{ 之间.} \qquad (4)$$

与 $$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad c \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间.}$$

若将 x 表为 $a+h$(即 $x=a+h$)，则带有拉格朗日余项的泰勒公式(4)是如下形式：

$$f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}, \ 0<\theta<1.$$

二是，取 $G(t)=x-t$，它也满足定理 2 的条件，有

$$G'(t)=-1, \quad G(x)=0, \quad G(a)=x-a.$$

将它们代入 $R_n(x)$之中，有

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-a), \quad c \text{在 } a \text{ 与 } x \text{ 之间,}$$

称为柯西余项. 带有柯西余项的马克劳林公式是

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1},$$

$$0<\theta<1.$$

二、常用的几个展开式

给出几个常用的基本初等函数的马克劳林公式：

1. $f(x)=e^x$.

已知 $f^{(n)}(x)=e^x, f^{(n)}(0)=1$. 取拉格朗日余项，有

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},\quad 0<\theta<1.$$

2. $f(x)=\sin x$.

已知 $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$,

$$f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n\text{ 是偶数}, n=2k,\\ (-1)^k, & n\text{ 是奇数}, n=2k+1.\end{cases}$$

$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0, f'''(0)=-1,\cdots$, 以后依次"0, 1, 0, -1"循环，设 $n=2k$，有

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+R_{2k}(x).$$

拉格朗日余项是

$$R_{2k}(x)=\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\sin\left(\theta x+\frac{2k+1}{2}\pi\right)$$

$$=(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos\theta x,\quad 0<\theta<1.$$

$$|R_{2k}(x)|=\left|(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos\theta x\right|\leqslant\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

当 $k=1$ 时，多项式 $y=x$，误差不超过$\frac{|x|^3}{3!}$.

当 $k=2$ 时，多项式 $y=x-\frac{x^3}{3!}$，误差不超过$\frac{|x|^5}{5!}$.

当 $k=3$ 时，多项式 $y=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$，误差不超过$\frac{|x|^7}{7!}$.

它们有明显的几何意义. 图 6.4 画出了正弦函数和上述三个多项式函数的图象($x\geqslant 0$). 在 $x=0$ 附近，多项式的次数越高，多项式函数的图象与正弦函数的图象越接近，即多项式的次数越高，误差也越小.

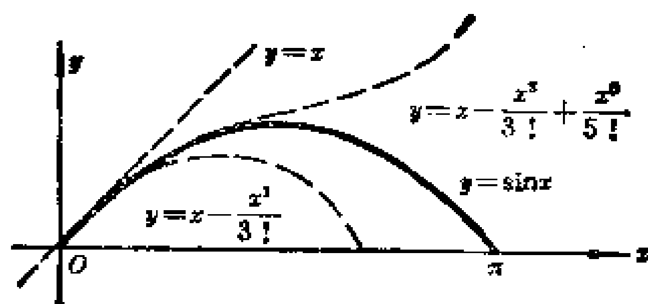


图 6.4

3. $f(x)=\cos x$

已知 $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$,

$$f^{(n)}(0)=\cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^k, & n\text{ 是偶数}, n=2k,\\ 0, & n\text{ 是奇数}, n=2k-1.\end{cases}$$

有

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+R_{2k+1}(x).$$

拉格朗日余项是

$$R_{2k+1}(x)=(-1)^{k+1}\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\cos\theta x,\quad 0<\theta<1.$$

4. $f(x)=\ln(1+x)$.

已知 $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$,

$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$, 有

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x).$$

拉格朗日余项是

$$R_n(x)=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},\qquad 0<\theta<1.$$

柯西余项是

$$R_n(x)=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n,\qquad 0<\theta<1.$$

5. $f(x)=(1+x)^\alpha$，其中 $\alpha\in\mathbf{R}$.

已知 $f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$,

$$f^{(n+1)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1},$$

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1),$$

有

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$$

柯西余项是

$$R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1-\theta)^n}{n!(1+\theta x)^{n-\alpha+1}}x^{n+1},\quad 0<\theta<1.$$

特别是，$\alpha=n\in\mathbf{N}$，$f^{(n+1)}(x)\equiv 0$. 于是，$\forall k\geqslant n$，有 $R_k(x)\equiv 0$. 展开式就是我们熟知的二项式公式：

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots2\cdot1}{n!}x^n.$$

练习题 6.3

1. 将下列函数在指定点展成泰勒公式(到 $n=6$)：

(1) $f(x)=\sin x$，在 $x=\frac{\pi}{4}$，　　(2) $f(x)=e^{-x}$，在 $x=a$，

(3) $f(x)=x^5-x^2+2x-1$，在 $x=-1$，

(4) $f(x)=\sqrt{x}$，在 $x=1$.

2. 将下列函数展成马克劳林公式(到指定的次数)：

(1) $\sqrt[m]{a^m+x}$ $(a>0)$，到 x^2 项，　(2) e^{2x-x^2}，到 x^5 项，

(3) $\frac{x}{e^x-1}$，到 x^4 项，　　(4) $\mathrm{tg}x$，到 x^5 项.

3. 证明：若函数 $f(x)$ 在 0 的邻域是偶函数(奇函数)，且 $f(x)$ 在 0 存在各阶导数，则 $f(x)$ 的马克劳林公式只含有 x 的偶数次幂(奇数次幂)的项.

4. 应用泰勒公式近似计算下列各数，并估计误差：

(1) $\sqrt[3]{30}$，　　(2) $\sqrt{e}$，

(3) $\ln 1.2$.

5. 用泰勒公式证明练习题5.5第12题.

6. 证明:若 $\forall x\in(a,b)$,有 $f''(x)\geqslant 0$,且任意 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in(a,b)$,则有不等式

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)].$$

(提示:令 $x_0=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$,将 $f(x_i)$ 在 x_0 展开:

$$f(x_i)=f(x_0)+(x_i-x_0)f'(x_0)+\frac{1}{2}(x_i-x_0)^2f''(\xi_i),$$

其中 ξ_i 在 x_i 与 x_0 之间$(i=1,2,\cdots,n)$. 于是,

$$f(x_i)\geqslant f(x_0)+(x_i-x_0)f'(x_0)).$$

*　　　　*　　　　*　　　　*

7. 证明:若 $f^{(n+1)}(x)$在 $U(a)$ 连续,$a+h\in U(a)$,有

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h)\quad 0<\theta<1,$$

且 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$,则

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}.$$

(提示:将$\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h)$写成

$$\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta_1 h),0<\theta_1<1.)$$

8. 设 $P(x)$是 n 次多项式函数. 证明:

1) 若 $P(a),P'(a),\cdots,P^{(n)}(a)$都是正数,则 $P(x)$在$(a,+\infty)$ 无零点.

2) 若 $P(a),P'(a),\cdots,P^{(n)}(a)$正负号相间,则 $P(x)$在$(-\infty,a)$无零点.

9. 证明:若函数 $f(x)$在$(a,+\infty)$二次可微. 设

$$M_k=\sup\{|f^{(k)}(x)|\,|\,x\in(a,+\infty)\},k=0,1,2,f^{(0)}(x)=f(x),$$

则 $M_1^2\leqslant 4M_0M_2$. (提示:$\forall x\in(a,+\infty)$. $\forall h>0$,将 $f(x+2h)$ 在 x 展成泰勒公式,移项整理,有

$$f'(x)=\frac{1}{2h}[f(x+2h)-f(x)]-hf''(\xi),\ \xi\in(x,x+2h).$$

于是,$|f'(x)|\leqslant hM_2+\frac{M_0}{h}$. 令 $h=\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$. 可证 $M_2\neq 0$.)

10. 证明:若函数 $f(x)$在 R 二次可微,设

$$M_k=\sup\{|f^{(k)}(x)|\,|\,x\in\mathbf{R}\},k=0,1,2,f^{(0)}(x)=f(x),$$

则 $M_1^2\leqslant 2M_0M_2$. （提示：见第 9 题的提示.）

§6.4 导数在研究函数上的应用

一、函数的单调性

中学《代数》用代数方法讨论了一些函数的性态：如单调性、极值性、奇偶性、周期性等. 由于受方法的限制，讨论得既不深刻也不全面，且计算繁琐，也不易掌握其规律. 导数和微分学基本定理为我们深刻、全面地研究函数的性态提供了有力的数学工具.

设曲线 $y=f(x)$ 其上每一点都存在切线. 若切线与 x 轴正方向的夹角都是锐角，即切线的斜率 $f'(x)>0$，则曲线 $y=f(x)$ 必是严格增加，如图 6.5；若切线与 x 轴正方向的夹角是钝角，即切线的斜率 $f'(x)<0$，则曲线 $y=f(x)$ 必是严格减少，如图 6.6. 由此可见，应用导数的符号能够判别函数的单调性. 有下面的定理：

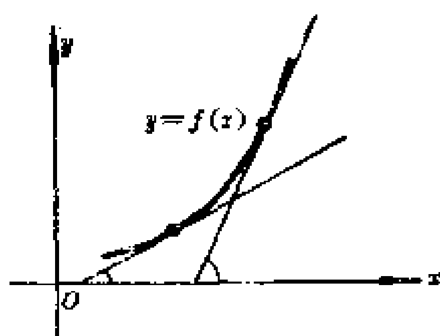


图 6.5

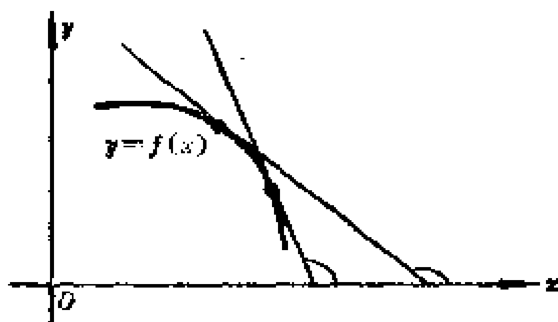


图 6.6

定理 1 设函数 $f(x)$ 在区间 I 可导. 函数 $f(x)$ 在区间 I 单调增加(单调减少) $\Longleftrightarrow \forall x\in I$，有 $f'(x)\geqslant 0\,(f'(x)\leqslant 0)$.

证明 只给出单调增加情况的证明，同法可证单调减少情况.

必要性($\Rightarrow$) $\forall x\in I$，取 $x+\Delta x\in I\,(\Delta x\neq 0)$（若 x 是区间 I 的端点，则只讨论 $\Delta x>0$ 或 $\Delta x<0$）. 已知函数 $f(x)$ 在区间 I 单调

增加.

当 $\Delta x>0$ 时，有	当 $\Delta x<0$ 时，有
$f(x)\leqslant f(x+\Delta x)$	$f(x+\Delta x)\leqslant f(x)$
或 $f(x+\Delta x)-f(x)\geqslant 0$	$f(x+\Delta x)-f(x)\leqslant 0$

从而，
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

已知函数 $f(x)$ 在 x 可导，根据 §2.4 定理 3 的推论 1，$\forall x\in I$，有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

充分性($\Longleftarrow$)　$\forall x_1,x_2\in I$，且 $x_1<x_2$. 函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 满足微分中值定理的条件，有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\qquad x_1<\xi<x_2.$$

已知 $f'(\xi)\geqslant 0$，$x_2-x_1>0$，有

$$f(x_2)-f(x_1)\geqslant 0\quad 或\quad f(x_1)\leqslant f(x_2),$$

即函数 $f(x)$ 在区间 I 单调增加. □

定理 2. (严格单调的充分条件)若函数 $f(x)$ 在区间 I 可导，$\forall x\in I$，有 $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$)，则函数 $f(x)$ 在区间 I 严格增加(严格减少).

证明　只给出严格增加情况的证明. 同法可证严格减少情况.

$\forall x_1,x_2\in I$，且 $x_1<x_2$，函数 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 满足微分中值定理的条件，有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\qquad x_1<\xi<x_2.$$

已知 $f'(\xi)>0$，$x_2-x_1>0$，有

$$f(x_2)-f(x_1)>0\quad 或\quad f(x_1)<f(x_2),$$

即函数 $f(x)$ 在区间 I 严格增加. □

定理 2 只是函数严格单调的充分条件而不是必要条件. 事实上，可以证明，$\forall x\in I$，$f'(x)\geqslant 0$ ($f'(x)\leqslant 0$)，而使 $f'(x)=0$ 的点 x

仅是一些孤立的点$\Longleftrightarrow$函数$f(x)$在区间I严格增加(严格减少)。证明从略. 例如,函数$f(x)=x^3$.

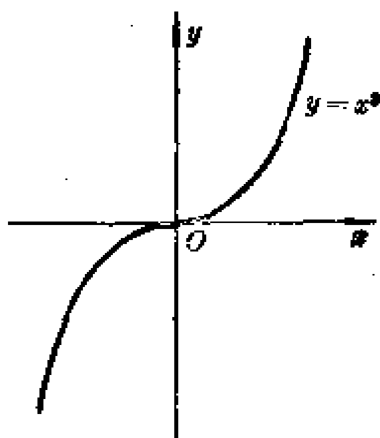


图 6.7

$$\forall x\in\mathbf{R}, f'(x)=3x^2\geqslant 0,$$

而使$f'(x)=3x^2=0$的点是孤立的点0. 于是,函数$f(x)=x^3$在$\mathbf{R}$严格增加. 如图6.7.

根据定理2,讨论可导函数$f(x)$的严格单调区间可按下列步骤进行:

1) 确定函数$f(x)$的定义域;

2) 求导函数$f'(x)$的零点(或方程$f'(x)=0$的根);

3) 用零点将定义域分成若干开区间;

4) 判别导函数$f'(x)$在每个开区间的符号. 根据定理2,确定函数$f(x)$的严格增加或严格减少.

例1. 讨论函数$f(x)=x^3-6x^2+9x-2$的严格单调性.

解 函数$f(x)$的定义域是$\mathbf{R}$.

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3).$$

令$f'(x)=0$,其根是1与3,它们将$\mathbf{R}$分成三个区间:

$$(-\infty,1),(1,3),(3,+\infty).$$

因为导函数$f'(x)$在每个区间上的符号不变,所以$f'(x)$在区间某一点的符号就是导函数$f'(x)$在该区间上的符号. 例如,$0\in(-\infty,1)$,而$f'(0)=9>0$,即导函数$f'(x)$在区间$(-\infty,1)$是正号. 不难判别

$$f'(x)\begin{cases}>0, & x\in(-\infty,1)\text{或}x\in(3,+\infty),\\ <0, & x\in(1,3).\end{cases}$$

由定理2,函数$f(x)$在$(-\infty,1)$与$(3,+\infty)$严格增加;在$(1,3)$严格减少. 作表如下:

	$(-\infty,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

其中符号"↗"表严格增加,"↘"表严格减少.

例 2. 讨论函数 $f(x)=e^{-x^2}$ 的严格单调性.

解 函数 $f(x)$的定义域是 R.

$$f'(x)=-2xe^{-x^2}.$$

令 $f'(x)=-2xe^{-x^2}=0$，其根是 0，它将定义域 R 分成两个区间$(-\infty,0)$与$(0,+\infty)$. 作表如下:

	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	−
$f(x)$	↗	↘

例 3. 讨论函数 $f(x)=\sin x+x$ 的严格单调性.

解 函数 $f(x)$的定义域是 R.

$$f'(x)=\cos x+1.$$

令 $f'(x)=\cos x+1=0$,其根是$(2k+1)\pi, k\in\mathbf{Z}$，它们将 R 分成无限个区间

$$((2k-1)\pi,(2k+1)\pi), k\in\mathbf{Z}.$$

$\forall x\in\mathbf{R}, f'(x)\geqslant 0$. 而使 $f'(x)=0$ 的点 $(2k+1)\pi, k\in\mathbf{Z}$,都是 R 孤立的点. 因此函数 $f(x)=\sin x+x$ 在 R 也是严格增加. 作表如下:

	…	$(-5\pi,-3\pi)$	$(-3\pi,-\pi)$	$(-\pi,\pi)$	$(\pi,3\pi)$	$(3\pi,5\pi)$	…
$f'(x)$	…	+	+	+	+	+	…
$f(x)$	…	↗	↗	↗	↗	↗	…

函数不等式是函数之间的大小关系. 应用函数单调性的判别法可证明一些函数的不等式.

例 4. 证明: $\forall x>0$, 有不等式

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

证明 分别证明这两个不等式:

左端不等式 设 $f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$. $f'(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$.

$\forall x>0$, 有 $f'(x)>0$, 从而, 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 严格增加, 且 $f(0)=0$. 于是, $\forall x>0$, 有

$$f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}>0,$$

即 $\forall x>0$, 有 $$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x).$$

右端不等式 设 $g(x)=x-\ln(1+x)$. $g'(x)=\frac{x}{1+x}$.

$\forall x>0$, 有 $g'(x)>0$. 从而, 函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 严格增加, $g(0)=0$. 于是, $\forall x>0$, 有

$$g(x)=x-\ln(1+x)>0,$$

即 $\forall x>0$, 有 $$\ln(1+x)<x.$$

综上所证, $\forall x>0$, 有不等式

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

二、函数的极值与最值

§6.1 给出了函数极值的概念. 怎样求可导函数的极值或极值点呢? §6.1 费尔马定理指出:

若函数在 x_0 可导, 且 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(x_0)=0$, 即可导函数 $f(x)$ 的极值点 x_0 必是方程 $f'(x)=0$ 的根.

定义 可导函数 $f(x)$ 的方程 $f'(x)=0$ 的根 $x_0(f'(x_0)=0)$，称为函数 $f(x)$的**稳定点**.

费尔马定理给出了寻找可导函数极值点的范围，即函数$f(x)$的极值点必在函数 $f(x)$ 的稳定点集合之中. 反之，不成立，即稳定点不一定是极值点. 例如，在$\mathbf{R}$的可导函数 $f(x)=x^3$，由方程$f'(x)=3x^2=0$，解得唯一稳定点 0. 显然，点 0 不是可导函数$f(x)=x^3$ 的极值点，见图 6.7.

那么什么样的稳定点才是极值点呢？有下面两个充分性的判别法：

定理 3.（第一判别法） 若函数$f(x)$在$U(a)$可导，且$f'(a)=0$，$\exists\delta>0$，有

$$f'(x)\begin{cases}>0(<0), \forall x\in(a-\delta, a),\\ <0(>0), \forall x\in(a, a+\delta).\end{cases}$$

则 a 是函数 $f(x)$的极大点（极小点），$f(a)$是极大值（极小值）.

证明 只给出极大点情况的证明，同法可证极小点情况.

已知 a 是函数 $f(x)$的稳定点（函数 $f(x)$在 a 连续），且

$\forall x\in(a-\delta, a)$，有 $f'(x)>0$，从而函数 $f(x)$在$(a-\delta, a]$严格增加，即

$$\forall x\in(a-\delta, a]，有 \quad f(x)\leqslant f(a).$$

$\forall x\in(a, a+\delta)$，有 $f'(x)<0$，从而函数 $f(x)$在$[a, a+\delta)$严格减少，即

$$\forall x\in[a, a+\delta)，有 \quad f(x)\leqslant f(a).$$

于是，$\exists\delta>0, \forall x\in(a-\delta, a+\delta)$，有 $\quad f(x)\leqslant f(a)$，

即 a 是函数 $f(x)$的极大点，$f(a)$是极大值. □

第一判别法指出：导函数 $f'(x)$在稳定点 a 的两侧有不同的符号，a 必是函数 $f(x)$的极值点. 显然，导函数 $f'(x)$在稳定点 a 的两侧有相同的符号，a 不是函数的极值点，列表如下：

	$(a-\delta,a)$	a	$(a,a+\delta)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极大点	↘

	$(a-\delta,a)$	a	$(a,a+\delta)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小点	↗

定理 4.（第二判别法） 若函数 $f(x)$在 a 存在 n 阶导数，且

$$f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0,\ f^{(n)}(a)\neq 0,$$

1) n 是奇数，则 a 不是函数 $f(x)$的极值点；

2) n 是偶数，则 a 是函数 $f(x)$的极值点：

当 $f^{(n)}(a)>0$ 时，a 是函数 $f(x)$极小点，$f(a)$是极小值；

当 $f^{(n)}(a)<0$ 时，a 是函数 $f(x)$极大点，$f(a)$是极大值.

证法　连接函数及其高阶导数的桥梁是泰勒公式. 因此，已知函数 $f(x)$的高阶导数的性质讨论函数 $f(x)$ 的性质要应用泰勒公式.

证明　将函数 $f(x)$ 在 a 展开带有皮亚诺余项的泰勒公式. $\forall x\in U(a)$，有

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o[(x-a)^n].$$

由已知条件(a 又是函数 $f(x)$的稳定点)，有

$$f(x)-f(a)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o[(x-a)^n]. \tag{1}$$

因为(1)式等号右端第二项 $o[(x-a)^n]$是比 $(x-a)^n$ 的高阶无穷小($x\to a$)，所以当 x 充分靠近 a 时，即 $\exists\delta>0$，$\forall x\in(a-\delta,a+\delta)$，(1)式等号右端的符号由第一项的符号决定.

1) n 是奇数.

$\forall x\in(a-\delta,a)$，有$(x-a)^n<0$；$\forall x\in(a,a+\delta)$，有$(x-a)^n>0$，即在 a 的左右侧，$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ 变号，也就是 $f(x)-f(a)$ 变

号．于是，a 不是函数 $f(x)$ 的极值点．

2) n 是偶数

$$\forall x\in(a-\delta,a+\delta)，有 (x-a)^n\geqslant 0.$$

当 $f^{(n)}(a)>0$ 时，$\forall x\in(a-\delta,a+\delta)$，有 $f(x)-f(a)\geqslant 0$，即 a 是函数 $f(x)$ 的极小点，$f(a)$ 是极小值．

当 $f^{(n)}(a)<0$ 时，$\forall x\in(a-\delta,a+\delta)$，有 $f(x)-f(a)\leqslant 0$，即 a 是函数 $f(x)$ 的极大点，$f(a)$ 是极大值．□

判别函数的极值，若函数存在高阶导数，应用第二判别法比较简便．通常是应用它的特殊情况：

若函数 $f(x)$ 在 a 存在二阶导数，且 $f'(a)=0,f''(a)\neq 0(n=2$，是偶数)．1)当 $f''(a)>0$ 时，则 a 是极小点；2)当 $f''(a)<0$ 时，则 a 是极大点．

例 5． 求函数 $f(x)=x^3(x-5)^2$ 的极值．

解 $f'(x)=3x^2(x-5)^2+2x^3(x-5)=5x^2(x-3)(x-5)$．

令 $f'(x)=0$，解得三个稳定点：0，3，5．

应用第一判别法．函数 $f(x)$ 的定义域是 R，稳定点将定义域 R 分成四个区间：$(-\infty,0)$，$(0,3)$，$(3,5)$，$(5,+\infty)$．判别导函数 $f'(x)$ 在四个区间上的符号，列表如下：

	$(-\infty,0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,5)$	5	$(5,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	不是极值点	↗	极大点	↘	极小点	↗

0 不是函数 $f(x)$ 的极值点；3 是函数 $f(x)$ 的极大点，极大值是 $f(3)=108$；5 是函数 $f(x)$ 的极小点，极小值是 $f(5)=0$．

应用第二判别法　求函数 $f(x)$ 的二阶导数．

$$f''(x)=10x(2x^2-12x+15)$$

二阶导函数 $f''(x)$ 在三个稳定点：0，3，5 的值分别是

$$f''(0)=0,\qquad f''(3)=-90<0,\qquad f''(5)=250>0.$$

于是，3 是函数 $f(x)$ 的极大点，极大值是 $f(3)=108$；5 是函数 $f(x)$ 的极小点，极小值是 $f(5)=0$. 在稳定点 0 暂不确定. 求函数 $f(x)$ 的三阶导数，

$$f'''(x)=30(2x^2-8x+5).$$

三阶导函数 $f'''(x)$ 在稳定点 0 的值：$f'''(0)=150\neq 0$. 于是稳定点 0 不是函数 $f(x)$ 的极值点.

例 6. 讨论函数 $f(x)=2\cos x+e^x+e^{-x}$ 的极值.

解 $f'(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x$.

令 $f'(x)=0$，解得一个稳定点 0①.

$$f''(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x,\qquad f''(0)=0.$$

$$f'''(x)=e^x-e^{-x}+2\sin x,\qquad f'''(0)=0.$$

$$f^{(4)}(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x,\qquad f^{(4)}(0)=4>0.$$

于是，稳定点 0 是函数 $f(x)$ 的极小点，极小值是 $f(0)=4$.

函数 $f(x)$ 在区间 I 的最小值和最大值统称为**最值**. 生产实践和科学实验所遇到的“最好”，“最省”，“最大”，“最小”等问题都可归结为数学的最值问题.

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，根据闭区间连续函数的性质，函数 $f(x)$ 必在闭区间 $[a,b]$ 的某点 x_0 取到最小值（最大值）. 一方面，x_0 可能是闭区间 $[a,b]$ 的端点 a 或 b；另一方面，x_0 可能是开区间 (a,b) 内部的点，此时 x_0 必是极小点（极大点）. 因此，若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，在开区间 (a,b) 可导，且 $x_1,\ x_2,\cdots,x_n$ 是函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的所有稳定点，则函数值（$n+2$ 个数）

$$f(a),f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n),f(b)$$

---

① 不难证明，函数 $f'(x)$ 在 R 严格增加，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$，则方程 $f'(x)=0$ 只有唯一一个根.

中最小者就是函数 $f(x)$ 的最小值，最大者就是函数 $f(x)$ 的最大值.

由此可见，求可导函数的最值就归结为求可导函数在稳定点及区间端点函数值中的最值.

下面给出几个最值的应用问题.

例7. 设有一长 8cm、宽 5cm 的矩形铁片，如图 6.8. 在每个角上剪去同样大小的正方形. 问剪去正方形的边长多大，才能使剩下的铁片折起来做成开口盒子的容积为最大.

解 设剪去的正方形的边长为 x. 于是，做成开口盒子的容积 $V(x)$ 是 x 的函数，即

$$V(x)=x(5-2x)(8-2x),$$

其中 $0\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}$. 问题归结为求可导函数 $V(x)$ 在 $\left[0,\frac{5}{2}\right]$ 的最大值.

$$\begin{aligned}V'(x)&=(5-2x)(8-2x)-2x(5-2x)-2x(8-2x)\\&=4(x-1)(3x-10).\end{aligned}$$

令 $V'(x)=0$. 解得稳定点 1 与 $\frac{10}{3}$，其中 $\frac{10}{3}$ 不在 $\left[0,\frac{5}{2}\right]$ 之中，去掉. 只有一个稳定点 1.

比较三个数

$$V(0)=0,\quad V(1)=18,\quad V\left(\frac{5}{2}\right)=0.$$

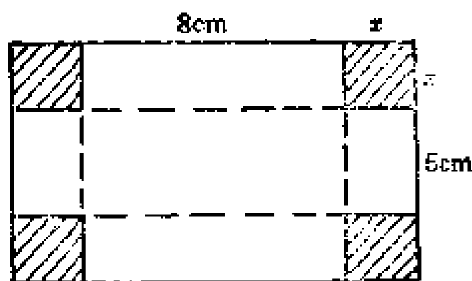


图 6.8

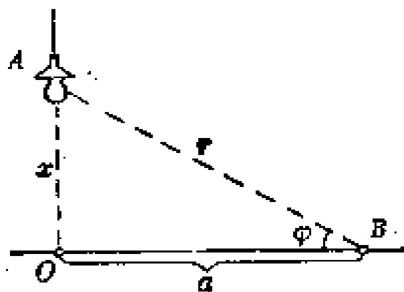


图 6.9

$V(1)=18$ 最大. 于是,剪去的正方形的边长为 1cm 时,做成开口盒子的容积为最大,最大容积是 18 cm³.

例 8. 电灯 A 可在桌面点 O 的垂直线上移动,如图 6.9. 在桌面上有一点 B 距点 O 的距离为 a. 问电灯 A 与点 O 的距离多远,可使点 B 处有最大的照度?

解 设 $AO=x, AB=r$. $\angle OBA=\varphi$. 由光学知,点 B 处的照度 J 与 $\sin\varphi$ 成正比与 r^2 成反比,即

$$J=c\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

其中 c 是与灯光强度有关的常数. 由图 6.9 知,

$$\sin\varphi=\frac{x}{r},\quad r=\sqrt{x^2+a^2}.$$

于是,
$$J(x)=c\frac{x}{r^3}=c\frac{x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},\quad 0\leqslant x<+\infty.$$

$$J'(x)=c\frac{a^2-2x^2}{(x^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

令 $J'(x)=0$,解得稳定点 $-\frac{a}{\sqrt{2}}$ 与 $\frac{a}{\sqrt{2}}$, 其中稳定点 $-\frac{a}{\sqrt{2}}$ 不在 $[0,+\infty)$ 中,去掉. 比较三数

$$J\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2c}{3\sqrt{3}a^2},$$

$$J(0)=0,\quad J(x)\to 0\quad (x\to+\infty).$$

知 $J\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ 就是函数 $J(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 的最大值,即当电灯 A 与点 O 的距离为 $\frac{a}{\sqrt{2}}$ 时,点 A 处有最大的照度,最大的照度是

$$J\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2c}{3\sqrt{3}a^2}.$$

在求最值的某些应用问题中,根据问题的实际意义,能够判定

它必能取到最小(大)值，而从实际问题抽象出来的可导函数 $f(x)$ 在区间 I 内又只有一个稳定点. 这时就可断定，函数 $f(x)$ 在此稳定点必取最小(大)值.

例 9. 从半径为 R 的圆形铁片中剪去一个扇形（如图 6.10），将剩余部分围成一个圆锥形漏斗，问剪去的扇形的圆心角多大时，才能使圆锥形漏斗的容积最大?

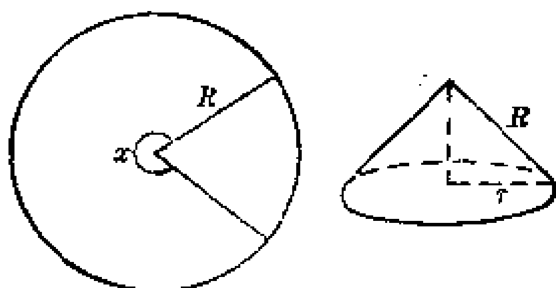


图 6.10

解 设剪后剩余部分的圆心角是 $x(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$. 圆锥形漏斗的斜高是 R，圆锥底的周长是 Rx（弧长等于半径乘圆心角）. 设圆锥的底半径是 r，则 $r=\frac{Rx}{2\pi}$. 圆锥的高是

$$\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{R^2-\left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}.$$

圆锥的底面积

$$\pi r^2=\pi\left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2=\frac{R^2x^2}{4\pi},$$

于是，圆锥的体积

$$V(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{R^2x^2}{4\pi}\cdot\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}=\frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}.$$

设 $A=\frac{R^3}{24\pi^2}$，有

$$V(x)=Ax^2\sqrt{4\pi^2-x^2}.$$

求函数 $V(x)$ 在$[0,2\pi]$的最大值.

$$V'(x)=2Ax\sqrt{4\pi^2-x^2}-\frac{Ax^3}{\sqrt{4\pi^2-x^2}}$$
$$=A\frac{8\pi^2x-3x^3}{\sqrt{4\pi^2-x^2}}.$$

令 $V'(x)=0$，解得三个稳定点 $0,-2\pi\sqrt{\frac{2}{3}},2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$，其中 $-2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$不属于$[0,2\pi]$，去掉．而 $V(0)=V(2\pi)=0$．已知 $V(x)$ 在$[0,2\pi]$必存在最大值，则 $V(x)$必在稳定点 $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$取最大值．于是，当剪去的扇形的圆心角是 $2\pi-2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}=2\pi\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$时，所围成的圆锥形漏斗的体积最大．

例 10． 测量某个量 A，由于仪器的精度和测量的技术等原因，对量 A 做了 n 次测量，测量的数值分别是

$$a_1,a_2,\cdots,a_n.$$

取数 x 作为量 A 的近似值，问 x 取何值才能使 x 与 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$之差的平方和为最小？

解 根据题意，求函数

$$f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$$

的最小值．

$$f'(x)=2(x-a_1)+2(x-a_2)+\cdots+2(x-a_n)$$
$$=2[nx-(a_1+a_2+\cdots+a_n)].$$

令 $f'(x)=0$，解得稳定点$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

$$f''(x)=2n>0,$$

从而，稳定点$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$是函数 $f(x)$ 的极小点．于是，函数 $f(x)$在稳定点取最小值，即以 n 个数值 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的算术平均值作为量 A 的近似值，能使函数 $f(x)$ 取最小值．

例 11. 证明：$\forall x>0$，有不等式

$$x^{\alpha}-\alpha x+\alpha-1\leqslant 0,\quad 0<\alpha<1.$$

证明 讨论函数

$$f(x)=x^{\alpha}-\alpha x+\alpha-1$$

在区间$(0,+\infty)$的最大值

$$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}-\alpha=\alpha(x^{\alpha-1}-1).$$

令 $f'(x)=0$，解得唯一稳定点 1，它将区间$(0,+\infty)$分成两个区间$(0,1)$与$(1,+\infty)$，列表

	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极大点	↘

稳定点 1 是函数 $f(x)$ 极大点，极大值 $f(1)=0$. 由此表可见极大值 $f(1)=0$ 就是函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的最大值，即 $\forall x>0$，有

$$f(x)\leqslant f(1)\quad 或\quad x^{\alpha}-\alpha x+\alpha-1\leqslant 0.$$

由此不等式可得重要的杨格[①]不等式：

若 $a>0,b>0$，且 $p>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，则

$$ab\leqslant\frac{1}{p}a^{p}+\frac{1}{q}b^{q}.$$

事实上，由例 11 的不等式，令

$$x=\frac{a^{p}}{b^{q}},\ \alpha=\frac{1}{p}\quad\left(0<\frac{1}{p}<1\right),$$

有
$$\left(\frac{a^{p}}{b^{q}}\right)^{\frac{1}{p}}-\frac{1}{p}\cdot\frac{a^{p}}{b^{q}}+\frac{1}{p}-1\leqslant 0\quad\left(1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}\right)$$

① 杨格（Young 1882—1946）英国数学家.

或 $$\frac{a}{b^{\frac{q}{p}}}\leqslant\frac{1}{p}\frac{a^p}{b^q}+\frac{1}{q}.$$

不等式两端乘 $b^q(>0)$，有

$$ab^{q-\frac{q}{p}}\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\quad\left(q-\frac{q}{p}=q\left(1-\frac{1}{p}\right)=1\right).$$

即 $$ab\leqslant\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q.$$

三、函数的凸凹性

讨论函数 $y=f(x)$ 的性态，仅仅知道函数 $y=f(x)$ 在区间 I 严格增加还不够．因为函数 $y=f(x)$ 在区间 I 严格增加还有不同的方式．例如，函数

$$y=x^2\quad 与\quad y=\sqrt{x}$$

在区间 $[0,+\infty)$，虽然都是严格增加，但它们严格增加的方式却有不同．从它们的图象看到：曲线 $y=x^2$ 是向下鼓鼓地严格增加，而曲线 $y=\sqrt{x}$ 却是向上鼓鼓地严格增加，如图 6.11．函数在区间严格减少也是如此．

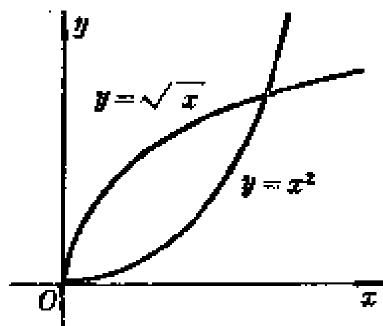


图 6.11

曲线 $y=f(x)$ 在区间 I 向下鼓鼓的特征：$\forall x_1,x_2\in I$，且 $x_1<x_2$，曲线 $y=f(x)$ 上任意二点 $A(x_1,f(x_1))$ 与 $B(x_2,f(x_2))$ 之间弧段 $\overparen{AB}$ 位于弦 $\overline{AB}$ 的下方，如图 6.12．曲线 $y=f(x)$ 在区间 I 向上鼓鼓的特征，恰好与此相反．如图 6.13．怎样用分析语言描述这个几何特征呢？那就是，$\forall x\in(x_1,x_2)$，函数 $y=f(x)$ 在 x 的函数值 $f(x)$ 小于弦 $\overline{AB}$（直线方程）在 x 的函数值．怎样用给定的 x_1 与 x_2 表示 x 呢？显然，

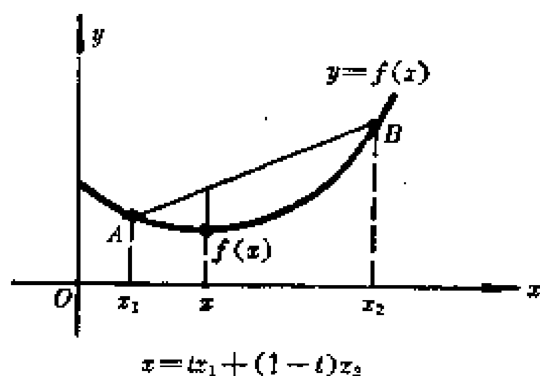


图 6.12

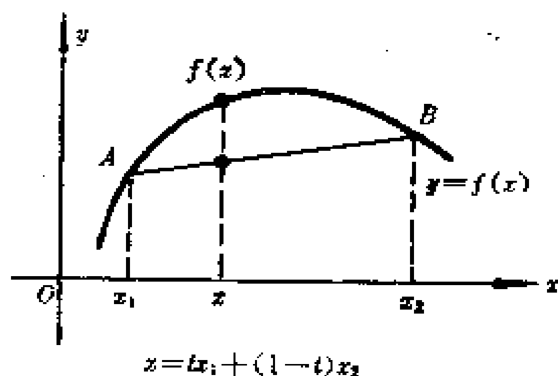


图 6.13

$$x\in(x_1,x_2)\Longleftrightarrow 0<\frac{x-x_2}{x_1-x_2}<1.$$

令 $t=\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}$，有 $0<t<1$，且 $x=tx_1+(1-t)x_2$.

已知过点 $A(x_1,f(x_1))$ 与点 $B(x_2,f(x_2))$ 弦的方程(函数)是

$$y=f(x_2)+\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}(x-x_2).$$

函数 $y=f(x)$ 与弦的方程（函数）在 $x=tx_1+(1-t)x_2\in(x_1,x_2)$ 的函数值分别是

$$f[tx_1+(1-t)x_2] \quad 与 \quad tf(x_1)+(1-t)f(x_2).$$

于是，有下面的定义：

定义 设函数 $f(x)$ 在开区间 I 有定义. 若 $\forall x_1, x_2\in I$, $\forall t\in(0,1)$，有

$$f[tx_1+(1-t)x_2]\leqslant tf(x_1)+(1-t)f(x_2) \tag{1}$$

$$(f[tx_1+(1-t)x_2]\geqslant tf(x_1)+(1-t)f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 是**凸函数(凹函数)**，或函数 $f(x)$ 在区间 I 是**凸(凹)**.

若上式中 $x_1\neq x_2$，且不等号是严格不等号“$<$($>$)”，则称 $f(x)$ 在区间 I 是**严凸函数(严凹函数)**，或函数 $f(x)$ 在区间 I 是**严凸(严凹)**.

例如，函数 $f(x)=|x|$ 在 $\mathbf{R}$ 是凸。

事实上，$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R},\forall t\in(0,1)$，有

$$f[tx_1+(1-t)x_2]=|tx_1+(1-t)x_2|$$
$$\leqslant t|x_1|+(1-t)|x_2|=tf(x_1)+(1-t)f(x_2),$$

即函数 $f(x)=|x|$ 在 $\mathbf{R}$ 是凸。

再例如，函数 $f(x)=x^2$ 在 $\mathbf{R}$ 是严凸。

事实上，$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1\neq x_2$，$\forall t\in(0,1)$，有

$$f[tx_1+(1-t)x_2]=[tx_1+(1-t)x_2]^2$$
$$=t^2x_1^2+2t(1-t)x_1x_2+(1-t)^2x_2^2 \quad (2x_1x_2<x_1^2+x_2^2)$$
$$<t^2x_1^2+t(1-t)(x_1^2+x_2^2)+(1-t)^2x_2^2$$
$$=[t^2+t(1-t)]x_1^2+[t(1-t)+(1-t)^2]x_2^2$$
$$=tx_1^2+(1-t)x_2^2=tf(x_1)+(1-t)f(x_2),$$

即函数 $f(x)=x^2$ 在 $\mathbf{R}$ 是严凸。

根据函数的凸凹(严格凸凹)定义，不难证明，若函数 $f(x)$ 在区间 I 是凹(严凹)，则函数 $-f(x)$ 在区间 I 就是凸(严凸)。因此，讨论凹函数可归结为讨论凸函数。

下面给出定义凸函数的不等式(1)更为方便的等价形式：

设 $q_1=t,q_2=1-t$，有 $q_1+q_2=1(q_1,q_2\in(0,1))$。(1) 改写为

$$f(q_1x_1+q_2x_2)\leqslant q_1f(x_1)+q_2f(x_2).$$

设 $x=tx_1+(1-t)x_2$，$t=\dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}$，有 $1-t=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$。

(1)式可改写为

$$f(x)\leqslant\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2). \tag{2}$$

设 $x_1<x_2$，已知 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$。将(2)式不等号两端乘以 $x_2-x_1>0$，有

$$(x_2-x)f(x_1)+(x_1-x_2)f(x)+(x-x_1)f(x_2)\geqslant 0. \tag{3}$$

或写为行列式的形式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x & f(x) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

设 $x_1<x<x_2$，由于 $x_2-x_1=(x_2-x)+(x-x_1)$，(3)式可改写为

$$(x_2-x)f(x_1)-(x_2-x)f(x)-(x-x_1)f(x)+(x-x_1)f(x_2)\geqslant 0,$$

$$(x_2-x)[f(x_1)-f(x)]-(x-x_1)[f(x)-f(x_2)]\geqslant 0,$$

或
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}. \tag{4}$$

当 $x_1<x_2$，且 $x_1<x<x_2$，不等式(2)，(3)，(4)与不等式(1)都是等价的，即它们都是凸函数定义的不同形式. 如果将不等式改为严格不等号"$<$"，它们都是严凸函数定义的不同形式.

(4)式表示凸函数 $f(x)$ 的几何意义是，连接曲线 $y=f(x)$ 上两点 $(x_1,f(x_1))$ 和 $(x,f(x))$ 弦的斜率 $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ 不超过连接曲线 $y=f(x)$ 上两点 $(x,f(x))$ 和 $(x_2,f(x_2))$ 弦的斜率 $\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. 如图 6.14. 反之亦然.

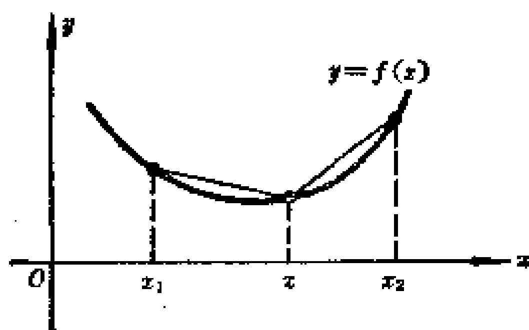


图 6.14

如果函数 $f(x)$ 具有更正规的性质，则有下面定理：

定理 5. 设函数 $f(x)$ 在开区间 I 可导. 函数 $f(x)$ 在区间 I 是凸(凹)$\Longleftrightarrow \forall x_1,x_2\in I$，且 $x_1<x_2$，有 $f'(x_1)\leqslant f'(x_2)$ $(f'(x_1)\geqslant f'(x_2))$.

证明 只给出凸情况的证明，同法可证凹的情况.

必要性 (⇒) 若函数 $f(x)$ 在区间 I 是凸，$\forall x_1, x_2 \in I$，且 $x_1 < x_2$，$\forall x: x_1 < x < x_2$，由(4)式，有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}.$$

已知函数 $f(x)$ 在 x_1 与 x_2 都可导(当然也连续)．根据极限保号性定理分别有

$$\lim_{x \to x_1} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \lim_{x \to x_1} \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2},$$

即
$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}.$$

与
$$\lim_{x \to x_2} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \lim_{x \to x_2} \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2},$$

即
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant f'(x_2).$$

于是，
$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant f'(x_2),$$

充分性(⇐) $\forall x_1, x, x_2 \in I$，且 $x_1 < x < x_2$．根据微分中值定理，$\exists \xi_1, \xi_2: x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$，有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1) \quad 与 \quad \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} = f'(\xi_2).$$

已知 $f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2)$，即

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}.$$

由(4)式知，函数 $f(x)$ 在区间 I 是凸．▯

推论 若函数 $f(x)$ 在开区间 I 存在二阶导数，且

1) $\forall x \in I$，有 $f''(x) > 0$，则函数 $f(x)$ 在区间 I 严凸．

2) $\forall x \in I$，有 $f''(x) < 0$，则函数 $f(x)$ 在区间 I 严凹．

证明 $\forall x \in I$，有 $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$，则 $f'(x)$ 在区间 I 严格增加(严格减少)．用定理 5 充分性的同样证法，则函数 $f(x)$ 在

区间 I 严凸(严凹). □

这个推论是判别二阶可导函数的严凸或严凹的判别法.

例如,判别幂函数 $f(x)=x^{\alpha}(x>0)$ 与三角函数 $g(x)=\sin x$ 的凸凹性.

事实上, $f''(x)=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$.

当 $\alpha<0,\alpha>1$ 时,有 $f''(x)>0$, 即当 $\alpha<0$ 和 $\alpha>1$ 时, 幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 是严凸; 当 $0<\alpha<1$ 时, 有 $f''(x)<0$, 即当 $0<\alpha<1$ 时,幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 是严凹.

$$g''(x)=-\sin x.$$

在开区间 $((2k-1)\pi,2k\pi),k\in\mathbb{Z}$, 有 $f''(x)>0$, 即在开区间 $((2k-1)\pi,2k\pi)$ 三角函数 $f(x)=\sin x$ 是严凸; 在开区间 $(2k\pi,(2k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$, 有 $f''(x)<0$, 即在开区间 $(2k\pi,(2k+1)\pi)$ 三角函数 $f(x)=\sin x$ 是严凹.

凸函数还有一个重要的几何特征:

定理 6. 设函数 $f(x)$ 在开区间 I 可导, 函数 $f(x)$ 在 I 是凸(凹) $\Longleftrightarrow$ 曲线 $y=f(x)$ 位于它的任意一点切线的上方(下方).

证明 只给出凸情况的证明,同法可证凹的情况.

必要性($\Rightarrow$) $\forall x_0\in I$. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线方程(函数)

$$y(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

从而, $f(x)-y(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$

$$=f'(\xi)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=[f'(\xi)-f'(x_0)](x-x_0),$$

其中 ξ 在 x 与 x_0 之间. 若函数 $f(x)$ 在 I 是凸, 根据定理 5, 则 $f'(\xi)-f'(x_0)$ 与 $x-x_0$ 同号. 于是, $\forall x\in I$, 有

$$f(x)-y(x)\geq 0,$$

即曲线 $y=f(x)$ 在其上任意点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线上方.

充分性($\Longleftarrow$) 若 $\forall x,x_0\in I$, 有

$$f(x)-y(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\geqslant 0,$$

当 $x<x_0$ 时，有 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant f'(x_0)$，

当 $x_0<x$ 时，有 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant f'(x_0)$.

于是，$\forall x_1,x,x_2\in I$，且 $x_1<x<x_2$，有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

由(4)式，函数 $f(x)$ 在 I 是凸. □

应用凸凹函数的定义可以证明一些重要不等式.

定理 7. 若函数 $f(x)$ 在区间 I 是凸，则有不等式

$$f(q_1x_1+q_2x_2+\cdots+q_nx_n)$$
$$\leqslant q_1f(x_1)+q_2f(x_2)+\cdots+q_nf(x_n),\qquad(5)$$

其中 $x_i\in I, q_i>0, i=1,2,\cdots,n$，且 $q_1+q_2+\cdots+q_n=1$.

不等式(5)称为**詹生不等式**.

证明 应用归纳法 当 $n=2$ 时，由凸函数定义，有

$$f(q_1x_1+q_2x_2)\leqslant q_1f(x_1)+q_2f(x_2),\quad q_1+q_2=1,$$

即 $n=2$ 不等式(5)成立. 设 $n=k$ 成立，即

$$f(q_1x_1+q_2x_2+\cdots+q_kx_k)$$
$$\leqslant q_1f(x_1)+q_2f(x_2)+\cdots+q_kf(x_k).$$

证明 $n=k+1$ 也成立. 事实上，

$$f(q_1x_1+q_2x_2+\cdots+q_kx_k+q_{k+1}x_{k+1})$$
$$=f[q_1x_1+q_2x_2+\cdots+q_{k-1}x_{k-1}+(q_kx_k+q_{k+1}x_{k+1})]$$
$$=f\left[q_1x_1+\cdots+q_{k-1}x_{k-1}+(q_k+q_{k+1})\left(\frac{q_k}{q_k+q_{k+1}}x_k\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{q_{k+1}}{q_k+q_{k+1}}x_{k+1}\right)\right]\leqslant q_1f(x_1)+\cdots+q_{k-1}f(x_{k-1})$$
$$+(q_k+q_{k+1})f\left(\frac{q_k}{q_k+q_{k+1}}x_k+\frac{q_{k+1}}{q_k+q_{k+1}}x_{k+1}\right)$$

$$\leqslant q_1f(x_1)+\cdots+q_{k-1}f(x_{k-1})+(q_k+q_{k+1})\left[\frac{q_k}{q_k+q_{k+1}}f(x_k)\right.$$

$$\left.+\frac{q_{k+1}}{q_k+q_{k+1}}f(x_{k+1})\right]$$

$$=q_1f(x_1)+\cdots+q_{k-1}f(x_{k-1})+q_kf(x_k)+q_{k+1}f(x_{k+1})$$

$$=q_1f(x_1)+q_2f(x_2)+\cdots+q_{k+1}f(x_{k+1}).\quad \square$$

定理 7′. 若函数 $f(x)$ 在区间 I 存在二阶导数，且 $\forall x\in I$，有 $f''(x)\geqslant 0$，则詹生不等式(5)成立。

证法　应用定理 5 推论的证法，则函数 $f(x)$ 在区间 I 是凸．由定理 7 立即得证．函数 $f(x)$ 存在二阶导数(条件加强了)，也可应用泰勒公式证明．这里给出另一种应用泰勒公式的证法．

证明　设 $x_0=q_1x_1+q_2x_2+\cdots+q_nx_n\in I$．由泰勒公式，有

$$f(x_i)=f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0)+\frac{f''(\xi_i)}{2!}(x_i-x_0)^2,$$

其中 ξ_i 在 x_0 与 x_i 之间．已知 $\forall x\in I$，有 $f''(x)\geqslant 0$，从而

$$f(x_i)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

将上式的不等号两端乘正数 q_i，再两端分别相加，有

$$q_1f(x_1)+q_2f(x_2)+\cdots+q_nf(x_n)$$

$$\geqslant(q_1+q_2+\cdots+q_n)f(x_0)+f'(x_0)(q_1x_1+q_2x_2+\cdots$$

$$+q_nx_n-x_0)=f(x_0).\quad (q_1x_1+q_2x_2+\cdots+q_nx_n-x_0=0)$$

即

$$f(q_1x_1+q_2x_2+\cdots+q_nx_n)$$

$$\leqslant q_1f(x_1)+q_2f(x_2)+\cdots+q_nf(x_n).\qquad \square$$

例 12. 证明：$a_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，有不等式

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

证明　设 $f(x)=-\ln x$，$\forall x\in(0,+\infty)$，有

$$f''(x)=\frac{1}{x^2}>0.$$

从而，函数 $f(x)=-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 是严凸. 根据定理 7，

取 $x_i=a_i\in(0,+\infty)$，$q_i=\frac{1}{n}$，$i=1,2,\cdots,n$. $q_1+q_2+\cdots+q_n=1$. 有

$$-\ln\left(\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right)\leqslant-\frac{\ln a_1}{n}-\frac{\ln a_2}{n}-\cdots-\frac{\ln a_n}{n}$$

或 $$-\ln\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leqslant-\left(\ln a_1^{\frac{1}{n}}+\ln a_2^{\frac{1}{n}}+\cdots+\ln a_n^{\frac{1}{n}}\right)$$

$$=-\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

即 $$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

取 $x_i=\frac{1}{a_i}\in(0,+\infty)$，$q_i=\frac{1}{n}$，$i=1,2,\cdots,n$. $q_1+q_2+\cdots+q_n=1$. 同样方法，有

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

于是，$\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

定义 若函数 $y=f(x)$ 在点 c 可导，且在点 c 的一侧是凸，而另一侧是凹，则称 c 是函数 $y=f(x)$ 的**拐点**，有时也称点 $M(c,f(c))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的**拐点**.

不难证明，若函数 $f(x)$ 在点 c 的邻域 $(c-\delta,c+\delta)$ 存在连续的二阶导数，且 c 是函数 $f(x)$ 的拐点，则 $f''(c)=0$. 反之，若 $f''(c)=0$，则 c 不一定是函数 $f(x)$ 的拐点. 例如，函数 $f(x)=x^4$. $f''(x)=12x^2$，有 $f''(0)=0$. 因为 $\forall x\neq0$，有 $f''(x)>0$，所以函数 $f(x)=x^4$ 在点 0 的两侧皆是凸(如图 6.15)，从而 0 不是函数 $y=x^4$ 的拐点.

若函数 $f(x)$ 存在二阶导数，讨论函数 $f(x)$ 的凸凹性和拐点可按下列步骤进行：

第一步，求函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$；

第二步，令 $f''(x)=0$，求解. 其解将函数 $f(x)$ 的定义域分成若干个开区间；

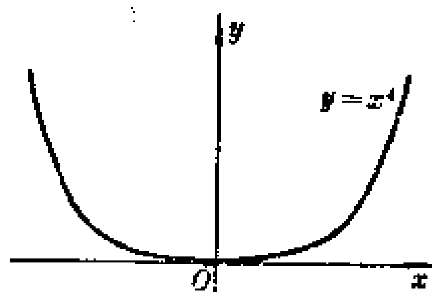


图 6.15

第三步，判别 $f''(x)$ 在每个小区间的符号. 设 $f''(c)=0$，由下表可知函数 $f(x)$ 的凸凹性及拐点：

	(a,c)	c	(c,b)	曲线 $y=f(x)$ 上的点 $(c,f(c))$
$f''(x)$ ($f(x)$)	$+$（严凸）	0	$-$（严凹）	是拐点
	$-$（严凹）	0	$+$（严凸）	是拐点
	$+$（严凸）	0	$+$（严凸）	不是拐点
	$-$（严凹）	0	$-$（严凹）	不是拐点

例 13. 讨论函数 $f(x)=x^4-2x^3+1$ 的凸凹性及其拐点.

解 函数的定义域是 R.

$$f'(x)=4x^3-6x^2,\quad f''(x)=12x(x-1).$$

令 $f''(x)=12x(x-1)=0$，其解是 0 与 1. 它们将定义域 R 分成三个区间 $(-\infty,0)$，$(0,1)$，$(1,+\infty)$. 列表如下：

	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	严凸	拐点	严凹	拐点	严凸

显然，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 与 $(1,+\infty)$ 是严凸，在 $(0,1)$ 是严凹. 曲线上的点 $(0,1)$ 与 $(1,0)$ 都是拐点.

例 14. 讨论函数 $f(x)=e^{-x^2}$ 的凸凹性及其拐点.

解 函数的定义域是R.

$$f'(x)=-2xe^{-x^2},\quad f''(x)=2(2x^2-1)e^{-x^2}.$$

令 $f''(x)=2(2x^2-1)e^{-x^2}=0$，其解是$-\frac{1}{\sqrt{2}}$与$\frac{1}{\sqrt{2}}$. 它们将定义域R分成三个区间，列表如下：

	$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	严凸	拐点	严凹	拐点	严凸

显然，函数 $f(x)$在$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$与$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$是严凸，在$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$是严凹. 曲线上的点$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$与$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$都是拐点.

例 15. 讨论函数 $f(x)=x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$的凸凹性及其拐点.

解 函数的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

$$f'(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2},$$

$$f''(x)=-\frac{1}{1+x^2}-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=-\frac{2}{(1+x^2)^2}.$$

令 $f''(x)=-\frac{2}{(1+x^2)^2}=0$，没解. 列表如下：

	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
$f''(x)$	−	−
$f(x)$	严凹	严凹

显然，函数 $f(x)$在$(-\infty,0)$与$(0,+\infty)$都是严凹，没有拐点.

四、曲线的渐近线

中学《平面解析几何》，给出了双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线：$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$. 我们虽然不能画出全部双曲线，但是有了渐近线，就能知道双曲线无限延伸时的走向及趋势. 如果一条连续曲线存在渐近线，为了掌握这条连续曲线在无限延伸时的变化情况，求出它的渐近线是必要的.

定义 当曲线C上动点P沿着曲线C无限远移时，若动点P到某直线l的距离无限趋近于0(如图 6.16)，则称直线l是曲线C的渐近线.

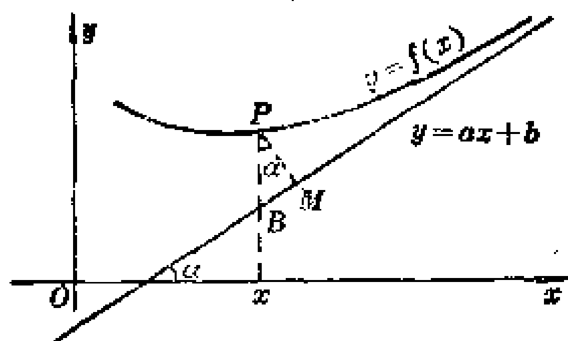


图 6.16

曲线的渐近线有两种，一种是垂直渐近线；另一种是斜渐近线(包括水平渐近线).

1. 垂直渐近线 若$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$或$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\infty$，则直线$x=a$是曲线$y=f(x)$的垂直渐近线(垂直于$x$轴).

例如，曲线$f(x)=\frac{1}{(x+1)(x-2)}$，有

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{(x+1)(x-2)}=-\infty,\quad \lim_{x\to -1^-}\frac{1}{(x+1)(x-2)}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(x+1)(x-2)}=+\infty,\quad \lim_{x\to 2^-}\frac{1}{(x+1)(x-2)}=-\infty,$$

则两条直线 $x=-1$ 与 $x=2$ 都是曲线的垂直渐近线.

再例如，曲线 $y=\mathrm{tg}x$ 有无限多条垂直渐近线 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

2. 斜渐近线 如图 6.16. 设直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线. 怎样确定常数 k 和 b 呢?

由已知的点到直线的距离公式，曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x, f(x))$ 到直线 $y=kx+b$ 的距离

$$|PM|=\frac{|f(x)-kx-b|}{\sqrt{1+k^2}}.$$

直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的渐近线$\Longleftrightarrow$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{|f(x)-kx-b|}{\sqrt{1+k^2}}=0\Longleftrightarrow\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}[f(x)-kx-b]=0$$

$$\Longleftrightarrow\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}[f(x)-kx]=b. \tag{6}$$

若知道 k，则由(6)式即可求得 b. 怎样求 k 呢?

已知 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{1}{x}=0$. 由(6)式与极限运算法则，有

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)-kx}{x}=0,\quad 即\ \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left(\frac{f(x)}{x}-k\right)=0,$$

或

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}=k. \tag{7}$$

于是，直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的渐近线$\Longleftrightarrow$

$$k=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}\quad 与\quad b=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}[f(x)-kx].$$

若 $k=0$，则直线 $y=b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

例 16. 求曲线 $f(x)=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$ 的渐近线.

解 已知$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}=-\infty$, 则 $x=1$ 是曲线的垂直渐近线. 又有

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)^2}{4x(x-1)}=\frac{1}{4}.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}-\frac{x}{4}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+9-x^2+x}{4(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+9}{4(x-1)}=-\frac{5}{4}.$$

直线 $y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$, 即 $x-4y=5$ 是曲线的斜渐近线.

例 17. 求曲线 $f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x}$的渐近线.

解 已知$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2+2x-1}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x^2+2x-1}{x}=+\infty$.
则 $x=0$(即 y 轴)是曲线的垂直渐近线. 又有

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2}=1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x}=2.$$

直线 $y=x+2$ 是曲线的斜渐近线.

上述二例都是 $x\to\infty$ 的渐近线, 这表明所求的渐近线, 既是 $x\to+\infty$ 的渐近线, 又是 $x\to-\infty$ 的渐近线. 但对有些曲线必须分别讨论 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$的渐近线.

例 18. 求曲线 $y=x\operatorname{arc\,tg}x$ 的渐近线.

解 $x\to+\infty$, 有

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\operatorname{arc\,tg}x}{x}=\frac{\pi}{2},$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}\left(x\operatorname{arc\,tg}x - \frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -1.$$

$x\to-\infty$，有

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\operatorname{arc\,tg}x}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(x\operatorname{arc\,tg}x + \frac{\pi}{2}x\right) = -1.$$

则曲线 $y=x\operatorname{arc\,tg}x$，当 $x\to+\infty$ 有渐近线 $y=\frac{\pi}{2}x-1$；当 $x\to-\infty$ 有渐近线 $y=-\frac{\pi}{2}x-1$.

无穷区间上的曲线 $y=f(x)$ 具有什么性质才有渐近线呢？由观察不难得到以下的简易判别法：设 $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$.

当 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 都是连续函数时，若 $Q(a)=0$，且 $P(a)\neq0$，则直线 $x=a$ 是曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线.

当 $P(x)$ 是 n 次多项式，$Q(x)$ 是 m 次多项式时，若 $n=m+1$，则曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线；若 $n\leqslant m$，则曲线 $y=f(x)$ 有水平渐近线.

当 $P(x)$ 或 $Q(x)$ 是无理函数时，设 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 的最高次幂分别是正数 α 与 β. 若 $\alpha=\beta+1$，则曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线；若 $\alpha\leqslant\beta$，则曲线 $y=f(x)$ 有水平渐近线.

例如，曲线 $y=\frac{(x-1)^2}{x-2}$ 与 $y=\frac{x-1}{x-2}$ 都有垂直渐近线 $x=2$，前者还有斜渐近线 $y=x$，后者还有水平渐近线 $y=1$. 双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad 或 \quad y=\pm\frac{b\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

分子关于 x 的最高次幂是 1 ($\sqrt{x^2}=|x|^1$)，分母常数是关于 x 的零次幂. 因此它有斜渐近线.

五、描绘函数图象

中学《代数》应用描点法描绘了一些简单函数的图象. 但是，描点法有缺陷. 这是因为，描点法所选取的点不可能很多，而一些关键性的点，如极值点、拐点等可能漏掉；曲线的单调性、凸凹性等一些重要的性态也没有掌握. 因此，用描点法所描绘的函数图象常常与真实的函数图象相差很多. 现在，我们已经掌握了应用导数讨论函数的单调性、极值性、凸凹性、拐点等的方法，从而就能比较准确地描绘函数的图象. 一般来说，描绘函数的图象可按下列的步骤进行：

1. 确定函数 $y=f(x)$ 的定义域.

2. 观察函数 $y=f(x)$ 是否具有某些特性（奇偶性、周期性）.

3. 观察函数 $y=f(x)$ 是否有垂直渐近线、斜渐近线（包括水平渐近线），如果有渐近线，将渐近线求出来.

4. 求出函数 $y=f(x)$ 的单调区间、极值，列表.

5. 求出函数 $y=f(x)$ 的凸凹区间和拐点，列表.

6. 确定一些特殊点，如曲线 $y=f(x)$ 与坐标轴的交点，以及容易计算函数值 $f(x)$ 的一些点 $(x, f(x))$.

在直角坐标系中，首先标明所有关键性点的坐标，画出渐近线，其次按照曲线的性态逐段描绘.

例 19. 描绘函数 $y=e^{-x^2}$ 的图象.

解 定义域是 R，并且是偶函数.

函数在定义域连续. 因为

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x^2}=0,$$

所以，$y=0$，即 x 轴，是水平渐近线.

在本节的例 2 与例 14 中，已讨论了此函数的单调性、凸凹性以及极值点、拐点. 统一列表如下：

	$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$	0	$\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$
y'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y''	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	↗		↗	极大点	↘		↘
	严凸	拐点	严凹		严凹	拐点	严凸

0 是极大点，极大值是 1. 有两个拐点：

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \quad 与 \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{e}}\right).$$

此函数的图象，如图 6.17.

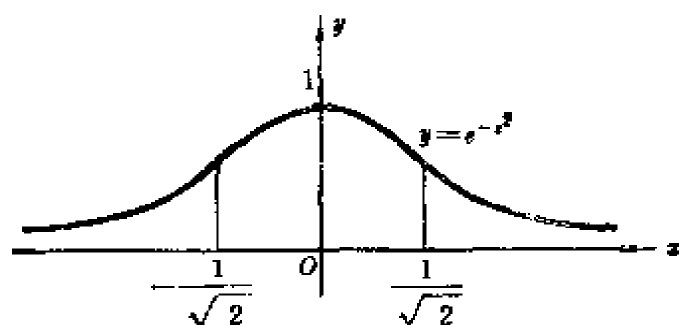


图 6.17

例 20. 描绘函数 $f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$ 的图象.

解 定义域是 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

由例 16 知，有垂直渐近线 $x=1$ 与斜渐近线 $x-4y=5$.

$$f'(x)=\frac{(x+1)(x-3)}{4(x-1)^2}, \qquad f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}.$$

令 $f'(x)=0$，解得稳定点 -1 与 3，它们将定义域分成四个区间 $(-\infty,-1)$，$(-1,1)$，$(1,3)$，$(3,+\infty)$。

令 $f''(x)=0$，无解，即没有拐点.

列表如下：

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	+	+	+
$f(x)$	↗	极大点	↘	↘	极小点	↗
	严凹		严凹	严凸		严凸

-1 是极大点，极大值是 -2. 3 是极小点，极小值是 0. $f(0)=-\dfrac{9}{4}$，$f(2)=\dfrac{1}{4}$.

此函数的图象，如图 6.18.

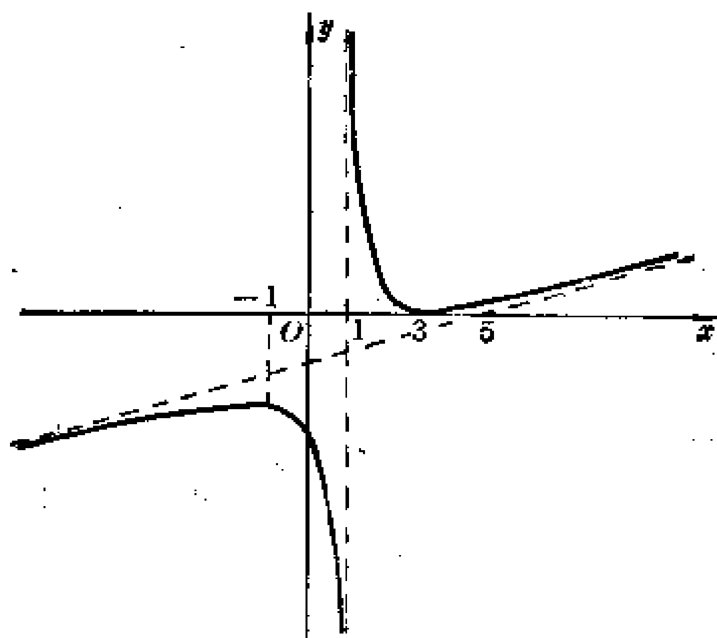


图 6.18

例 21. 描绘函数 $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+3x+1}{x-1}$ 的图象.

解 函数 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}-\{1\}$.

将函数 $f(x)$ 改写为

$$f(x)=(x-1)^2+\frac{2}{x-1}.$$

因为 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$ 与 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$,所以 $x=1$ 是垂直渐近线.

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x-1}=0$, 所以当 $x\to\infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的图象无限接近于抛物线 $y=(x-1)^2$. 当 $x>1$ 时, 函数 $f(x)$ 的图象位于抛物线 $y=(x-1)^2$ 的上方; 当 $x<1$ 时, 函数 $f(x)$ 的图象位于抛物线 $y=(x-1)^2$ 的下方.

求函数 $f(x)$ 的一阶导数与二阶导数:

$$f'(x)=\frac{2[(x-1)^3-1]}{(x-1)^2} \quad 与 \quad f''(x)=\frac{2[(x-1)^3+2]}{(x-1)^3}.$$

令 $f'(x)=0$, 解得稳定点是 2.

令 $f''(x)=0$, 其解是 $x=1+\sqrt[3]{-2}$.

设 $a=1+\sqrt[3]{-2}$, 则 a 与 1 和 2 将定义域分成四个区间:

$$(-\infty,a),(a,1),(1,2),(2,+\infty).$$

列表如下:

x	$(-\infty,a)$	a	$(a,1)$	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘		↘	↘	极小点	↗
	严凸	拐点	严凹	严凸		严凸

2 是极小点, 极小值是 3. 拐点是 $(1+\sqrt[3]{-2},0)$.

首先画出渐近线 $x=1$ 和抛物线 $y=(x-1)^2$ 以及极小点、拐点等重要点的坐标, 其次根据函数 $f(x)$ 的性态, 描绘出函数 $f(x)$

的图象．如图 6.19.

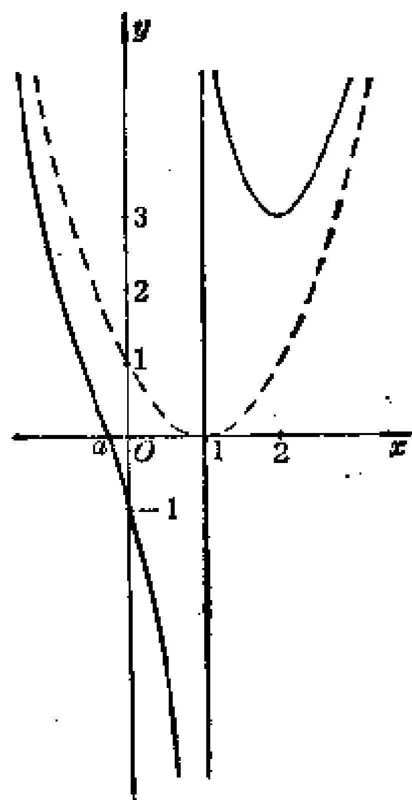


图 6.19

练习题 6.4

1. 讨论下列函数的严格单调区间与极值:

(1) $f(x)=x^3-3x+1$,　　(2) $f(x)=(x+1)^4(x-3)^3$,

(3) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$,　　(4) $f(x)=\sin^2 x$,

(5) $f(x)=\frac{1}{x}\ln x$,　　(6) $f(x)=e^{-x}\sin x$.

2. 证明:二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 在点 $-\frac{b}{2a}$ 取极值．在什么条件下,它取极大值(极小值)?

3. 证明下列不等式:

(1) 当 $x>0$ 时, $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$,

(2) 当 $x>0$ 时, $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$.

4. 设函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，-1 是极大点，极大值是 8，2 是极小点，极小值是 -19，求 a,b,c,d.

5. 证明：当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，有不等式

$$\frac{2}{\pi}x<\sin x.$$

6. 求下列函数在指定区间的最小值与最大值：

(1) $f(x)=2^x$, $x\in[-1,5]$,

(2) $f(x)=-2x^3+3x^2+6x-1$; $x\in[-2,2]$,

(3) $f(x)=\sin^3x+\cos^3x$, $x\in\left[0,\frac{3}{4}\pi\right]$,

(4) $f(x)=x\ln x$, $x\in(0,e]$,

(5) $f(x)=xe^{-x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

7. 已知等腰三角形的周长是 $2l$（定数），问它的腰多长其面积为最大，并求其最大的面积？

8. 已知圆柱形罐头盒的体积是 V（定数），问它的高与底半径多大能使罐头盒的表面积为最小？

9. 半径为 a 的球的内接直圆柱，问直圆柱的底半径与高多大能使直圆柱的体积最大？

10. 如图 6.20，铁路线上 AB 直线段长 100 公里，工厂 C 到铁路线上 A 处的垂直距离 CA 为 20 公里. 现在要在 AB 上选一点 D，从 D 向 C 修一条直线公路. 已知铁路运输每吨公里与公路运输每吨公里的运费之比为 3:5，为了使原料从 B 处运到工厂 C 的运费最省，D 应选在何处？

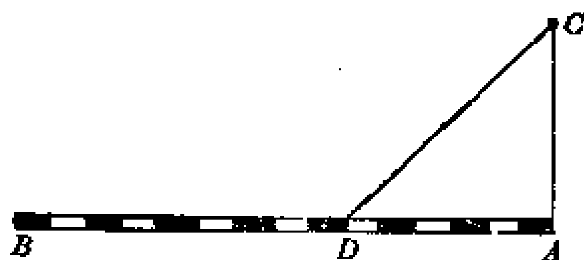


图 6.20

11. 讨论下列函数的凸凹性与拐点：

(1) $y=\frac{2x}{1+x^2}$, (2) $y=x+\sin x$,

(3) $y=(\ln x)^2$,　　　　(4) $y=e^{-x}\sin x$.

12. 证明：曲线 $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$有三个拐点，且位于一条直线上.

13. 证明：两个凸函数的和还是凸函数.

14. 证明：若函数 $f(x)$ 在开区间 I 是凸，则 $\forall x_0\in I$，存在 $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$，且 $f'_-(x_0)\leqslant f'_+(x_0)$.

15. 求下列曲线的渐近线：

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-4x-5}$，　　　　(2) $2y(x+1)^2=x^3$，

(3) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$，　　　　(4) $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$，

(5) $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$.

16. 作下列函数的图象：

(1) $y=x+\dfrac{1}{x}$，　　　　(2) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，

(3) $y=x\operatorname{arctg}x$，　　　　(4) $y=e^{-x}\sin x$.

*　　*　　*　　*

17. 证明下列不等式：

(1) $\dfrac{x}{y}<\dfrac{\sin x}{\sin y}$，　　$0<x<y<\dfrac{\pi}{2}$，

(2) $(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}<(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$，$x>0,y>0,\beta>\alpha>0$.

18. 数列：$1,\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\cdots\sqrt[n]{n}$，…中哪一项最大？

(提示：讨论函数$f(x)=x^{\frac{1}{x}},x>0$).

19. 求函数 $f_n(x)=x^ne^{-n^2x}$(n 是自然数，且 $n\geqslant2$)在$[0,+\infty)$的最大值与最小值，并求极限 ($\forall x\geqslant0$) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$

20. 求函数 $f_p(x)=p^2x^2(1-x)^p$(p 是正数)在$[0,1]$的最大值. 设最大值是 $g(p)$，并求极限 $\lim\limits_{p\to+\infty}g(p)$.

21. 证明：不存在三次或三次以上的奇次多项式 $P(x)$在 $\mathbb{R}$ 是凸.

22. 证明：若函数 $f(x)$在 $\mathbb{R}$ 是凸，且有界，则 $f(x)$是常数函数.

23. 证明：若函数 $f(u)$是单调增加的凸函数，函数 $u=\varphi(x)$ 是凸函数，则函数 $f[\varphi(x)]$也是凸函数.

24. 证明下列不等式,并讨论等号成立的条件:

(1) $a^{\frac{x+y}{2}}\leqslant\frac{a^x+a^y}{2}$, $a>0$; $x,y\in\mathbf{R}$.

(2) $(x+y)\ln\frac{x+y}{2}\leqslant x\ln x+y\ln y$, $x,y>0$.

(3) $\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^p\leqslant\frac{x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p}{n}$,

其中 $p\geqslant1$; $x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant0$.

(4) $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}\leqslant a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$,

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant0$; $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$, 且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$

第七章　不 定 积 分

一般来说，在数学中，一种运算的出现都伴随着它的逆运算．例如，有加就有减，有乘就有除，有乘方就有开方，等等．导数运算也不例外，它也有逆运算，这就是本章所讲的不定积分．为什么要讲不定积分？一是为第八章的计算定积分服务；二是为一些后继课作准备．

§7.1　不 定 积 分

一、原函数

数学的各种运算及其逆运算都是客观规律的反映．因此，一种运算的逆运算不仅在数学中是可能的，而且也是解决实际问题所必需的．那么解决哪些实际问题应用导数运算的逆运算呢？例如：

已知物体的运动规律（函数）是 $s=s(t)$，其中 t 是时间，s 是距离，导数 $s'(t)=v(t)$ 就是物体在时刻 t 的瞬时速度．在力学中有时要遇到相反的问题．已知物体的瞬时速度函数 $v(t)$，问物体的运动规律 $s(t)=?$，即 $(?)'=v(t)$．显然，这是求导运算的逆运算问题．

定义　设函数 $f(x)$ 在区间 I 有定义，存在函数 $F(x)$．若

$$\forall x\in I,\text{有 } F'(x)=f(x),$$

则称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 的**原函数**，或简称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数．

例如：

$\forall x\in\mathbb{R}$, $(\sin x)'=\cos x$，即 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的原函数.

$\forall x\in(-1,1)$，$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，即 $\arcsin x$ 是 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的原函数.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $(x^3)'=3x^2$，即 x^3 是 $3x^2$ 的原函数.

$\forall x\in\mathbb{R}, \forall C\in\mathbb{R}$, $(x^3+C)'=3x^2$，即 x^3+C 也是 $3x^2$ 的原函数.

由此可见，若函数 $f(x)$ 存在原函数 $F(x)$ $(F'(x)=f(x))$，则这个原函数 $F(x)$ 加上任意常数 C，即 $F(x)+C$ 也是函数 $f(x)$ 的原函数（$(F(x)+C)'=f(x)$）. 于是，一个函数存在原函数，那么它必有无限多个原函数.

关于原函数有下面两个理论问题：一、原函数的存在问题，即什么样的函数存在原函数？这里先给出结论：若函数 $f(x)$ 在区间 I 连续，则函数 $f(x)$ 在区间 I 存在原函数. 它的证明在第八章；二、原函数的结构问题，即若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 的一个原函数（$F'(x)=f(x)$），则 $f(x)$ 有无限多个原函数，那么 $f(x)$ 的无限多个原函数是否仅限于 $F(x)+C$ 的形式？换句话说，除了 $F(x)+C$ 的形式之外是否还有其它形式的函数也是 $f(x)$ 的原函数？答案是：除了 $F(x)+C$ 的形式之外不存在 $f(x)$ 的原函数. 下面的定理回答了这个问题：

定理 1. 若 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 的一个原函数，则函数 $f(x)$ 的无限多个原函数仅限于 $F(x)+C$ $(\forall C\in\mathbb{R})$ 的形式.

证明 已知 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，即 $\forall x\in I$，有

$$F'(x)=f(x). \tag{1}$$

设 $\Phi(x)$ 是函数 $f(x)$ 的任意（注意"任意"二字）一个原函数，即 $\forall x\in I$，有

$$\Phi'(x)=f(x). \tag{2}$$

(1)式与(2)式相减，有

$$\Phi'(x)-F'(x)=[\Phi(x)-F(x)]'=f(x)-f(x)=0.$$

根据§6.1例1的推论，$\Phi(x)-F(x)=C$（C是某个常数）或$\Phi(x)=F(x)+C$，即函数$f(x)$的任意一个原函数$\Phi(x)$都是$F(x)+C$的形式. □

这个定理指出，一个函数的无限多个原函数彼此仅相差一个常数. 如果欲求函数$f(x)$的所有的原函数，只需求出函数$f(x)$的一个原函数，然后再加上任意常数C就得到了函数$f(x)$的所有的原函数.

定理的几何意义是，函数$f(x)$的原函数$y=F(x)$是那样的曲线，在它上任意一点$(x, F(x))$的切线斜率等于(已知的)$f(x)$. 将此曲线$y=F(x)$沿y轴平移所得到的曲线$y=F(x)+C$都是函数$f(x)$的原函数的曲线，即两个原函数彼此仅相差一个常数(如图7.1).

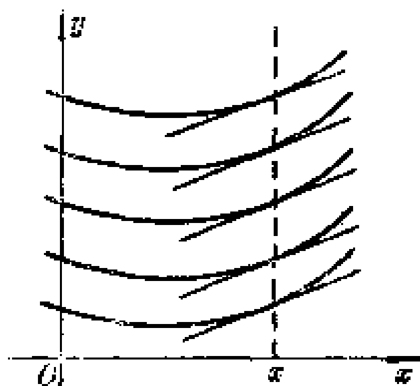


图 7.1

二、不定积分

定义 函数$f(x)$的所有的原函数$F(x)+C$ $(\forall C\in\mathbf{R})$称为函数$f(x)$的**不定积分**，表为

$$\int f(x)dx=F(x)+C \qquad (F'(x)=f(x)),$$

其中$f(x)$称为**被积函数**，$f(x)dx$称为**被积表达式**，C称为**积分常数**.

由此可见，一个函数的不定积分既不是一个数，也不是一个函数，而是一个函数族. 例如：

$$\left(\frac{1}{2}at^2\right)'=at,\ 而\ \int at\,dt=\frac{1}{2}at^2+C;$$

$$(\sin x)'=\cos x,\ 而\ \int\cos x\,dx=\sin x+C.$$

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2,\ 而\ \int x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3+C.$$

求已知函数的不定积分运算，称为**积分运算**．可见，积分运算是微分运算的逆运算．关于积分运算有下列运算法则：

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$ 或 $d\int f(x)dx=f(x)dx$，

即不定积分的导数(或微分)等于被积函数(或被积表达式)．

事实上，设 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的原函数，即 $F'(x)=f(x)$，有

$$\left(\int f(x)dx\right)'=(F(x)+C)'=f(x).$$

2. $\int F'(x)dx=F(x)+C$ 或 $\int dF(x)=F(x)+C$，

即函数 $F(x)$ 的导函数(或微分)的不定积分等于函数族 $F(x)+C$．

事实上，已知 $F(x)$ 是函数 $F'(x)$ 的原函数，则

$$\int F'(x)dx=F(x)+C.$$

例如：

$$\left(\int\sin x\,dx\right)'=\sin x.\qquad \left(\int(3x^2+x)dx\right)'=3x^2+x.$$

$$\int d\sin x=\sin x+C.\qquad \int d(3x^2+x)=3x^2+x+C.$$

3. $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$，$a$ 是常数，且 $a\neq0$，

即被积函数的常数因子可以移到积分号的外边．

事实上，$\left(a\int f(x)dx\right)'=a\left(\int f(x)dx\right)'=af(x)$，

即 $$\int af(x)dx=a\int f(x)dx.$$

4. $$\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx,$$

即两个函数代数和的不定积分等于每个函数不定积分的代数和.

事实上，$$\left(\int f(x)dx\pm\int g(x)dx\right)'=\left(\int f(x)dx\right)'\pm\left(\int g(x)dx\right)'$$
$$=f(x)\pm g(x),$$

即 $$\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx.$$

这个法则可推广到 n 个(有限)函数，即 n 个函数代数和的不定积分等于 n 个函数不定积分的代数和.

因为积分运算是导数运算的逆运算，所以导数公式表中的每个公式反转过来就得到了下列不定积分的公式表：

1. $\int adx=ax+C$，其中 a 是常数.

$\int dx=x+C.$

2. $\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$，其中 α 是常数，且 $\alpha\neq-1$.

3. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C.$

4. $\int a^{x}dx=\frac{1}{\ln a}a^{x}+C$，其中 $a>0$，且 $a\neq1$.

$\int e^{x}dx=e^{x}+C.$

5. $\int\sin xdx=-\cos x+C.$

6. $\int\cos xdx=\sin x+C.$

7. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C.$

8. $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C.$

9. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C=-\arccos x+C.$

10. $\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg}x+C=-\operatorname{arc\,ctg}x+C.$

11. $\int\operatorname{sh}x\,dx=\operatorname{ch}x+C.$

12. $\int\operatorname{ch}x\,dx=\operatorname{sh}x+C.$

关于公式 3 作如下补充说明:

当 $x>0$ 时，$(\ln x)'=\frac{1}{x}$，有$\int\frac{dx}{x}=\ln x+C.$

当 $x<0$ 时，$(\ln(-x))'=\frac{1}{x}$，有$\int\frac{dx}{x}=\ln(-x)+C.$

于是, $\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$, 有

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C.$$

求函数的不定积分最后都要归结为上述不定积分表所列的这些初等函数的不定积分,因此,上述不定积分表所列的公式，读者应牢记会用.

应用不定积分法则和不定积分公式能够求一些简单函数的不定积分.

例 1. 求$\int(4x^3-2x^2+5x+3)dx.$

解 $\int(4x^3-2x^2+5x+3)dx$

$=\int 4x^3\,dx-\int 2x^2\,dx+\int 5x\,dx+\int 3\,dx$

$$=4\int x^3dx-2\int x^2dx+5\int xdx+3\int dx$$

$$=4\cdot\frac{x^4}{4}-2\cdot\frac{x^3}{3}+5\cdot\frac{x^2}{2}+3x+C$$

$$=x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+3x+C.$$

注 等式右端的每个不定积分都有一个任意常数，因为有限个任意常数的代数和还是一个任意常数，所以上式只写一个任意常数 C.

例 2. 求 $\int(1-2x)^2\sqrt{x}\,dx$.

解 $\int(1-2x)^2\sqrt{x}\,dx=\int(x^{\frac{1}{2}}-4x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{5}{2}})dx$

$$=\int x^{\frac{1}{2}}dx-4\int x^{\frac{3}{2}}dx+4\int x^{\frac{5}{2}}dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{8}{7}x^{\frac{7}{2}}+C.$$

例 3. 求 $\int\frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx$.

解 $\int\frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$

$$=\int x^{\frac{7}{6}}dx-\int x^{\frac{1}{6}}dx=\frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}}-\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+C.$$

例 4. 求 $\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}$

解 $\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}dx$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2x}+\int\frac{dx}{\sin^2x}=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C.$$

例 5. 求 $\int(10^x+\operatorname{ctg}^2x)dx$.

解 $\int(10^x+\operatorname{ctg}^2x)dx=\int 10^x dx+\int \operatorname{ctg}^2 x dx$

$$=\int 10^x dx+\int\frac{1-\sin^2x}{\sin^2x}dx=\int 10^x dx+\int\frac{dx}{\sin^2x}-\int dx$$

$$=\frac{10^x}{\ln 10}-\operatorname{ctg}x-x+C.$$

例 6. 求 $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$.

解 $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx$

$$=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\int dx-\int\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=x-\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

练习题 7.1

1. 求下列不定积分:

(1) $\int(\sqrt{x}+1)^2dx$, (2) $\int\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{3}\right)^3dx$,

(3) $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$, (4) $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$,

(5) $\int(2^x+3^x)^2dx$, (6) $\int 3^xe^xdx$,

(7) $\int\frac{2\cdot3^x-5\cdot2^x}{3^x}dx$, (8) $\int\frac{x^4}{1+x^2}dx$,

(9) $\int\frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx$, (10) $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2x}dx$,

(11) $\int\operatorname{tg}^2xdx$, (12) $\int e^x\left(a^x-\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$, $(a>0)$.

2. 求满足下列条件的函数 $F(x)$:

(1) $F'(x)=2x$, $F(0)=1$,

(2) $F'(x)=(3x-5)(1-x)$, $F(1)=3$.

(3) $F'(x)=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

3. 求一条平面曲线的方程，该曲线通过点 $A(1,0)$，并且曲线上每一点 $P(x,y)$ 的切线斜率是 $2x-2, x\in\mathbb{R}$.

4. 若曲线 $y=f(x)$ 上点 (x,y) 的切线斜率与 x^3 成正比例，并且曲线通过点 $A(1,6)$ 与 $B(2,-9)$，求该曲线方程.

§7.2 分部积分法与换元积分法

一般来说，求不定积分要比求导数困难得多. 这是因为，如果函数存在导数，根据导数运算法则和导数公式或者导数定义，总能求出函数的导数. 但是求函数的不定积分则不然. 根据不定积分运算法则和不定积分公式只能求出很少一部分比较简单的函数的不定积分，而对更广泛函数的不定积分要因函数不同的形式或不同类型选用不同的方法. 因此，求不定积分有很大的灵活性. 本节所讲的分部积分法与换元积分法是求不定积分的最基本最常用的两种重要方法。这两种方法都能化繁为简，也就是这两种方法都能将不定积分的被积函数化简，直到能应用不定积分表中的公式求出它的不定积分.

一、分部积分法

设 u 与 v 都是 x 的可导函数. 由函数乘积的导数公式，有

$$(uv)'=uv'+vu' \quad \text{或} \quad uv'=(uv)'-vu'.$$

由不定积分法则与不定积分定义，有

$$\int uv'\,dx=\int (uv)'\,dx-\int vu'\,dx,$$

即

$$\int uv'\,dx=uv-\int vu'\,dx \tag{1}$$

或

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du. \tag{2}$$

(1)式或(2)式称为**分部积分公式**.

有时求函数 uv' 的不定积分不能直接应用不定积分公式，而函数 vu' 的不定积分可应用不定积分公式或 vu' 比 uv' 简单．这时，分部积分法就能起到化繁为简的作用．

求某些函数(如 $\ln x, xe^x$ 等等)的不定积分，只能应用分部积分法，可见分部积分法是求不定积分的一种重要的方法．那么求哪些函数的不定积分要应用分部积分法呢？这个问题不易给以完满回答．一般来说，下列函数：

$$x^k\ln x,\quad x^k\sin bx,\quad x^k\cos bx,\quad x^k e^{ax},$$

$$x^k\arcsin ax,\quad x^k\mathrm{arc\,tg}\,bx,\quad e^{ax}\cos bx,\quad e^{ax}\sin bx \text{ 等等}$$

的不定积分要应用分部积分法．

例如求
$$\int x\sin x dx.$$

应用分部积分公式(2)，首先要将被积表达式 $x\sin x dx$ 分成两部分 u 与 dv 的乘积．当然，将 $x\sin x dx$ 分成 u 与 dv 的乘积有多种不同的分法．但是，要求我们选取这样一种分法，使 vdu 比 udv 简单，甚至不定积分 $\int vdu$ 就是不定积分公式表中的某个公式．

例如，选取 $u=\sin x, dv=xdx$．应用分部积分公式(2)，还要求出 du 与 v，有

$$du=\cos x dx,\quad v=\frac{x^2}{2}\text{①}.$$

由分部积分公式(2)，有

$$\int x\sin x dx=\frac{x^2}{2}\sin x-\int\frac{x^2}{2}\cos x dx.$$

显然，它将函数 $x\sin x$ 的不定积分化成了比 $x\sin x$ 更复杂的函数 $\frac{x^2}{2}\cos x$ 的不定积分．这说明，这种选取 u 与 dv 的方法不合适，应

---

① 这里将任意常数 C 取为 0，并不影响结果．否则添加任意常数 C，会增加书写的麻烦．

另加选取.

例 1. 求 $\int x\sin x dx$.

解 设 $u=x, dv=\sin x dx$, 有 $du=dx, v=-\cos x$. 由公式(2),

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin x dx}_{dv}=-\underbrace{x\cos x}_{uv}-\int\underbrace{(-\cos x)}_{v}\underbrace{dx}_{du}$$

$$=-x\cos x+\int\cos x dx=-x\cos x+\sin x+C.$$

显然, 这种选取 u 和 dv 的方法是合适的. 因为它将函数 $x\sin x$ 的不定积分化简为求函数 $\cos x$ 的不定积分, 这可由不定积分公式表求得.

例 2. 求 $\int \ln x dx$.

解 设 $u=\ln x, dv=dx$, 有 $du=\frac{1}{x}dx, v=x$.

$$\int \ln x dx=x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx$$

$$=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C.$$

例 3. 求 $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$.

解 设 $u=\ln x$, $dv=\frac{dx}{x^2}$, 有 $du=\frac{1}{x}dx, v=-\frac{1}{x}$.

$$\int\frac{\ln x}{x^2}dx=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{dx}{x^2}$$

$$=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C=-\frac{1}{x}(\ln x+1)+C.$$

例 4. 求 $\int x\,\mathrm{arctg}\,x dx$.

解 设 $u=\mathrm{arctg}\,x$, $dv=xdx$, 有 $du=\frac{dx}{1+x^2}, v=\frac{x^2}{2}$.

$$\int x\,\mathrm{arc\,tg}x\,dx=\frac{x^2}{2}\mathrm{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\mathrm{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\mathrm{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\frac{x^2}{2}\mathrm{arc\,tg}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\mathrm{arc\,tg}x+C$$

$$=\frac{1}{2}(x^2\,\mathrm{arc\,tg}x+\mathrm{arc\,tg}x-x)+C.$$

应用分部积分法，可省略"设"的步骤，使书写简化. 例如:

例 5. 求$\int x^2e^x dx$.

解 对这个不定积分要连续使用两次分部积分公式(2).

$$\int x^2\,\underline{e^x\,dx}=\int x^2de^x=x^2e^x-\int e^xd(x^2)$$

$$=x^2e^x-2\int x\underline{e^x dx}=x^2e^x-2\int xde^x$$

$$=x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^x\,dx\right)$$

$$=x^2e^x-2(xe^x-e^x)+C$$

$$=e^x(x^2-2x+2)+C.$$

例 6. 求 $I=\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx\quad(\alpha\neq0)$.

解 $I=\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\int\cos\beta x\,d\left(\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\right)$

$$=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\cos\beta x-\frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha x}d\cos\beta x$$

$$=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\cos\beta x+\frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx. \tag{3}$$

求不定积分$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$ 再应用分部积分公式(2).

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx=\int \sin\beta x d\left(\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha x}d\sin\beta x$$

$$=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$$

$$=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{\beta}{\alpha}I. \tag{4}$$

将(4)式代入(3)式,得

$$I=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\cos\beta x+\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{\beta}{\alpha}I\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\cos\beta x+\frac{\beta}{\alpha^2}e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{\beta^2}{\alpha^2}I.$$

或 $$I=\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx=\frac{e^{\alpha x}(\beta\sin\beta x+\alpha\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}+C.$$

同样方法,可得

$$J=\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx=\frac{e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}+C.$$

二、换元积分法

由复合函数求导法则,得到下面两种换元积分法.它是求不定积分经常使用的极为重要的方法,常常在应用其它方法的同时,也要伴随着应用换元积分法.

定理1.(第一换元积分法) 若函数$u=\varphi(x)$在$[a,b]$可导,且$\alpha\leqslant\varphi(x)\leqslant\beta$,$\forall u\in[\alpha,\beta]$,有$F'(u)=f(u)$,则函数$f[\varphi(x)]\varphi'(x)$存在原函数$F[\varphi(x)]$,即

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=F[\varphi(x)]+C. \tag{5}$$

证法 只须证明,$\{F[\varphi(x)]\}'=f[\varphi(x)]\varphi'(x)$.

证明 由复合函数的求导法则,有

$$\{F[\varphi(x)]\}'=F'(u)\varphi'(x)=f(u)\varphi'(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x). \quad \Box$$

第一换元法指出，求(5)式等号左端的不定积分，设 $\varphi(x)=u$，则化为求不定积分 $\int f(u)du$. 若 $f(u)$ 存在原函数 $F(u)$，则

$$\int f(u)du=F(u)+C.$$

最后再将 $u=\varphi(x)$ 代入上式等号的右端，就得到了所求的不定积分

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=F[\varphi(x)]+C.$$

由于 $\varphi'(x)dx=d\varphi(x)$，第一换元积分法可表为

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)\xlongequal{\varphi(x)=u}\int f(u)du$$

$$=F(u)+C\xlongequal{u=\varphi(x)}F[\varphi(x)]+C.$$

第一换元积分法是将被积表达式"凑"成微分的形式，亦称"凑微分法".

例 7. 求 $\int\sqrt[3]{x+5}\,dx$.

解 $$\int\sqrt[3]{x+5}\,dx=\int(x+5)^{\frac{1}{3}}d(x+5)\xlongequal{x+5=u}\int u^{\frac{1}{3}}du$$

$$=\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}+C\xlongequal{u=x+5}\frac{3}{4}(x+5)^{\frac{4}{3}}+C.$$

例 8. 求 $\int\sin(5x+8)dx$.

解 $$\int\sin(5x+8)dx=\frac{1}{5}\int\sin(5x+8)d(5x+8)$$

$$\xlongequal{5x+8=u}\frac{1}{5}\int\sin u\,du=-\frac{1}{5}\cos u+C$$

$$\xlongequal{u=5x+8}-\frac{1}{5}\cos(5x+8)+C.$$

例 9. 求 $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$.

解 $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = -\int e^{\frac{1}{x}} d\left(\frac{1}{x}\right) \xlongequal{\frac{1}{x}=u} -\int e^u du$

$$= -e^u + C \xlongequal{u=\frac{1}{x}} -e^{\frac{1}{x}} + C.$$

待方法熟练之后，可以省略"设"的步骤，将所设的函数当作一个变量，可使书写简化. 如例 7、例 8、例 9 可直接写为:

$$\int \sqrt[3]{x+5}\,dx = \int (x+5)^{\frac{1}{3}} d(x+5) = \frac{3}{4}(x+5)^{\frac{4}{3}} + C.$$

$$\int \sin(5x+8)\,dx = \frac{1}{5}\int \sin(5x+8)\,d(5x+8)$$

$$= -\frac{1}{5}\cos(5x+8) + C.$$

$$\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = -\int e^{\frac{1}{x}} d\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{\frac{1}{x}} + C.$$

例10. 求 $\int (5x^2+11)^5 x\,dx$.

解 $\int (5x^2+11)^5 x\,dx = \frac{1}{10}\int (5x^2+11)^5 d(5x^2+11)$

$$= \frac{1}{60}(5x^2+11)^6 + C.$$

$\left(\frac{1}{10}d(5x^2+11) = x\,dx\text{，将 } 5x^2+11 \text{ 当作一个变量}\right)$

例 11. 求 $\int x^2\sqrt{4-3x^3}\,dx$.

解 $\int x^2\sqrt{4-3x^3}\,dx = -\frac{1}{9}\int (4-3x^3)^{\frac{1}{2}} d(4-3x^3)$

$$= -\frac{2}{27}(4-3x^3)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$\left(-\frac{1}{9}d(4-3x^3)=x^2dx\text{，将 }4-3x^3\text{ 当作一个变量}\right)$

例 12. 求 $\int\frac{dx}{a^2+x^2}\quad(a\neq0)$.

解 $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\int\frac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C.$$

$\left(\text{将}\frac{x}{a}\text{当作一个变量，应用不定积分表中的公式 10}\right)$

例 13. 求 $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\quad(a>0)$.

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$

$$=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

$\left(\text{将}\frac{x}{a}\text{当作一个变量，应用不定积分表中的公式 9}\right)$

例 14. 求 $\int\frac{dx}{x\ln x}$.

解 $\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{1}{\ln x}\frac{dx}{x}=\int\frac{1}{\ln x}d\ln x$

$$=\ln|\ln x|+C.$$

例 15. 求 $\int\cos^2x\sin x dx$.

解 $$\int\cos^2 x\sin x dx=-\int\cos^2 x d\cos x$$
$$=-\frac{1}{3}\cos^3 x+C.$$

例 16. 求 $\int\csc x dx$ 与 $\int\sec x dx$.

解法一

$$\int\csc x dx=\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

因为 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\csc x-\operatorname{ctg}x$,

所以 $$\int\csc x dx=\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|\csc x-\operatorname{ctg}x\right|+C.$$

同法可得

$$\int\sec x dx=\int\frac{dx}{\cos x}=\ln|\sec x+\operatorname{tg}x|+C.$$

解法二

$$\int\csc x dx=\int\frac{\csc x(\csc x-\operatorname{ctg}x)}{\csc x-\operatorname{ctg}x}dx$$

$$=\int\frac{\csc^2 x-\csc x\operatorname{ctg}x}{\csc x-\operatorname{ctg}x}dx=\int\frac{d(\csc x-\operatorname{ctg}x)}{\csc x-\operatorname{ctg}x}$$

$$=\ln|\csc x-\operatorname{ctg}x|+C.$$

同法可得

$$\int\sec x dx=\ln|\sec x+\operatorname{tg}x|+C.$$

定理 2.（第二换元积分法） 若函数 $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\ \beta]$ 可导，$a\leqslant\varphi(t)\leqslant b$，且 $\varphi'(t)\neq 0$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有定义，$\forall t\in[\alpha,\beta]$，有

$$G'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t),$$

则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 存在原函数，且

$$\int f(x)dx=G[\varphi^{-1}(x)]+C. \tag{6}$$

证明 已知 $\forall t\in[\alpha,\beta]$，有 $\varphi'(t)\neq 0$，则函数 $x=\varphi(t)$ 存在可导的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$. 由复合函数和反函数的求导法则，有

$$\{G[\varphi^{-1}(x)]\}'=G'(t)\cdot[\varphi^{-1}(x)]'=f[\varphi(t)]\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$$

$$=f[\varphi(t)]=f(x).\ \square$$

第二换元积分法指出，求(6)式等号左端的不定积分，设 $x=\varphi(t)$，则化为求不定积分 $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$. 若 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 存在原函数 $G(t)$，则

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=G(t)+C.$$

最后将 $t=\varphi^{-1}(x)$ 代入上式等号右端，就得到所求的不定积分

$$\int f(x)dx=G[\varphi^{-1}(x)]+C.$$

由于 $\varphi'(t)dt=d\varphi(t)$，第二换元积分法可表为

$$\int f(x)dx\xlongequal{x=\varphi(t)}\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=G(t)+C$$

$$\xlongequal{t=\varphi^{-1}(x)}G[\varphi^{-1}(x)]+C.$$

例 17. 求 $\int\sqrt{a^2-x^2}dx\quad(a>0)$.

解 设 $x=a\sin t$，有 $dx=a\cos t\,dt$.

$$t=\arcsin\frac{x}{a},\quad -a\leqslant x\leqslant a,\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

根据公式(6)，有

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\underbrace{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}_{f[\varphi(t)]}\cdot\underbrace{a\cos t\,dt}_{\varphi'(t)dt}$$

$$=a^2\int|\cos t|\cos t\,dt=a^2\int\cos^2 t\,dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt=\frac{a^2}{2}\left(\int dt+\int\cos 2t\,dt\right)$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

注 当$-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$时，$|\cos t|=\cos t$.

$$\frac{a^2}{4}\sin 2t=\frac{1}{2}a\sin t\cdot a\cos t=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}.$$

例 18. 求$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}\qquad(a>0)$.

解 设$x=a\operatorname{tg}t$，有$dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt=a\sec^2 t\,dt$.

当$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$时，$x=a\operatorname{tg}t$存在反函数. $|\sec t|=\sec t$.

根据公式(6)和例 16，有

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{a\sec^2 t\,dt}{a\sqrt{\operatorname{tg}^2 t+1}}=\int\frac{\sec^2 t\,dt}{\sec t}$$

$$=\int\sec t\,dt=\ln|\sec t+\operatorname{tg}t|+C.$$

为了将$\sec t$换成x的函数，根据$\operatorname{tg}t=\frac{x}{a}$作成直角三角形(如图 7.2).

$$\sec t=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a},$$

有
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C$$
$$=\ln\frac{|x+\sqrt{x^2+a^2}|}{a}+C$$
$$=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C'.$$

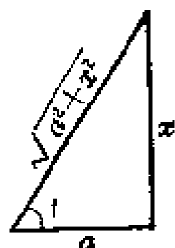


图 7.2

其中 $C'=C-\ln a$，也是任意常数.

例 19. 求 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}\quad(a>0)$.

解 设 $x=a\sec t$，有 $dx=a\sec t\,\mathrm{tg}\,t\,dt$.

当$0<t<\frac{\pi}{2}$或$\frac{\pi}{2}<t<\pi$ 时，$x=a\sec t$ 存在反函数. 这里仅讨论 $0<t<\frac{\pi}{2}$的情况，同样方法可讨论$\frac{\pi}{2}<t<\pi$ 的情况.

当 $0<t<\frac{\pi}{2}$时，$|\mathrm{tg}\,t|=\mathrm{tg}\,t$. 根据公式(6)和例 16，有

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{a\sec t\,\mathrm{tg}\,t}{a\,\mathrm{tg}\,t}dt=\int\sec t\,dt$$
$$=\ln|\sec t+\mathrm{tg}\,t|+C.$$

为了将 $\mathrm{tg}\,t$ 换成 x 的函数，根据 $\sec t=\frac{x}{a}$作成直角三角形(如图 7.3).

$$\mathrm{tg}\,t=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a},$$

有
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C$$
$$=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C'.$$

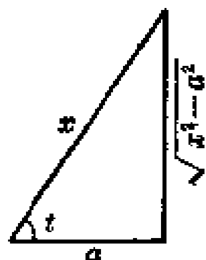


图 7.3

上述例 17, 18, 19 是利用三角函数进行换元，这类换元多为下

面三种情况：

1 被积函数含有因子$\sqrt{a^2-x^2}$，设$x=a\sin t$或$x=a\cos t$进行换元；

2 被积函数含有因子$\sqrt{x^2+a^2}$，设$x=a\mathrm{tg}t$或$x=a\mathrm{ctg}t$进行换元；

3 被积函数含有因子$\sqrt{x^2-a^2}$，设$x=a\sec t$或$x=a\csc t$进行换元.

求这种类型函数的不定积分，有的也可应用分部积分法.

例 20. 求 $K=\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$.

解 应用分部积分法，有

$$
\begin{aligned}
K&=\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=x\sqrt{x^2-a^2}-\int x\,d\sqrt{x^2-a^2}\\
&=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx\\
&=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx\\
&=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx-a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}\\
&=x\sqrt{x^2-a^2}-K-a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.
\end{aligned}
$$

由例 19，有

$$2K=x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C',$$

或

$$
\begin{aligned}
K&=\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx\\
&=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C,
\end{aligned}
$$

其中 $C=\frac{C'}{2}$.

同样方法可求得：

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.$$

在原有不定积分公式表中 12 个公式的基础上再补充几个公式：

13. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$

14. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C.$

15. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$

16. $\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C.$

注 求某些函数的不定积分，有时可用不同的函数进行换元．因此，得到的不定积分在形式上也可能不相同．例如：

1. $\int\sin x\cos x\,dx=\int\sin x\,d\sin x=\frac{1}{2}\sin^2x+C.$

2. $\int\sin x\cos x\,dx=-\int\cos x\,d\cos x=-\frac{1}{2}\cos^2x+C.$

3. $\int\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int\sin 2x\,dx=-\frac{1}{4}\cos 2x+C.$

这是应用三个不同函数（$\sin x=t$，$\cos x=t$，$2x=t$）进行换元，其结果都是正确的．但是，结果的形式却不相同．这是因为这三个结果除 C 外彼此之间仅相差一个常数，即

$$\frac{1}{2}\sin^2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos^2x=-\frac{1}{2}\cos^2x+\frac{1}{2},$$

$$-\frac{1}{2}\cos^2x=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}=-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{4},$$

即三个结果都是表示函数 $\sin x\cos x$ 的原函数族．

由于不定积分结果在形式上的多样性，如果读者求得的不定积分结果与答案不相同，也可能是正确的（只与答案相差一个常数）．一般的验证方法是，将所得的结果求导数，看它是否等于被积函数．

练习题 7.2

1．应用分部积分法求下列不定积分：

(1) $\int x\cos x dx$,　(2) $\int x\ln x dx$,　(3) $\int \ln(1-x)dx$,

(4) $\int x^3\ln x dx$,　(5) $\int x^n\ln x dx$,　(6) $\int (\ln x)^2 dx$,

(7) $\int e^x\cos x dx$,　(8) $\int x^2\cos x dx$.

2．应用换元积分法求下列不定积分：

(1) $\int e^{5x}dx$,　(2) $\int \cos 3x dx$,　(3) $\int \frac{dx}{1-3x}$,

(4) $\int \sin(5x+1)dx$,　(5) $\int \frac{dx}{\cos^2 7x}$,　(6) $\int \operatorname{tg} 2x dx$,

(7) $\int \cos^3 x\sin x dx$,　(8) $\int x\sqrt{x^2+1}dx$,　(9) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}}$,

(10) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$,　(11) $\int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x}$,　(12) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}dx$,

(13) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x-1}}$,　(14) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$,　(15) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x+1}}{\cos^2 x}dx$,

(16) $\int \frac{\cos 2x dx}{(2+3\sin 2x)^3}$,　(17) $\int \frac{\sin 3x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}}$,　(18) $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$,

(19) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$,　(20) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$,　(21) $\int \frac{x}{1+x^2}dx$,

(22) $\int \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+3}$,　(23) $\int \frac{\cos x}{2\sin x+3}dx$,　(24) $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$,

(25) $\int 2x(x^2+1)^4 dx$,　(26) $\int \operatorname{tg}^4 x dx$,　(27) $\int e^{\sin x}\cos x dx$,

(28) $\int \frac{e^x dx}{3+4e^x}$,　(29) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$,　(30) $\int \frac{dx}{9x^2+4}$,

(31) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$,　　(32) $\int \frac{x dx}{x^4+a^4}$,　　(33) $\int \frac{\cos x dx}{a^2+\sin^2 x}$,

(34) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$,　　(35) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$,

3. 应用分部积分法求下列不定积分:

(1) $\int \arcsin x dx$,　　(2) $\int x^2 e^{-2x} dx$,

(3) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2}) dx$,　　(4) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x} dx$,

(5) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$,　　(6) $\int x \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} dx$,

(7) $\int x \operatorname{arctg} x dx$,　　(8) $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$.

*　　*　　*　　*

4. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$,　　(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$,

(3) $\int \frac{1}{1-x^2} \ln\frac{1+x}{1-x} dx$,　　(4) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x} dx$,

(5) $\int \frac{dx}{1+e^x}$,　　(6) $\int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx$,

(7) $\int \cos^5 x\sqrt{\sin x} dx$,　　(8) $\int x\ln\frac{1+x}{1-x} dx$,

(9) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}$,　　(10) $\int \frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx$,

(11) $\int (|1+x|-|1-x|) dx$,　　(12) $\int e^{-|x|} dx$.

§7.3 有理函数的不定积分

一、代数的预备知识

有理函数的一般形式是

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

其中 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 都是多项式.

若 $P(x)$ 的次数大于或等于 $Q(x)$ 的次数，$\frac{P(x)}{Q(x)}$ 称为**有理假分式**. 若 $P(x)$ 的次数小于 $Q(x)$ 的次数，$\frac{P(x)}{Q(x)}$ 称为**有理真分式**.

任意有理假分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$，用 $Q(x)$ 除 $P(x)$，总能化为多项式 $T(x)$ 与有理真分式 $\frac{F(x)}{Q(x)}$ 之和, 即

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=T(x)+\frac{F(x)}{Q(x)},$$

其中 $F(x)$ 的次数低于 $Q(x)$ 的次数. 例如:

$$\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}=x^2-2x+3-\frac{4x+6}{x^2+2x+1}.$$

因为多项式 $T(x)$ 的不定积分易求, 所以求有理函数的不定积分关键在于求有理真分式 $\frac{F(x)}{Q(x)}$ 的不定积分.

如果 $\frac{F(x)}{Q(x)}$ 是有理真分式. 由代数知, 在实数集 R，任意多项式 $Q(x)$ 总能分解为一个常数(为了书写简便, 取常数为 1)与形如

$$(x-a)^{\alpha} \quad 与 \quad (x^2+px+q)^{\mu} \quad (p^2-4q<0)$$

诸因式之积:

$$Q(x)=(x-a)^{\alpha}\cdots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\mu}\cdots(x^2+rx+s)^{\nu},$$

其中 $\alpha,\cdots,\beta,\mu,\cdots,\nu$ 都是自然数.

根据《高等代数》的分项分式定理，有理真分式 $\frac{F(x)}{Q(x)}$ 总能表为若干个简单分式之和, 即

$$\frac{F(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{A_{\alpha}}{x-a}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+$$

$$+\frac{B_1}{(x-b)^\beta}+\frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}}+\cdots+\frac{B_\beta}{x-b}$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^\mu}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{\mu-1}}+\cdots+\frac{M_\mu x+N_\mu}{x^2+px+q}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+$$

$$+\frac{U_1x+V_1}{(x^2+rx+s)^\nu}+\frac{U_2x+V_2}{(x^2+rx+s)^{\nu-1}}+\cdots+\frac{U_\nu x+V_\nu}{x^2+rx+s}, \quad (1)$$

其中 $A_i, B_j, M_k, N_k, U_m, V_m$ 都是常数．求这些常数的方法，将(1)式等号右端通分，(1)式等号两端的分母都是 $Q(x)$，得

$$\frac{F(x)}{Q(x)}=\frac{R(x)}{Q(x)} \quad 或 \quad F(x)\equiv R(x).$$

(1) 式成立$\Longleftrightarrow$多项式 $F(x)$ 与 $R(x)$ 同次幂的系数相等．于是，得到一次联立方程组，求解即得．

例 1. 将 $\frac{1}{x^2-a^2}$ 分成分项分式．

解 设 $\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}$,

或
$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{A(x+a)+B(x-a)}{(x-a)(x+a)}.$$

有
$$1\equiv A(x+a)+B(x-a)=(A+B)x+(A-B)a.$$

则
$$\begin{cases}A+B=0,\\ A-B=\frac{1}{a}.\end{cases} \quad 解得\ A=\frac{1}{2a}, \quad B=-\frac{1}{2a}.$$

于是，
$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right).$$

例 2. 将 $\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$ 分成分项分式．

解 设 $\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}.$

有 $2x^2+2x+13$

$$\equiv A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-2)+(Dx+E)(x-2)(x^2+1).$$

将上式恒等号右端展开合并同类项，再令恒等式两边同次幂的系数相等，得一次联立方程组：

$$\begin{cases} A \qquad\qquad\quad + D \qquad\quad = 0, \\ \qquad\qquad\qquad -2D+E = 0, \\ 2A+B \qquad\quad + D \quad -2E = 2, \\ \quad -2B+C-2D+E = 2, \\ A \qquad\quad -2C \qquad\quad -2E = 13. \end{cases}$$

解得 $A=1, B=-3, C=-4, D=-1, E=-2$. 于是,

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x-2}-\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}-\frac{x+2}{x^2+1}.$$

例 3. 将 $\dfrac{3x^3-1}{(x+1)^2(x-1)^3}$ 分成分项分式.

解 设 $\dfrac{3x^3-1}{(x+1)^2(x-1)^3}$

$$=\frac{A_1}{(x+1)^2}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{B_1}{(x-1)^3}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{x-1}$$

有 $$3x^3-1\equiv A_1(x-1)^3+A_2(x+1)(x-1)^3+B_1(x+1)^2$$
$$+B_2(x+1)^2(x-1)+B_3(x+1)^2(x-1)^2.$$

令 $x=1$, 有 $2=4B_1$, $\quad B_1=\dfrac{1}{2}$.

令 $x=-1$, 有 $-4=-8A_1$, $A_1=\dfrac{1}{2}$.

令 $x=0$, 有 $-1=-A_1-A_2+B_1-B_2+B_3$.

已知 $A_1=B_1=\dfrac{1}{2}$, 则

$$-A_2-B_2+B_3=-1.$$

同样方法，再令 $x=2$ 与 $x=-2$, 将 $A_1=B_1=\dfrac{1}{2}$ 代入，分别得

$$A_2+3B_2+3B_3=6.$$

与
$$9A_2-B_2+3B_3=4.$$

从而，令 $x=0, x=2, x=-2$，得一次联立方程组：

$$\begin{cases}-A_2-B_2+B_3=-1,\\ A_2+3B_2+3B_3=6,\\ 9A_2-B_2+3B_3=4.\end{cases}$$

解得 $A_2=-\frac{3}{8}$，$B_2=\frac{7}{4}$，$B_3=\frac{3}{8}$. 于是，

$$\frac{3x^3-1}{(x+1)^2(x-1)^3}=\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{3}{8(x+1)}$$

$$+\frac{1}{2(x-1)^3}+\frac{7}{4(x-1)^2}+\frac{3}{8(x-1)}.$$

二、有理函数的不定积分

根据分项分式定理，任意有理真分式的不定积分都归结为以下两类的不定积分：

1. $\int\frac{A}{(x-a)^n}dx$，$n\in\mathbf{N}$.

2. $\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx$，　$m\in\mathbf{N}, p^2-4q<0$.

下面分别求这两类不定积分：

1. $$\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=\begin{cases}A\ln|x-a|+C, & n=1,\\ \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C, & n>1.\end{cases}$$

2. $$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx=\int\frac{Mx+N}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^m}dx$$

设　$t=x+\frac{p}{2}$. 有 $dt=dx$. 为书写简单，令 $a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$，有

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx = \int \frac{Mt+N-\frac{Mp}{2}}{(t^2+a^2)^m}dt$$

$$= M\int \frac{t}{(t^2+a^2)^m}dt + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}. \tag{2}$$

当 $m=1$ 时,(2)式的两个不定积分分别是

$$\int \frac{t}{t^2+a^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(t^2+a^2)+C.$$

$$\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a}+C \qquad \text{(见 §7.2. 例12)}$$

当 $m>1$ 时,(2)式的两个不定积分分别是

$$\int \frac{t}{(t^2+a^2)^m}dt = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m} = \frac{1}{2(1-m)(t^2+a^2)^{m-1}}+C.$$

$$J_m = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} = \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^m}dt$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{m-1}} - \int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^m}dt\right)$$

$$= \frac{1}{a^2}J_{m-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t\cdot t\,dt}{(t^2+a^2)^m}$$

$$= \frac{1}{a^2}J_{m-1} + \frac{1}{2(m-1)a^2}\int t\,d\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}$$

(应用分部积分法)

$$= \frac{1}{a^2}J_{m-1} + \frac{1}{2(m-1)a^2}\left(\frac{t}{(t^2+a^2)^{m-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{m-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{a^2}J_{m-1} + \frac{1}{2(m-1)a^2}\left(\frac{t}{(t^2+a^2)^{m-1}} - J_{m-1}\right).$$

$$= \frac{t}{2(m-1)a^2(t^2+a^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2a^2(m-1)}J_{m-1}.$$

于是, $$J_m = \frac{t}{2(m-1)a^2(t^2+a^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2a^2(m-1)}J_{m-1}.$$

这是关于 J_m 的递推公式. 重复应用这个递推公式, 最后就归结为

$$J_1=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a}+C.$$

再令 $t=x+\frac{p}{2}, a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$, 代入上述所得的结果之中, 就得到第二类有理函数的不定积分.

例 4. 求 $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$.

解 由例 1 知, $\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$,

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right)$$

$$=\frac{1}{2a}(\ln|x-a|-\ln|x+a|)+C$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

例 5. 求 $\int\frac{6x^2-11x+4}{x(x-1)^2}dx$.

解 设 $\frac{6x^2-11x+4}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}$.

有 $\quad 6x^2-11x+4\equiv A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1)$.

$$\begin{cases} A \quad\quad +C=6, \\ -2A+B-C=-11, \\ A \quad\quad\quad =4. \end{cases}$$ 解得 $A=4, B=-1, C=2$.

即

$$\frac{6x^2-11x+4}{x(x-1)^2}=\frac{4}{x}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}.$$

$$\int\frac{6x^2-11x+4}{x(x-1)^2}dx=\int\frac{4}{x}dx+\int\frac{-1}{(x-1)^2}dx+\int\frac{2}{x-1}dx$$

$$=4\ln|x|+\frac{1}{x-1}+2\ln|x-1|+C$$

$$=\frac{1}{x-1}+\ln[x^4(x-1)^2]+C.$$

例6. 求 $\int\frac{dx}{x^3+1}$.

解 设 $\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$.

有 $1\equiv(A+B)x^2+(B+C-A)x+(A+C)$.

$$\begin{cases}A+B\qquad=0,\\-A+B+C=0,\\A\qquad+C=1.\end{cases}\quad 解得\ A=\frac{1}{3},\quad B=-\frac{1}{3},\ C=\frac{2}{3}.$$

即
$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right).$$

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx.$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\int\frac{x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-2}{x^2-x+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

例7. 求 $\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx$.

解 由例2，

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

$$\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx=\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{x+2}{x^2+1}dx-\int\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}dx.$$

分别求上述等式等号右端的每一个不定积分：

1) $\int\frac{dx}{x-2}=\ln|x-2|+C_1$

2) $\int\frac{x+2}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+2\int\frac{dx}{x^2+1}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+2\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+2\operatorname{arctg}x+C_2.$$

3) $\int\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}dx=3\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2}+4\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}+4\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$=-\frac{3}{2(x^2+1)}+4\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

由 J_m 的递推公式($m=2, a=1$)，

$$J_2=\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C_3.$$

有 $\int\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}dx=-\frac{3}{2(x^2+1)}+\frac{2x}{x^2+1}+2\operatorname{arctg}x+C_3$

$$=\frac{4x-3}{2(x^2+1)}+2\operatorname{arctg}x+C_3.$$

于是， $\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx$

$$=\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-2\operatorname{arctg}x-\frac{4x-3}{2(x^2+1)}$$

$$-2\operatorname{arctg}x+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x-2)^2-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{4x-3}{2(x^2+1)}$$

$$-4\operatorname{arctg}x+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1}-\frac{4x-3}{2(x^2+1)}-4\operatorname{arctg}x+C.$$

由此可见,有理函数的不定积分总能"积"出来,即有理函数的不定积分总能用初等函数:有理函数、对数函数和反正切函数表示出来. 于是, 有理函数存在初等函数的原函数(不定积分). 这是有理函数集合一个理想的性质.如果求一个函数的不定积分,只要选择适当的换元,将被积函数化为有理函数,那么这个不定积分总能"积"出来. 这种方法也叫做"有理化法".

练习题 7.3

求下列有理函数的不定积分:

(1) $\int\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$,　(2) $\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$,

(3) $\int\frac{dx}{x(x+1)^2}$,　(4) $\int\frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$,

(5) $\int\frac{x^4}{x^4-1}dx$,　(6) $\int\frac{dx}{x^4+1}$,

(7) $\int\frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}dx$,　(8) $\int\frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}dx$,

(9) $\int\frac{x^2+1}{(x^2-4x+5)^2}dx$,　(10) $\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$.

§7.4 简单无理函数与三角函数的不定积分

一、简单无理函数的不定积分

本节只讨论以初等函数为原函数的两类比较简单的无理函数

的不定积分．在理论上，讨论无理函数的不定积分有一个原则，那就是选择适当的换元，将无理函数化为有理函数，即有理化，至此无理函数的不定积分问题就得到解决．这是因为，有理函数的原函数总能用初等函数表示出来．

符号 $R(x,y)$ 表示由变量 x、y 和常数经过有限次四则运算构成的二元有理函数．

1. $R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$**型函数的不定积分**．其中 a,b,c,d 都是常数，自然数 $n\geqslant 2$，且 $ad-bc\neq 0$．

设 $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}=t$，有 $x=\dfrac{dt^n-b}{a-ct^n}=\varphi(t)$，$dx=\varphi'(t)dt$．

于是，
$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R[\varphi(t),t]\varphi'(t)dt.$$

因为 $\varphi(t)$ 是有理函数，$\varphi'(t)$ 也是有理函数①，所以上式等号右端的被积函数是关于 t 的有理函数．

例1． 求 $\displaystyle\int\frac{x^{\frac{1}{7}}+x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{8}{7}}+x^{\frac{15}{14}}}dx$．

解 四个幂函数的指数分母的最小公倍数是14，被积函数是 $R(\sqrt[14]{x})$ 型．

设 $\sqrt[14]{x}=t$ 或 $x=t^{14}$，有 $dx=14t^{13}dt$．

$$\int\frac{x^{\frac{1}{7}}+x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{8}{7}}+x^{\frac{15}{14}}}dx=\int\frac{(t^{14})^{\frac{1}{7}}+(t^{14})^{\frac{1}{2}}}{(t^{14})^{\frac{8}{7}}+(t^{14})^{\frac{15}{14}}}14t^{13}dt$$

$$=14\int\frac{t^2+t^7}{t^{16}+t^{15}}t^{13}dt=14\int\frac{t^5+1}{t+1}dt$$

$$=14\int(t^4-t^3+t^2-t+1)dt$$

① 有理函数的导数仍是有理函数．

$$=14\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t\right)+C$$

$$=14\left(\frac{1}{5}x^{\frac{5}{14}}-\frac{1}{4}x^{\frac{2}{7}}+\frac{1}{3}x^{\frac{3}{14}}-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{7}}+x^{\frac{1}{14}}\right)+C.$$

例 2. 求$\int\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\cdot\frac{dx}{(2-x)^2}$.

解 设 $\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}=t$ 或 $x=\frac{2(1-t^3)}{1+t^3}$，有 $dx=\frac{-12t^2}{(1+t^3)^2}dt$，

$$\int\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\cdot\frac{dx}{(2-x)^2}=\int t\cdot\frac{(1+t^3)^2}{16t^6}\cdot\frac{-12t^2}{(1+t^3)^2}dt$$

$$=-\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^3}$$

$$=\frac{3}{8t^2}+C=\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C.$$

注 例 2 用凑微分法极为简便. 如

$$\int\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\cdot\frac{dx}{(2-x)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{d\left(\frac{2+x}{2-x}\right)}{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{3}{8}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{\frac{2}{3}}+C.$$

2. $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ 型函数的不定积分. 其中 a,b,c 都是常数，$a\neq0$，$b^2-4ac\neq0$(即 ax^2+bx+c 无重根).

1) 如果 $b^2-4ac>0$，则 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不同的实根，设实根是 α 与 β，即 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$. 设

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=t(x-\alpha).$$

等式两端平方，再消去因式 $x-\alpha$，得

$$a(x-\beta)=t^2(x-\alpha)\ \text{或}\ x=\frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}.$$

有 $$dx=\frac{2a(\beta-\alpha)t}{(a-t^2)^2}dt,\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(\beta-\alpha)t}{a-t^2}.$$

于是， $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$

$$=\int R\left(\frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2},\ \frac{a(\beta-\alpha)t}{a-t^2}\right)\frac{2a(\beta-\alpha)t}{(a-t^2)^2}dt,$$

被积函数是关于 t 的有理函数.

例 3. 求 $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{2+x-x^2}}$.

解 $2+x-x^2=(1+x)(2-x)=0$，有两个实根 -1 与 2.

设 $\sqrt{2+x-x^2}=t(1+x)$ 或 $x=\frac{2-t^2}{1+t^2}$.

有 $dx=\frac{-6t}{(1+t^2)^2}dt$， $\sqrt{2+x-x^2}=\frac{3t}{1+t^2}$.

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{2+x-x^2}}=-\frac{2}{3}\int dt=-\frac{2}{3}t+C$$

$$=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2-x}{1+x}}+C.$$

2) 如果 $b^2-4ac<0$，则 $ax^2+bx+c=0$ 没有实根. 此时 a 与 c 必同号(否则，必有 $b^2-4ac>0$，这与已知条件矛盾). 同时 c 的符号(即 a 的符号)不能为负，否则，当 $x=0$ 时，函数 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 没有意义.

设 $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$ ①. 两端平方，整理得

$$x=\frac{b\mp2\sqrt{c}\,t}{t^2-a}=\varphi(t).$$

有 $dx=\varphi'(t)dt$， $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\varphi(t)\pm\sqrt{c}$.

于是， $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$

$$=\int R(\varphi(t),t\varphi(t)\pm\sqrt{c})\varphi'(t)dt.$$

---

① 也可设 $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}\,x$.

因为 $\varphi(t)$ 是有理函数，$\varphi'(t)$ 也是有理函数，所以上式等号右端的被积函数是关于 t 的有理函数.

例 4. 求 $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

解 $c=1>0$，设 $\sqrt{x^2-x+1}=tx-1$ 或 $x=\frac{2t-1}{t^2-1}$.

有
$$dx=\frac{-2(t^2-t+1)}{(t^2-1)^2}dt.$$

$$\sqrt{x^2-x+1}=\frac{t^2-t+1}{t^2-1},\quad x+\sqrt{x^2-x+1}=\frac{t}{t-1}.$$

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int\frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}dt$$

$$=\int\left(\frac{2}{t}-\frac{1}{2(t-1)}-\frac{3}{2(t+1)}-\frac{3}{(t+1)^2}\right)dt$$

$$=2\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{3}{2}\ln|t+1|+\frac{3}{t+1}+C.$$

已知 $t=\frac{1+\sqrt{x^2-x+1}}{x}$，代入上式，即得所求的不定积分.

当 $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ 型函数是最简形式时（见下例），求它的不定积分可直接应用第 294 页简单无理函数的不定积分公式 13、14、15、16. 这样可简化计算.

例 5. 求 $\int\frac{dx}{\sqrt{11+6x-x^2}}$.

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{11+6x-x^2}}=\int\frac{d(x-3)}{\sqrt{20-(x-3)^2}}$ （由公式 13）

$$=\arcsin\frac{x-3}{\sqrt{20}}+C.$$

例 6. 求 $\int\frac{x-2}{\sqrt{2x^2+4x+5}}dx$.

解 $\int \frac{x-2}{\sqrt{2x^2+4x+5}}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x+4-12}{\sqrt{2x^2+4x+5}}dx$

$$=\frac{1}{4}\int \frac{4x+4}{\sqrt{2x^2+4x+5}}dx - 3\int \frac{dx}{\sqrt{[\sqrt{2}(x+1)]^2+3}}$$

$$=\frac{1}{4}\int \frac{d(2x^2+4x+5)}{\sqrt{2x^2+4x+5}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\int \frac{d\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{[\sqrt{2}(x+1)]^2+3}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+4x+5}$$

$$-\frac{3}{\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}(x+1)+\sqrt{2x^2+4x+5}|+C.$$

例 7. 求 $\int (x-2)\sqrt{x^2+4x+1}\,dx$.

解 $\int (x-2)\sqrt{x^2+4x+1}\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int (2x+4-8)\sqrt{x^2+4x+1}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int (2x+4)\sqrt{x^2+4x+1}\,dx - 4\int \sqrt{x^2+4x+1}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \sqrt{x^2+4x+1}\,d(x^2+4x+1)$$

$$-4\int \sqrt{(x+2)^2-3}\,d(x+2)$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+4x+1)^{\frac{3}{2}} - 4\Big(\frac{x+2}{2}\sqrt{(x+2)^2-3}$$

$$-\frac{3}{2}\ln|x+2+\sqrt{(x+2)^2-3}|\Big)+C$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+4x+1)^{\frac{3}{2}} - 2(x+2)\sqrt{x^2+4x+1}$$

$$+6\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}|+C.$$

二、三角函数的不定积分

求三角函数 $R(\sin x, \cos x)$ 的不定积分

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

常常有多种方法，其中有一种是万能的，尽管这种方法不是最简便的.

设 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\,(-\pi<x<\pi)$. 有

$$x=2\operatorname{arctg}t, \qquad dx=\frac{2}{1+t^2}dt.$$

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

有 $$\int R(\sin x, \cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt.$$

显然，上式等号右端的被积函数是有理函数，因此三角函数 $R(\sin x, \cos x)$ 存在初等函数的原函数. 换元 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$，称为关于三角函数 $R(\sin x, \cos x)$ 的**万能换元**.

例 8. 求 $\displaystyle\int\frac{\operatorname{ctg}x}{\sin x+\cos x+1}dx$.

解 设 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. 有 $x=2\operatorname{arctg}t$，$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$，

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \operatorname{ctg}x=\frac{1-t^2}{2t}.$$

$$\int\frac{\mathrm{ctg}x}{\sin x+\cos x+1}dx=\int\frac{\frac{1-t^2}{2t}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=\int\frac{1-t}{2t}dt=\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{t}-\int dt\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\ln|t|-t)+C=\frac{1}{2}\left(\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|-\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

例 9. 求 $\int\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx\quad(0<r<1,|x|<\pi)$.

解 设 $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$，有 $x=2\mathrm{arctg}\,t$,

$$dx=\frac{2}{1+t^2}dt,\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\int\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx=\int\frac{1-r^2}{1-2r\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+r^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=\int\frac{2(1-r^2)}{(1-r)^2+(1+r)^2t^2}dt=\frac{2(1-r)}{1+r}\int\frac{dt}{\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2+t^2}$$

$$=2\mathrm{arctg}\frac{1+r}{1-r}t+C=2\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{1+r}{1-r}\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

尽管万能换元在理论上很重要，但是计算量较大，并不简便．如果 $R(\sin x,\cos x)$ 关于 $\sin x,\cos x$ 具有某种性质，则应用一些特殊的换元比较简便．

1．如果 $R(\sin x,\cos x)$ 是 $\cos x$ 的奇函数，即

$$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x),$$

设 $t=\sin x$ 即可．

例 10. 求 $\int\frac{\mathrm{tg}x\cos^6x}{\sin^4x}dx$.

解 $R(\sin x,\cos x)=\frac{\mathrm{tg}x\cos^6x}{\sin^4x}=\frac{\cos^5x}{\sin^3x}$ 是关于 $\cos x$ 的奇

函数.

设 $t=\sin x$，有 $dt=\cos x dx$.

$$\int\frac{\operatorname{tg}x\cos^6x}{\sin^4x}dx=\int\frac{\cos^4x}{\sin^3x}\cos x dx$$

$$=\int\frac{(1-\sin^2x)^2}{\sin^3x}\cos x dx=\int\frac{(1-t^2)^2}{t^3}dt$$

$$=\int\frac{dt}{t^3}-2\int\frac{dt}{t}+\int t dt=-\frac{1}{2t^2}-2\ln|t|+\frac{t^2}{2}+C$$

$$=-\frac{1}{2\sin^2x}-2\ln|\sin x|+\frac{\sin^2x}{2}+C.$$

2. 如果 $R(\sin x,\cos x)$ 是关于 $\sin x$ 的奇函数，即

$$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x),$$

设 $t=\cos x$ 即可.

例11. 求 $\int\frac{\sin^5x}{\cos^4x}dx$.

解 $R(\sin x,\cos x)=\frac{\sin^5x}{\cos^4x}$ 是关于 $\sin x$ 的奇函数.

设 $t=\cos x$，有 $dt=-\sin x dx$.

$$\int\frac{\sin^5x}{\cos^4x}dx=-\int\frac{(1-\cos^2x)^2}{\cos^4x}(-\sin x dx)$$

$$=-\int\frac{(1-t^2)^2}{t^4}dt=-\left(\int dt-2\int\frac{dt}{t^2}+\int\frac{dt}{t^4}\right)$$

$$=-t-\frac{2}{t}+\frac{1}{3t^3}+C=-\cos x-\frac{2}{\cos x}+\frac{1}{3\cos^3x}+C.$$

3. 如果 $R(\sin x,\cos x)=R(-\sin x,-\cos x)$，设 $t=\operatorname{tg}x$ 即可.

例12. 求 $\int\frac{\sin^2x+1}{\cos^4x}dx$.

解 设 $t=\operatorname{tg}x$，有 $dt=\frac{1}{\cos^2x}dx$.

$$\int\frac{\sin^2x+1}{\cos^4x}dx=\int\frac{\sin^2x+1}{\cos^2x}\frac{dx}{\cos^2x}=\int\left(\mathrm{tg}^2x+\sec^2x\right)\frac{dx}{\cos^2x}$$
$$=\int(2\mathrm{tg}^2x+1)\frac{dx}{\cos^2x}=\int(2t^2+1)dt=2\int t^2dt+\int dt$$
$$=\frac{2}{3}t^3+t+C=\frac{2}{3}\mathrm{tg}^3x+\mathrm{tg}x+C.$$

再讨论两种特殊的三角函数的不定积分.

4. 被积函数是 $\sin^n x\cos^m x$，分两种情形讨论如下：

1）如果 n 与 m 至少有一个是奇数，不妨设 $m=2k+1$（k 是自然数，$n\in\mathbf{R}$），则设 $t=\sin x$ 即可．例如，

$$\int\sin^n x\cos^m x dx=\int\sin^n x\cos^{2k}x\cos x dx$$
$$=\int\sin^n x(1-\sin^2x)^k d\sin x=\int t^n(1-t^2)^k dt.$$

从而可求得这个不定积分.

例 13. 求 $\int\frac{\mathrm{tg}^3x}{\sqrt{\cos x}}dx.$

解 $\int\frac{\mathrm{tg}^3x}{\sqrt{\cos x}}dx=\int\cos^{-\frac{7}{2}}x\sin^3x dx$

$$=\int\cos^{-\frac{7}{2}}x(1-\cos^2x)\sin x dx=-\int\cos^{-\frac{7}{2}}x(1-\cos^2x)d\cos x$$
$$=-\int\cos^{-\frac{7}{2}}x d\cos x+\int\cos^{-\frac{3}{2}}x d\cos x$$
$$=\frac{2}{5}\cos^{-\frac{5}{2}}x-2\cos^{-\frac{1}{2}}x+C.$$

2）如果 n 与 m 都是偶数．由三角公式：

$$\sin^2x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\qquad \cos^2x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$
$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

将被积函数化简，其结果：一种情况，含有 $\sin 2x$ 或 $\cos 2x$ 的奇数次幂，这时可由上述 1）求之；另一种情况，仍含有 $\sin 2x$ 与 $\cos 2x$

的偶数次幂，再用上述三角公式化简，化成含有以 $\sin 4x$ 与 $\cos 4x$ 为变数的幂函数的相乘积. 以下类推.

例 14. 求 $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$.

解 $\int \sin^2 x\cos^4 x dx = \int \sin^2 x\cos^2 x\cos^2 x dx$

$$=\int \frac{\sin^2 2x}{4}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx+\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2x dx$$

$$=\frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)dx+\frac{1}{16}\int \sin^2 2x d\sin 2x$$

$$=\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

5. 如果被积函数是 $\sin mx\sin nx$, $\sin mx\cos nx$, $\cos mx\cos nx$, 则用积化和差公式

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x],$$

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x],$$

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x].$$

例 15. 求 $\int \cos(5x+1)\cos(2x+3)dx$.

解 $\int \cos(5x+1)\cos(2x+3)dx$

$$=\frac{1}{2}\int \cos(7x+4)dx+\frac{1}{2}\int \cos(3x-2)dx$$

$$=\frac{1}{14}\sin(7x+4)+\frac{1}{6}\sin(3x-2)+C.$$

本章给出了求不定积分的基本方法和几种类型函数的不定积

分求法．一般来说，求初等函数的不定积分的方法不是唯一的，并伴随着一定的技巧．因此，求不定积分(或原函数)要比求导数困难得多．因为初等函数在其定义域是连续函数，所以初等函数在其定义域存在原函数(待证)．“存在原函数”与“原函数能用初等函数表示出来”有不同的含义．虽然初等函数存在原函数，但是它的原函数不一定能用初等函数表示出来，即原函数是非初等函数．例如，简单的初等函数

$$\frac{\sin x}{x},\ \frac{e^x}{x},\ \frac{1}{\ln x},\ e^{x^2},\text{等等},$$

都存在原函数，而它们的原函数是非初等函数．我们也说，它们的不定积分“积不出来”．由此可见，初等函数集合对积分运算不是封闭的．

练习题 7.4

1．求下列不定积分：

(1) $\int\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$，

(2) $\int\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx$，

(3) $\int\frac{2+x}{\sqrt[3]{3-x}}dx$，

(4) $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x^2}$，

(5) $\int\sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}dx$，

(6) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+4x-5x^2}}$，

(7) $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$，

(8) $\int\frac{x}{\sqrt{1-2x-3x^2}}dx$，

(9) $\int\frac{x+3}{\sqrt{1-4x^2}}dx$，

(10) $\int\frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$，

(11) $\int\frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}}dx$，

(12) $\int\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}dx$，

(13) $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$，

(14) $\int\frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx$，

(15) $\int\frac{x+1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}dx$.

2. 求下列不定积分:

(1) $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$,

(2) $\int \sin^4 x dx$,

(3) $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$,

(4) $\int \mathrm{tg}^3 x dx$,

(5) $\int \mathrm{ctg}^3 x dx$,

(6) $\int \mathrm{tg}^4 x \sec^4 x dx$,

(7) $\int \sec^3 x dx$,

(8) $\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x} dx$,

(9) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx$,

(10) $\int \sin x \sin 3x dx$,

(11) $\int \cos 4x \cos 7x dx$,

(12) $\int \sin \frac{x}{4} \cos \frac{3x}{4} dx$,

(13) $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$,

(14) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$,

(15) $\int \frac{\sin x}{1-\sin x} dx$,

(16) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx$,

(17) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$,

(18) $\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x} dx$.

第八章　定　积　分

从历史上说，定积分是由计算平面上封闭曲线围成区域的面积而产生的. 为了计算这类区域的面积，最后归结为计算具有特定结构的和式的极限. 人们在实践中逐步认识到，这种特定结构的和式的极限，不仅是计算区域面积的数学工具，而且也是计算许多实际问题(如变力作功，水的压力，立体的体积等)的数学工具. 因此，无论在理论上或在实践中，特定结构的和式的极限——定积分具有普遍的意义. 于是，定积分就成为数学分析重要的组成部分之一.

§8.1　定　积　分

一、实例

1. 曲边梯形的面积　在初等几何学中，我们只会计算由直线段和圆弧所围成的平面区域的面积. 计算由任意形状的闭曲线所围成的平面区域的面积，这是一个一般的几何问题，这个问题只有用极限的方法才能得到完满的解决.

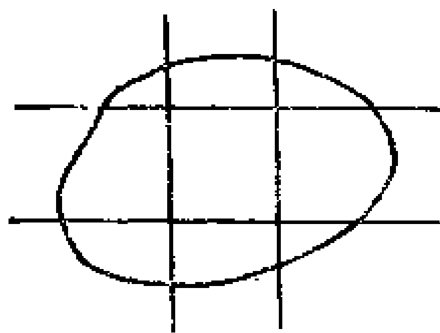


图　8.1

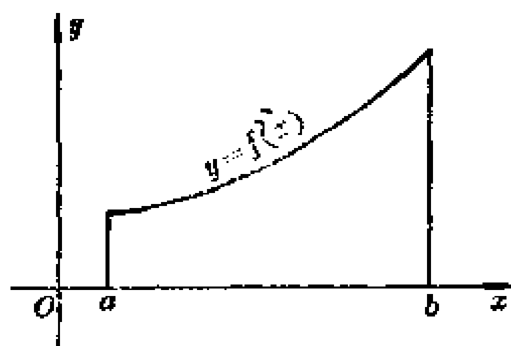


图　8.2

一条封闭曲线围成的平面区域，常常可用互相垂直的两组平行直线将它分成若干部分(如图 8.1)，有的是矩形，有的是曲边三角形(两条互相垂直的直线与曲线围成)，有的是曲边梯形(两条直线都垂直第三条直线与曲线围成，如图 8.2)．因为矩形面积是已知的，曲边三角形是曲边梯形的特殊情况，所以只要会计算曲边梯形的面积就可以了．由于曲边梯形有一段边界是曲边，我们不仅不会计算它的面积，甚至都不知道何谓曲边梯形的面积．因此，我们首先要给出曲边梯形面积的定义．

曲边梯形的面积并不是一个孤立的概念．曲边形和直边形联系着，就如同圆周与它的内接正多边形联系着一样．于是，我们将借助于已知的直边形的面积(这里用矩形的面积)定义曲边梯形的面积．

设曲边梯形是由非负连续曲线 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$、$x$ 轴以及直线 $x=a$ 与 $x=b$ 所围成(如图 8.2)．具体作法如下：

在区间$[a,b]$内任意插入$n-1$个分点：$x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$．为了书写方便，令 $a=x_0$，$b=x_n$，使

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

称为区间$[a,b]$的一个分法，表为 T．于是，分法 T 将区间$[a,b]$分成 n 个小区间：

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{k-1},x_k],\cdots,[x_{n-1},x_n].$$

第 k 个小区间$[x_{k-1},x_k]$的长表为$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ $(k=1,2,\cdots,n)$．过每个分点 x_k 作 x 轴的垂线，这些垂线与曲线$y=f(x)$相交，将曲边梯形分成 n 个小曲边梯形(如图 8.3)．

在第 k 个小区间$[x_{k-1},x_k]$上任取一点 ξ_k $(x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k)$，计算出 $f(\xi_k)$．从图 8.3 看到，以 $f(\xi_k)$为长以 Δx_k 为宽的矩形面积 $f(\xi_k)\Delta x_k$ 应是“第 k 个小曲边梯形面积”ΔA_k 的近似值，即

$$\Delta A_k\approx f(\xi_k)\Delta x_k \qquad (k=1,2,\cdots,n).$$

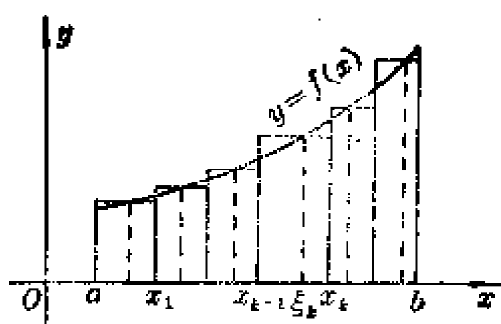


图 8.3

显然，当 Δx_k 越小，其近似程度也越好. 将 n 个矩形面积加起来，应该是"曲边梯形面积"的近似值，即

$$\text{“曲边梯形面积”}=\sum_{k=1}^{n}\Delta A_k\approx\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

显然，将$[a,b]$逐次分下去，使小区间的长越来越小，则不论 ξ_k 怎样选取，n 个矩形面积之和 $\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ 应该越来越趋近于曲边梯形的面积. 不难看到，在任何有限过程中，n 个矩形面积之和 $\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ 总是曲边梯形面积的近似值，只有在无限过程中，应用极限方法才能转化为曲边梯形的面积.

令 $l(T)$ 是分法 T 将区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间之长的最大者，即

$$l(T)=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}.$$

于是，$l(T)\to 0$ 就相当于将区间$[a,b]$无限次地分下去，使小区间之长都无限趋近于 0.

如果当 $l(T)\to 0$ 时，n 个矩形面积之和 $\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ 存在极限，设

$$\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=A.$$

则称 A 是曲边梯形的面积.

由此可见,曲边梯形面积 A 是一个特定结构和式的极限. 这个定义给出了计算曲边梯形面积的方法. 不过按此定义计算曲边梯形的面积,要进行复杂的运算. 在§8.4中,将进一步讨论这个"和式极限"的计算方法.

2. 物体运动的路程 设物体是非等速直线运动,其速度 $v(t)$ 是时间 t 的函数. 计算物体从时刻 a 到时刻 b 的运动路程,即物体运动的距离.

计算这个问题所遇到的困难是非等速运动,即 $v(t)$ 不是常数函数. 如果物体是等速直线运动,即 $v(t)=k$ 是常数函数,则物体从时刻 a 到时刻 b 的运动路程 s 是

$$s=k(b-a).$$

非等速直线运动的路程也不是一个孤立的概念,它与等速直线运动联系着,即在局部上能够以等速近似代替非等速. 具体作法如下:

在时间间隔$[a,b]$内任意插入 $n-1$ 个分点: $t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}$. 为了书写方便,令 $a=t_0,b=t_n$,使

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b,$$

此分法表为 T. 分法 T 将$[a,b]$分成 n 个小区间:

$$[t_0,t_1],[t_1,t_2],\cdots,[t_{k-1},t_k],\cdots,[t_{n-1},t_n].$$

第 k 个小区间$[t_{k-1},t_k]$的长表为 $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$. 在第 k 个小区间 $[t_{k-1},t_k]$ 上任取一点 $\xi_k(t_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant t_k)$. 以速度 $v(\xi_k)$ 代替 $[t_{k-1},t_k]$上每一时刻的速度,则物体在$[t_{k-1},t_k]$等速 $v(\xi_k)$ 运动的路程 $v(\xi_k)\Delta t_k$ 应该是物体在 $[t_{k-1},t_k]$ 非等速 $v(t)$ 运动路程 Δs_k 的近似值,即

$$\Delta s_k\approx v(\xi_k)\Delta t_k\qquad(k=1,2,\cdots,n).$$

将每个小区间上物体等速运动的路程加起来应该是物体在 $[a,b]$

上以“非等速直线运动路程”的近似值，即

$$“非等速直线运动路程” = \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k \approx \sum_{k=1}^{n} v(\xi_k) \Delta t_k.$$

显然，当 $l(T) = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$ 越小时，以 $\sum_{k=1}^{n} v(\xi_k)\Delta t_k$ 近似代替物体以非等速直线运动的路程，其近似程度越好.

如果当 $l(T) \to 0$ 时，$\sum_{k=1}^{n} v(\xi_k)\Delta t_k$ 存在极限，设

$$\lim_{l(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} v(\xi_k) \Delta t_k = s,$$

则称 s 是物体从时刻 a 到时刻 b 非等速直线运动的**路程**.

上述两个实例，一个是几何学中的面积问题；一个是物理学中的路程问题. 尽管它们的实际意义完全不同，但是从抽象的数量关系来看，它们的分析结构完全相同，都是函数在区间上具有特定结构和式的极限，这就是下面讨论的定积分.

二、定积分概念

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 有定义。在 $[a, b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点：$x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$，令 $a = x_0, b = x_n$，使

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

此分法表为 T. 分法 T 将 $[a, b]$ 分成 n 个小区间：

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{k-1}, x_k], \cdots, [x_{n-1}, x_n].$$

第 k 个小区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 的长表为 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. 在第 k 个小区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上任取一点 ξ_k $(\forall \xi_k \in [x_{k-1}, x_k])$. 作和

$$\begin{aligned}\sigma(T, \xi) &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots \\ &\quad + f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k,\end{aligned}$$

称为函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$的**积分和**，亦称**黎曼和**.

显然，函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$的积分和 $\sigma(T,\xi)$ 与分法 T 有关，也与一组 $\xi=\{\xi_k\}$ ($\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, $k=1,2,\cdots,n$)取法有关.

令 $l(T)=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$.

定义 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$有定义. 任给$[a,b]$一个分法 T 和一组 $\xi=\{\xi_k\}$，有积分和

$$\sigma(T,\xi)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

若当 $l(T)\to 0$ 时，积分和 $\sigma(T,\xi)$ 存在极限，设

$$\lim_{l(T)\to 0}\sigma(T,\xi)=\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=I, \tag{1}$$

且数 I 与分法 T 无关，也与 ξ_k 在$[x_{k-1},x_k]$的取法无关，即

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall T$: $l(T)<\delta$, $\forall\xi=\{\xi_k\}$，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k-I\right|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在$[a,b]$**可积**，I 是函数 $f(x)$ 在$[a,b]$的**定积分**，亦称**黎曼积分**，表为

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=I.$$

在定积分符号 $\int_a^b f(x)dx$ 之中，各部分的名称如下：

a 与 b 分别是定积分的**下限**与**上限**；$f(x)$ 是**被积函数**；$f(x)dx$ 是**被积表达式**；x 是**积分变量**.

若当 $l(T)\to 0$ 时，积分和 $\sigma(T,\xi)$ 不存在极限，则称函数 $f(x)$ 在$[a,b]$**不可积**.

根据定积分的定义，不难看出，上段所举的两个实例，都是定

积分.

曲边梯形的面积 A 是函数 $f(x)$ 在$[a,b]$的定积分,即

$$A=\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx.$$

物体运动的路程 s 是速度函数 $v(t)$ 在时间间隔$[a,b]$的定积分,即

$$s=\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}v(\xi_k)\Delta t_k=\int_a^b v(t)dt.$$

不难证明,函数可积的必要条件:

定理 1. 若函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$可积,则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界.

证明 用反证法,假设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$无界. 对$[a,b]$的任意分法 T,必至少有一个小区间,不妨设$[x_0,x_1]$,函数 $f(x)$ 在$[x_0,x_1]$无界. 从而,有

$$|\sigma(T,\xi)|=\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\right|=\left|f(\xi_1)\Delta x_1+\sum_{k=2}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\right|$$

$$\geq|f(\xi_1)|\Delta x_1-\left|\sum_{k=2}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\right|.$$

取定 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, $k=2,3,\cdots,n$, $\left|\sum_{k=2}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\right|$是正常数. 设

$$A=\left|\sum_{k=2}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\right|.$$

因为函数 $f(x)$ 在$[x_0,x_1]$无界,即$\forall B>0$, $\exists\xi_1\in[x_0,x_1]$,有

$$|f(\xi_1)|>\frac{B+A}{\Delta x_1}.$$

于是,$\forall B>0$, $\exists\xi_1\in[x_0,x_1]$,有

$$|\sigma(T,\xi)|=\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\right|>\frac{B+A}{\Delta x_1}\Delta x_1-A=B,$$

即积分和 $\sigma(T,\xi)$ 无界，从而函数 $f(x)$ 在$[a,b]$不可积，矛盾. □

函数 $f(x)$ 在$[a,b]$有界仅是 $f(x)$ 在$[a,b]$可积的必要条件，而不是充分条件，即有的函数虽然有界，但也不可积. 例如，狄利克莱函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是}[0,1]\text{的有理数},\\ 0, & x\text{ 是}[0,1]\text{的无理数}.\end{cases}$$

显然，狄利克莱函数 $D(x)$ 在$[0,1]$有界，但是它在$[0,1]$不可积.

事实上，对$[0,1]$的任意分法 T. 因为在$[0,1]$的有理数与无理数是处处稠密的，所以在每个小区间上既存在有理数又存在无理数.

若每个 ξ_k 取为无理数，则积分和

$$\sigma(f,\xi)=\sum_{k=1}^{n}D(\xi_k)\Delta x_k=0.$$

若每个 ξ_k 取为有理数，则积分和

$$\sigma(f,\xi)=\sum_{k=1}^{n}D(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=1.$$

于是，当 $l(T)\to0$ 时，积分和 $\sigma(f,\xi)$ 不存在极限，即狄利克莱函数 $D(x)$ 在$[0,1]$不可积.

§8.2 可积准则

一、小和与大和

已知有界函数不一定可积，那么什么样的有界函数是可积的呢？换句话说，在 $[a,b]$ 上什么样的有界函数 $f(x)$ 的积分和

$\sigma(T,\xi)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$（当 $l(T)\to 0$ 时）存在极限呢？

积分和 $\sigma(T,\xi)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ 这个变量不仅与分法T有关，而且也与一组 $\xi=\{\xi_k\}$ 的取法有关. 这给我们讨论积分和的极限带来困难. 为此，首先给出对掌握积分和$\sigma(T,\xi)$变化非常有用的小和与大和的概念，并讨论其性质.

设函数 $f(x)$在$[a,b]$有界. 分法T将$[a,b]$ 分成了 n 个小区间：

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{k-1},x_k],\cdots,[x_{n-1},x_n].$$

$a=x_0,b=x_n$. 小区间$[x_{k-1},x_k]$的长表为 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$. 设m_k与M_k 分别是函数 $f(x)$在$[x_{k-1},x_k]$的下确界与上确界，作和

$$s(T)=\sum_{k=1}^{n}m_k\Delta x_k \quad 与 \quad S(T)=\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k,$$

称 $s(T)$是分法T的小和，$S(T)$是分法T的大和.

值得注意的是，小和 $s(T)$与大和 $S(T)$ 只与分法T有关. 这是因为当分法T给定之后，函数 $f(x)$在每个小区间的下确界与上确界是唯一的，从而小和 $s(T)$与大和 $S(T)$也就随分法T而确定. 这是小和、大和与积分和的主要区别.

显然，对$[a,b]$的同一分法T的小和 $s(T)$与大和$S(T)$，总有不等式

$$s(T)\leqslant S(T).$$

下面讨论小和与大和之间以及小和、大和与积分和之间的关系.

性质 1. 对$[a,b]$一个分法T，任意积分和都介于小和 $s(T)$与大和 $S(T)$之间，即

$$s(T) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \leqslant S(T).$$

证明 $\forall \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$，有

$$m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k, \quad k=1,2,\cdots,n.$$

将它乘以小区间$[x_{k-1}, x_k]$的长Δx_k，再从1到n相加，得

$$s(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = S(T),$$

即
$$s(T) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \leqslant S(T). \quad \square$$

性质 2. 对$[a,b]$一个分法T，小和$s(T)$（大和$S(T)$）是分法T的所有积分和的下确界（上确界），即

$$s(T) = \inf_{\xi_k}\left\{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right\} \quad \left(S(T) = \sup_{\xi_k}\left\{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right\}\right).$$

证明 已知m_k是函数$f(x)$在$[x_{k-1}, x_k]$的下确界，根据下确界的定义，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$，有

$$m_k \leqslant f(\xi_k) < m_k + \varepsilon, \quad k=1,2,\cdots,n.$$

将它乘以小区间$[x_{k-1}, x_k]$的长Δx_k，再从1到n相加，得

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k < \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k + \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k$$

或
$$s(T) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k < s(T) + \varepsilon(b-a),$$

即
$$s(T) = \inf_{\xi_k}\left\{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right\}.$$

同法可证，
$$S(T) = \sup_{\xi_k}\left\{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right\}. \quad \square$$

性质 3. 对$[a,b]$一个分法 T，增加某些新分点构成$[a,b]$一个新分法 T'，有

$$s(T)\leqslant s(T')\text{ 与 }S(T')\leqslant S(T),$$

即分点增多时，小和不减少，大和不增加.

证法　只须证明，在分法 T 的基础上仅增加一个新分点 x'，性质 3 成立. 其余的新分点可逐次增加一个分点而得到.

证明　设新增加一个分点 x' 位于分法 T 的第 k 个小区间$[x_{k-1},x_k]$之内，即 $x_{k-1}<x'<x_k$. 用 T' 表示此分法. 在两个小和 $s(T)$与 $s(T')$中，不相同的项仅能在区间$[x_{k-1},x_k]$上出现.

小和 $s(T)$在$[x_{k-1},x_k]$的项是 $m_k(x_k-x_{k-1})$.

小和 $s(T')$在$[x_{k-1},x_k]$是两项和

$$m'_k(x'-x_{k-1})+m''_k(x_k-x'),$$

其中 m'_k 与 m''_k 分别是函数 $f(x)$在$[x_{k-1},x']$与$[x',x_k]$的下确界.

因为 $m_k\leqslant m'_k$ 与 $m_k\leqslant m''_k$(如图 8.4)，所以

$$\begin{aligned}m_k(x_k-x_{k-1})&=m_k(x_k-x')+m_k(x'-x_{k-1})\\&\leqslant m''_k(x_k-x')+m'_k(x'-x_{k-1}),\end{aligned}$$

即
$$s(T)\leqslant s(T').$$

同法可证，　$S(T')\leqslant S(T)$.　□

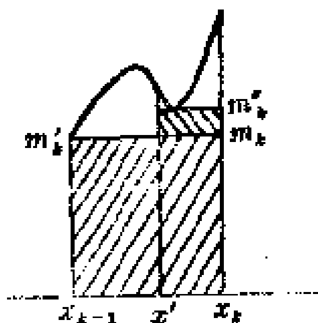


图 8.4

性质 4. 对$[a,b]$任意两个分法 T 与 T'，有

$$s(T)\leqslant S(T')\quad\text{与}\quad s(T')\leqslant S(T),$$

即小和总不超过大和.

证明　将$[a,b]$的两个分法 T 与 T' 的分点放在一起，构成$[a,b]$的一个新分法，表为 T''. 于是，分法 T'' 的分点是在分法 T(或T')的分点的基础上增加了分法 T'(或 T)的分点所构成. 根据性质 3，有

$$s(T)\leqslant s(T'')\quad\text{与}\quad S(T'')\leqslant S(T').$$

已知对分法 T''，有　$s(T'')\leqslant S(T'')$. 从而，

$$s(T) \leqslant s(T'') \leqslant S(T'') \leqslant S(T'),$$

即
$$s(T) \leqslant S(T').$$

同法可证， $s(T') \leqslant S(T)$. □

性质 5. 对$[a, b]$所有可能的分法 T，小和的上确界不超过大和的下确界，即

$$\sup_T \{s(T)\} \leqslant \inf_T \{S(T)\}.$$

证明 根据性质 4，任意分法 T 的小和集合$\{s(T)\}$有上界(任意一个大和皆是它的上界). 再根据 §4.1 定理 2，小和集合$\{s(T)\}$必有上确界，设上确界是 I_0，即

$$\sup_T \{s(T)\} = I_0.$$

已知任意大和 $S(T)$，总有 $I_0 \leqslant S(T)$，即 I_0 是大和集合$\{S(T)\}$的下界. 于是，大和集合$\{S(T)\}$必有下确界，设下确界是 I^0，有

$$I_0 \leqslant I^0 = \inf_T \{S(T)\},$$

即
$$I_0 = \sup_T \{s(T)\} \leqslant \inf_T \{S(T)\} = I^0. \quad □$$

二、可积准则

根据定积分定义，函数 $f(x)$ 在区间$[a, b]$是否可积，就在于积分和$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$(当 $l(T) \to 0$ 时)是否存在极限.

根据大小和性质 1，对$[a, b]$的任意分法 T，总有

$$s(T) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \leqslant S(T).$$

于是，讨论复杂的积分和的极限问题就归结为讨论比较简单的小和与大和的极限问题. 这就是下面的可积准则:

定理 1. (可积准则) 函数 $f(x)$ 在闭区间$[a, b]$可积$\Longleftrightarrow$

$$\lim_{l(T)\to 0}[S(T)-s(T)]=0. \tag{1}$$

证明 **必要性($\Longrightarrow$)** 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，设定积分是 I，即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall T:l(T)<\delta,\forall\xi=\{\xi_k\}$，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k-I\right|<\varepsilon,$$

或

$$I-\varepsilon<\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k<I+\varepsilon.$$

根据大小和性质 2，有

$$I-\varepsilon\leqslant s(T)\leqslant S(T)\leqslant I+\varepsilon$$

或
$$S(T)-s(T)<2\varepsilon,$$

即
$$\lim_{l(T)\to 0}[S(T)-s(T)]=0.$$

充分性($\Longleftarrow$) 若 (1) 式成立，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall T$：$l(T)<\delta$，有

$$S(T)-s(T)<\varepsilon.$$

根据大小和性质 5，有

$$s(T)\leqslant I_0\leqslant I^0\leqslant S(T), \tag{2}$$

从而，
$$I^0-I_0\leqslant S(T)-s(T)<\varepsilon.$$

即 $I^0=I_0$，设 $I=I^0=I_0$. 由 (2) 式，有

$$s(T)\leqslant I\leqslant S(T). \tag{3}$$

又已知
$$s(T)\leqslant\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\leqslant S(T). \tag{4}$$

由(3)式与(4)式，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k-I\right|\leqslant S(T)-s(T)<\varepsilon,$$

即函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积. □

定义 若函数 $f(x)$ 在区间 I 有界. 设

$$m=\inf\{f(x)\mid x\in I\} \quad 或 \quad m=\inf_{x\in I}\{f(x)\},$$

$$M=\sup\{f(x)\mid x\in I\} \quad 或 \quad M=\sup_{x\in I}\{f(x)\},$$

$$\omega=M-m=\sup\{f(x)\mid x\in I\}-\inf\{f(x)\mid x\in I\}.$$

称 ω 为函数 $f(x)$ 在区间 I 的**振幅**.

给区间 $[a,b]$ 分法 T. 设

$$m_k=\inf\{f(x)\mid x\in[x_{k-1},x_k]\}$$

与 $$M_k=\sup\{f(x)\mid x\in[x_{k-1},x_k]\}, \quad k=1,2,\cdots,n.$$

$\omega_k=M_k-m_k$ 是函数 $f(x)$ 在小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 的振幅. 有

$$S(T)-s(T)=\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k-\sum_{k=1}^{n}m_k\Delta x_k$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k,$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 关于**分法 T 的振幅和**, 简称**振幅和**. 当须要在振幅和中表明分法 T 与区间 $[a, b]$ 时, 可把振幅和记为 $(T)\sum_a^b\omega_k\Delta x_k$. 于是, 可积准则又可改写为:

定理 1′. (可积准则)函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 可积 $\Longleftrightarrow$

$$\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k=0,$$

其中 ω_k 是函数 $f(x)$ 在 $[x_{k-1},x_k]$ 的振幅, $k=1,2,\cdots,n$.

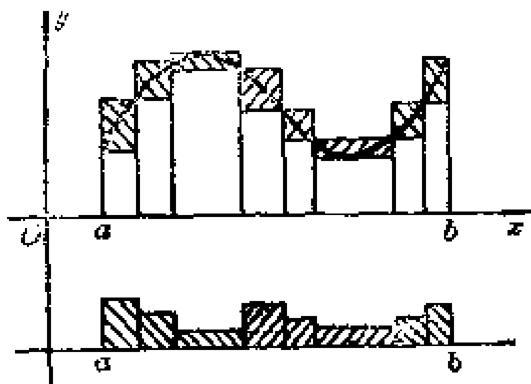


图 8.5

可积准则的几何意义是, 图 8.5 中带有斜线的或包含“曲线” $y=f(x)$ 的 n 个小矩形面积之和

可以任意小(当 $l(T)$ 充分小)。

三、三类可积函数

应用可积准则的充分性证明以下三类函数是可积的:

定理 2. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积.

证法　根据定理 1′ 的充分性，只须证明，$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，(能找到这个 δ)，$\forall T$: $l(T)<\delta$，有 $\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon$ 即可.

已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，从而一致连续，能够证明. 每个小区间的振幅 ω_k 能一致小于 ε，即 $\omega_k<\varepsilon(k=1,2,\cdots,n)$.（见练习题 4.2，第 10 题）

证明　已知函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，根据 § 4.2 定理 4，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 一致连续，即

$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$（这就是要找的 δ），$\forall x_1$，$x_2\in[a,b]$: $|x_1-x_2|<\delta$，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

对 $[a,b]$ 任意分法 T，要求 $l(T)<\delta$. 函数 $f(x)$ 在每一个小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 连续，根据 § 4.2 定理 2，函数 $f(x)$ 在每一个小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 取到最小值 m_k 与最大值 M_k，即 $\exists\ \xi_k', \xi_k''\in[x_{k-1},x_k]$，有

$$m_k=f(\xi_k')\quad 与\quad M_k=f(\xi_k'').$$

因为 $l(T)<\delta$，所以 $|\xi_k'-\xi_k''|\leqslant x_k-x_{k-1}<\delta$，有

$$\omega_k=M_k-m_k=f(\xi_k'')-f(\xi_k')<\varepsilon,\quad k=1,2,\cdots,n.$$

于是，
$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=\varepsilon(b-a),$$

即函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积. □

定理 3. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 有界，且有有限个间断点，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积.

证法　给 $[a,b]$ 分法 T，将振幅和分为两部分，即

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k=\Sigma'\omega_k\Delta x_k+\Sigma''\omega_k\Delta x_k,$$

其中 $\Sigma'\omega_k\Delta x_k$ 是不包含间断点的那些小区间的振幅和. 函数 $f(x)$ 在每个小区间的振幅 ω_k 能一致的任意小，而这些小区间长有界，从而 $\Sigma'\omega_k\Delta x_k$ 能任意小；$\Sigma''\omega_k\Delta x_k$ 是包含间断点的那些小区间的振幅和. 因为间断点的个数有限，振幅 ω_k 有界，而包含间断点的所有小区间的总长能任意小，从而 $\Sigma''\omega_k\Delta x_k$ 也能任意小. 于是，振幅和 $\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k$ 能任意小.

证明　已知函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 有界，即

$$\exists M>0,\forall x\in[a,b],\text{有}\ |f(x)|\leqslant M.$$

从而，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的振幅 $\omega\leqslant 2M$.

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有 m 个间断点：$x_1,x_2,\cdots,x_m$.

$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta_1=\varepsilon>0$，作每个间断点的 $\delta_1=\varepsilon$ 邻域

$$(x_i-\delta_1,x_i+\delta_1),\ i=1,2,\cdots,m.$$

每个邻域的长是 $2\delta_1=2\varepsilon$. $[a,\ b]-\bigcup_{i=1}^{m}(x_i-\delta_1,x_i+\delta_1)$ 至多是闭区间 $[a,b]$ 的 $m+1$ 个闭子区间：$I_1,I_2,\cdots,I_j(j\leqslant m+1)$. 函数 $f(x)$ 在这些闭子区间连续，从而一致连续，即

对上述 $\varepsilon>0,\exists\delta_2>0,\forall T:l(T)<\delta_2$，每个闭子区间 I_j 被分成若干个小区间（小区间的长小于 δ_2），函数 $f(x)$ 在这样的小区间的振幅 ω_k 一致小于 ε.

$\exists\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0,\forall T:l(T)<\delta$，振幅和分成两部分：

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k=\Sigma'\omega_k\Delta x_k+\Sigma''\omega_k\Delta x_k.$$

其中 $\Sigma'\omega_k\Delta x_k$ 是分法T不包含间断点的那些小区间的振幅和；$\Sigma''\omega_k\Delta x_k$ 是分法T包含间断点的那些小区间的振幅和. 已知

$$\Sigma'\omega_k\Delta x_k\leqslant\varepsilon\Sigma'\Delta x_k\leqslant\varepsilon(b-a),$$

$$\Sigma''\omega_k\Delta x_k\leqslant\Sigma''\omega\Delta x_k\leqslant 2M\Sigma''\Delta x_k\leqslant 2M\cdot 2m\varepsilon=4Mm\varepsilon.$$

于是，$\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k=\Sigma'\omega_k\Delta x_k+\Sigma''\omega_k\Delta x_k$

$$\leqslant\varepsilon(b-a)+4Mm\varepsilon=(b-a+4Mm)\varepsilon,$$

即函数 $f(x)$ 在$[a,b]$可积. □

定理 4. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$单调，则函数 $f(x)$ 在$[a,b]$可积.

证明 不妨设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$单调增加，对$[a,b]$任意分法T，函数 $f(x)$ 在小区间$[x_{k-1},\ x_k]$的下确界 m_k 与上确界 M_k 分别是

$$m_k=f(x_{k-1})\quad 与\quad M_k=f(x_k).$$

从而，函数 $f(x)$ 在$[x_{k-1},\ x_k]$的振幅

$$\omega_k=M_k-m_k=f(x_k)-f(x_{k-1}).$$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\varepsilon>0,\forall T: l(T)<\delta(\Delta x_k<\delta=\varepsilon)$，有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k&=\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})]\Delta x_k\\&<\varepsilon\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})]\\&=\varepsilon[f(x_1)-f(x_0)+f(x_2)-f(x_1)+\cdots+f(x_n)\\&\qquad-f(x_{n-1})]\\&=\varepsilon[f(x_n)-f(x_0)]=\varepsilon[f(b)-f(a)],\end{aligned}$$

即函数 $f(x)$ 在$[a,b]$可积. □

闭区间的单调函数可能有无限多个间断点. 例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n},\ n\in\mathbf{N},\end{cases}$$

在[0,1]是单调增加，且有无限多个间断点：$\frac{1}{n}$，$n\in\mathbf{N}$，$n\geqslant 2$. 根据定理 4，函数 $f(x)$ 在[0,1]可积.

练习题 8.2

1. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 单调增加，则

$$f(a)(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant f(b)(b-a).$$

2. 证明：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 有界，$[a,b]$ 的分法 T 加上若干个新分点，得新分法 T'，分法 T 与 T' 的振幅和分别表为 $(T)\sum_a^b \omega_k\Delta x_k$ 与 $(T')\sum_a^b \omega'_k\Delta x'_k$，则

$$(T')\sum_a^b \omega'_k\Delta x'_k\leqslant(T)\sum_a^b \omega_k\Delta x_k.$$ （提示：见大小和性质3）

3. 应用可积准则证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上除一点 x_0 外，$f(x)=g(x)$ $(x\neq x_0)$，则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 也可积，且

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx.$$

4. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 是阶梯函数，即存在 $[a,b]$ 的一个分法 T，而 $f(x)$ 在每个小开区间 (x_{i-1},x_i) 都是常数 $(i=1,2,\cdots,n)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界，证明（振幅的等价形式）

$$\sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\}-\inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\}=\sup_{x,y\in[a,b]}\{|f(x)-f(y)|\}.$$

6. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则函数 $[f(x)]^2$ 在 $[a,b]$ 也可积.

7. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，且存在 $c>0$，$\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)\geqslant c$，则函数 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 也可积.

8. 证明：函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right], & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases} \quad 与 \quad \varphi(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在[0,1]都可积.

9. 证明:函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x 是有理数,\\ -1, & x 是无理数,\end{cases}$$

在[0,1]不可积,而$|f(x)|$在[0,1]可积,说明了什么?

* * * *

10. 证明:若函数$f(x)$与$\varphi(x)$在$[a,b]$连续,则

$$\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\varphi(\theta_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)\varphi(x)dx.$$

其中 $x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k$, $x_{k-1}\leqslant\theta_k\leqslant x_k$, $k=1, 2, \cdots, n$, $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$. $x_0=a$, $x_n=b$.

11. 证明:黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}0, & x 是无理数,和 x=0,\\ \frac{1}{n}, x=\frac{m}{n}, & m 与 n(n\geqslant 1)是整数,且互质,\end{cases}$$

在[0,1]可积,且

$$\int_0^1 R(x)dx=0.$$

12. 证明:若函数$f(x)$在$[a,b]$有界,则

(1) $\lim\limits_{l(T)\to 0} s(T)=I_0$.　　　(2) $\lim\limits_{l(T)\to 0} S(T)=I^*$.

13. 证明: 函数$f(x)$在$[a,b]$可积 $\Longleftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ 与 $\forall\eta>0$, $\exists\delta>0$, $\forall T$: $l(T)<\delta$,振幅$\omega_{k'}\geqslant\eta$的那些小区间的总长$\sum\limits_{k'}\Delta x_{k'}<\varepsilon$.

14. 证明:若函数$\varphi(x)$在$[A,B]$连续,函数$f(x)$在$[a,b]$可积,且$[A, B]=\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$,则$\varphi[f(x)]$在$[a,b]$可积. (提示:应用第12题)

§8.3 定积分的性质

一、定积分的性质

函数$f(x)$在区间$[a, b]$的定积分$\int_a^b f(x)dx$的定义要求$a\neq b$,

且 $a<b$. 如果 $a=b$ 或 $a>b$, 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 没有意义. 为了运算的需要,规定:

当 $a=b$ 时, $\int_a^a f(x)dx=0$.

当 $a>b$ 时, $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

下面定积分性质的证明多是用定积分的定义直接证明的. 为了书写简便,一律省略书写作积分和的步骤,即[a,b]的分法,选取 ξ_k,作和等步骤,直接写出函数的积分和.

定理 1. 若 $\forall x\in[a, b]$, 有 $f(x)=c$(常数), 则 $f(x)=c$ 在 [a,b]可积,且

$$\int_a^b c dx=c(b-a).$$

证明 函数 $f(x)=c$ 在[a,b]的积分和

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k=c\sum_{k=1}^n(x_k-x_{k-1})=c(b-a),$$

$$\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k=c(b-a),$$

即
$$\int_a^b c dx=c(b-a).\quad \Box$$

定理 2. 若函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在区间[a, b]可积, 则 $f_1(x)+f_2(x)$ 在[a,b]也可积,且

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]\,dx=\int_a^b f_1(x)\,dx+\int_a^b f_2(x)\,dx.$$

证明 函数 $f_1(x)+f_2(x)$ 在[a,b]的积分和

$$\sum_{k=1}^n [f_1(\xi_k)+f_2(\xi_k)]\Delta x_k$$

$$=\sum_{k=1}^n f_1(\xi_k)\Delta x_k+\sum_{k=1}^n f_2(\xi_k)\,\Delta x_k. \tag{1}$$

因为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在$[a,b]$可积，所以(1)式等号右端两个函数$f_1(x)$与 $f_2(x)$的积分和都存在极限($l(T)\to 0$). 于是，(1)式等号左端的函数 $f_1(x)+f_2(x)$ 的积分和也存在极限($l(T)\to 0$)，即函数 $f_1(x)+f_2(x)$ 在$[a,b]$可积，并有

$$\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}[f_1(\xi_k)+f_2(\xi_k)]\Delta x_k$$

$$=\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}f_1(\xi_k)\Delta x_k+\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}f_2(\xi_k)\Delta x_k,$$

即 $$\int_a^b[f_1(x)+f_2(x)]dx=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx.\ \square$$

定理 3. 若函数 $f(x)$在区间$[a,b]$可积，则函数 $cf(x)$(c 是常数)在$[a,b]$也可积，且

$$\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx.$$

证明 函数 $cf(x)$在$[a,b]$的积分和

$$\sum_{k=1}^{n}cf(\xi_k)\Delta x_k=c\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k. \tag{2}$$

因为 $f(x)$在$[a,b]$可积，所以(2)式等号右端函数 $f(x)$的积分和存在极限($l(T)\to 0$). 于是，(2)式等号左端函数 $cf(x)$的积分和也存在极限($l(T)\to 0$)，即函数 $cf(x)$在$[a,b]$可积，并有

$$\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}cf(\xi_k)\Delta x_k=c\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k,$$

即 $$\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx.\ \square$$

根据定理 2 与定理 3，有

推论 若 n 个函数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)$在区间$[a,b]$都可积，则它们的线性组合

$$c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)+\cdots+c_n f_n(x)$$

在$[a,b]$也可积，且

$$\int_a^b [c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)+\cdots+c_n f_n(x)]dx$$
$$=c_1\int_a^b f_1(x)\,dx+c_2\int_a^b f_2(x)\,dx+\cdots+c_n\int_a^b f_n(x)\,dx,$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是常数.

定理 4. 若函数$f_1(x)$与$f_2(x)$在区间$[a,b]$可积，则乘积函数$f_1(x)f_2(x)$在$[a,b]$也可积.

证明 由可积的必要条件，函数$f_1(x)$与$f_2(x)$在$[a,b]$有界，即

$\exists M>0, \forall x\in[a,b]$，有$|f_1(x)|\leqslant M$ 与$|f_2(x)|\leqslant M$.

已知函数$f_1(x)$与$f_2(x)$在$[a,b]$可积，由可积准则，

$\forall \varepsilon>0$, $\exists\delta>0, \forall T$: $l(T)<\delta$, 同时有(用到§8.2练习题第2题)

$$\sum_{k=1}^{n}\omega'_k\Delta x_k<\varepsilon \quad 与 \quad \sum_{k=1}^{n}\omega''_k\Delta x_k<\varepsilon,$$

其中ω'_k与ω''_k分别是函数$f_1(x)$与$f_2(x)$在$[x_{k-1},x_k]$的振幅.

$\forall x', x''\in[x_{k-1},x_k]$，有

$$\begin{aligned}&|f_1(x')f_2(x')-f_1(x'')f_2(x'')|\\ =&|f_1(x')f_2(x')-f_1(x'')f_2(x')+f_1(x'')f_2(x')\\ &-f_1(x'')f_2(x'')|\\ \leqslant&|f_2(x')||f_1(x')-f_1(x'')|+|f_1(x'')||f_2(x')-f_2(x'')|\\ \leqslant&M(|f_1(x')-f_1(x'')|+|f_2(x')-f_2(x'')|).\end{aligned}$$

设ω_k是函数$f_1(x)f_2(x)$在$[x_{k-1}, x_k]=I_k$的振幅，由上述不等式，有

$$\omega_k=\sup_{x',x''\in I_k}\{|f_1(x')f_2(x')-f_1(x'')f_2(x'')|\}$$

$$\leqslant M[\sup_{x',x''\in I_k}\{|f_1(x')-f_1(x'')|\}+\sup_{x',x''\in I_k}\{|f_2(x')-f_2(x'')|\}]$$

$$\leqslant M(\omega_k'+\omega_k''). \qquad \text{(见§8.2练习题第5题)}$$

于是，$\forall T: l(T)<\delta$，有

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k\leqslant M\left(\sum_{k=1}^{n}\omega_k'\Delta x_k+\sum_{k=1}^{n}\omega_k''\Delta x_k\right)<2M\varepsilon,$$

即乘积函数 $f_1(x)f_2(x)$ 在 $[a,b]$ 可积. □

定理 5. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 可积，且 $a\leqslant a'<b'\leqslant b$，则 $f(x)$ 在 $[a',b']$ 也可积.

证明 已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，根据可积准则，即

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall T: l(T)<\delta$，有

$$(T)\sum_a^b\omega_k\Delta x_k①<\varepsilon.$$

在分法 T 的基础上添加两个分点 a' 与 b'（有的可能就是分法 T 的分点），得到 $[a,b]$ 新的方法 T'. 显然，$\forall T': l(T')<\delta$，有

$$(T')\sum_{a'}^{b'}\omega_k\Delta x_k\leqslant(T')\sum_a^b\omega_k\Delta x_k\leqslant(T)\sum_a^b\omega_k\Delta x_k<\varepsilon,$$

即函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积. □

定理 6. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 可积，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 也可积，且

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

证明 首先证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积.

已知函数 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 可积，即

---

① 符号“$(T)\sum_a^b\omega_k\Delta x_k$”表示函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 关于分法 T 的振幅和.

见第331页与§8.2练习题第2题

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \begin{cases} \forall T_1: l(T_1)<\delta, \text{ 有 } (T_1)\sum_a^c \omega_k \Delta x_k<\varepsilon. \\ \forall T_2: l(T_2)<\delta, \text{ 有 } (T_2)\sum_c^b \omega_k \Delta x_k<\varepsilon. \end{cases}$$

对$[a, b]$的任意分法T，若c是T的分点，$l(T)<\delta$，有

$$(T)\sum_a^b \omega_k \Delta x_k=(T_1)\sum_a^c \omega_k \Delta x_k+(T_2)\sum_c^b \omega_k \Delta x_k<2\varepsilon.$$

若c不是分法T的分点，把c加入T的分点中，得到新分法T'，显然，$l(T')<\delta$，且

$$(T')\sum_a^b \omega_k \Delta x_k \leqslant (T)\sum_a^b \omega_k \Delta x_k<2\varepsilon,$$

即函数$f(x)$在$[a, b]$可积.

其次证明(3)式成立. 因为函数$f(x)$在$[a, b]$可积，所以对$[a,b]$的任意分法T，并使c总是T的分点(这是一类特殊的分法，只有$f(x)$在$[a,b]$可积的条件下，才可以选取特殊的分法)，有相应的积分和

$$\sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k{}^{①}=\sum_a^c f(\xi_k)\Delta x_k+\sum_c^b f(\xi_k)\Delta x_k.$$

因为上式等号右端的两个积分和都存在极限 ($l(T)\to 0$)，所以有

$$\lim_{l(T)\to 0}\sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k=\lim_{l(T)\to 0}\sum_a^c f(\xi_k)\Delta x_k+\lim_{l(T)\to 0}\sum_c^b f(\xi_k)\Delta x_k,$$

即
$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx. \quad \square$$

推论 1. 若函数$f(x)$在区间$[A, B]$可积，且$\forall a, b, c\in[A, B]$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

① 为书写简单，符号"$\sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k$"表示函数$f(x)$在区间$[a,b]$关于某分法$T$的积分和.

证明 设 $a<b<c$，根据定理 5，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 与 $[b,c]$ 都可积，再根据定理 6，有

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx-\int_b^c f(x)\,dx$$

$$=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.\quad \square$$

推论 2. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[c_{k-1},c_k]$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 都可积，则 $f(x)$ 在 $[c_0,c_n]$ 也可积，且

$$\int_{c_0}^{c_n} f(x)\,dx=\int_{c_0}^{c_1} f(x)\,dx+\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx+\cdots+\int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)\,dx.$$

定理 7. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 可积，且 $\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)\geqslant 0$ $(f(x)\leqslant 0)$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx\geqslant 0\quad\left(\int_a^b f(x)\,dx\leqslant 0\right).$$

证明 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的积分和是

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

已知 $f(\xi_k)\geqslant 0$，$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}>0$，$k=1,2,\cdots,n$，有

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\geqslant 0.$$

又由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积与极限保号性，有

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\geqslant 0.\quad \square$$

推论 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 都可积，且 $\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b g(x)\,dx.$$

证明 已知 $\forall x\in[a,b]$，有

$$f(x)\leqslant g(x) \quad 或 \quad g(x)-f(x)\geqslant 0.$$

根据定理 3 的推论，函数 $g(x)-f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积，再根据定理7，

有 $$\int_a^b[g(x)-f(x)]dx\geqslant 0 \quad 或 \quad \int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx\geqslant 0.$$

即 $$\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx. \quad \square$$

定理 8. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 可积，则函数 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 也可积，且

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|dx. \tag{4}$$

证明 首先证明函数 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 可积.

对 $[a,b]$ 的任意分法 T，设函数 $f(x)$ 与 $|f(x)|$ 在小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 的振幅分别是 ω_k 与 ω_k^*. $\forall x',x''\in[x_{k-1},x_k]=I_k$，有

$$\big||f(x')|-|f(x'')|\big|\leqslant|f(x')-f(x'')|.$$

从而，$$\sup_{x',x''\in I_k}\{\big||f(x')|-|f(x'')|\big|\}\leqslant\sup_{x',x''\in I_k}\{|f(x')-f(x'')|\},$$

即 $$\omega_k^*\leqslant\omega_k,\quad k=1,2,\cdots,n.$$

$$\sum_{k=1}^n\omega_k^*\Delta x_k\leqslant\sum_{k=1}^n\omega_k\Delta x_k. \tag{5}$$

已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，根据可积准则，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall T: l(T)<\delta$，

有 $\sum\limits_{k=1}^n\omega_k\Delta x_k<\varepsilon$. 由(5)式，有

$$\sum_{k=1}^n\omega_k^*\Delta x_k<\varepsilon,$$

即函数 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 可积.

其次证明不等式(4)成立. 已知 $\forall x\in[a,b]$，有不等式

$$-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)|.$$

根据定理 7 的推论，有

$$-\int_a^b|f(x)|dx\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b|f(x)|dx,$$

即
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|dx.\quad\square$$

推论 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 可积，且 $\forall x\in[a, b]$，有 $|f(x)|\leqslant k$（常数），则

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant k(b-a).$$

证明 根据定理 8，函数 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 可积，有

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|dx\leqslant k\int_a^b dx=k(b-a).\ \square$$

二、定积分中值定理

定理 9. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 c，使

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a).$$

证明 已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，根据§4.2 定理 2，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 取到最小值 m 与最大值 M，即 $\forall x\in[a,b]$，有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M.$$

根据定理 7 推论与定理 1，有

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a)$$

或
$$m\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leqslant M.$$

再根据§3.2 定理 6，在 $[a,b]$ 上至少存在一点 c，使

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

即 $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$. □

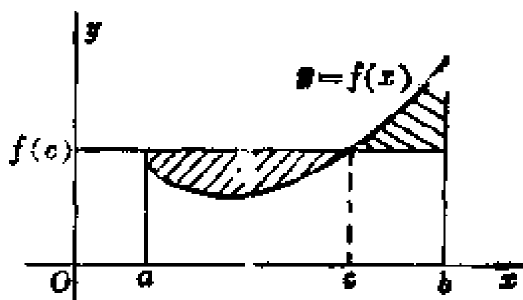


图 8.6

定理 9 的几何意义是，如果 $f(x)\geqslant 0$，连续曲线 $y=f(x)$、x 轴与直线 $x=a$, $x=b$ 所围成的曲边梯形的面积等于以$[a, b]$上某一点 c 的函数值 $f(c)$ 为高以区间$[a,b]$的长为宽的矩形面积，如图 8.6.

定理 10. 若函数 $f(x)$在区间$[a, b]$连续，函数 $g(x)$在$[a,b]$可积，且不变号，则在$[a,b]$上至少存在一点 c，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

证明 不妨设 $g(x)\geqslant 0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$. 设 m 与 M 分别是函数 $f(x)$在$[a,b]$的最小值与最大值，即 $\forall x\in[a,b]$，有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M.$$

因为 $\forall x\in[a,b]$，有 $g(x)\geqslant 0$，所以有

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x).$$

根据定理 3 与定理 4，函数 $mg(x)$，$f(x)g(x)$，$Mg(x)$在$[a,b]$可积，有

$$m\int_a^b g(x)\,dx\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\,dx\leqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{6}$$

根据定理 7，$\int_a^b g(x)\,dx\geqslant 0$. 下面分两种情况讨论：

1) 若$\int_a^b g(x)\,dx>0$，(6)式可改写为

$$m\leqslant\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}\leqslant M.$$

根据§3.2 定理 6，在$[a,b]$上至少存在一点 c，使

$$f(c)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx},$$

即
$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

2) 若$\int_a^b g(x)dx=0$，则$\int_a^b f(x)g(x)dx=0$. 此时，在$[a, b]$上任意一点c，使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(\ )dx. \quad \square$$

练习题 8.3

1. 证明：若函数$f(x)$在$[a,b]$连续、非负，且$\exists x_0\in[a,b]$，使$f(x_0)>0$，则
$$\int_a^b f(x)dx>0.$$

2. 证明：若函数$f(x)$在$[a,b]$连续，且$\int_a^b f^2(x)dx=0$，则$f(x)\equiv 0$.

3. 证明：若函数$f(x)$在$[a,b]$连续，且对$[a,b]$上任意可积函数$\varphi(x)$，有$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=0$，则$f(x)\equiv 0$.（提示：用反证法）

4. 证明
$$0<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}xdx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx.$$

5. 证明：若函数$f(x)$在$[0,1]$满足李普希茨条件，即$\forall x,y\in[0,1]$，有
$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|,$$
其中M是常数，则
$$\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{n}.$$

（提示：$\int_0^1 f(x)dx=\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)dx,$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f\left(\frac{k}{n}\right)dx.$$）

6. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调减少，则

$$\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\frac{f(0)-f(1)}{n}.$$

说明其几何意义.（提示：见第 5 题的提示）

*　　　*　　　*　　　*

7. 证明：若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则

$$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}\ \text{与}\ \psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$

在 $[a,b]$ 都可积.（提示：见练习题 3.2，第 10 题）

8. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且为正，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b[f(x)]^n dx}=\max\{f(x)\mid x\in[a,b]\}.$$

（提示：设 $\max\{f(x)\mid x\in[a,b]\}=f(\xi)$. $\forall\varepsilon>0$，存在 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，$\xi\in[\alpha,\beta]$，$\forall x\in[\alpha,\beta]$，有 $f(\xi)-\varepsilon<f(x)\leqslant f(\xi)$，$[f(\xi)-\varepsilon]^n<[f(x)]^n\leqslant[f(\xi)]^n$.）

9. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 可积，$[a,b]\subset[A,B]$，则

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx=0.$$

称为函数 $f(x)$ 积分的连续性.

（提示：将 $[a,b]$ n 等分，当 n 充分大时，有振幅和 $\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon$，其中 ω_k 是 $f(x)$ 在 $[x_{k-1},x_k]$ 的振幅. 讨论

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(x+h)-f(x)|dx,$$

不妨设 $0<h<\frac{b-a}{n}$，$k=1,2,\cdots,n$. 有

$$\sup\{|f(x+h)-f(x)|\mid x\in[x_{k-1},x_k]\}\leqslant\omega_k+\omega_{k+1}.）$$

§8.4　定积分的计算

一、按照定义计算定积分

定积分的定义已经给出了计算定积分的方法，即作积分和，再取极限. 如果已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，由于积分和的极限唯一性，可作 $[a,b]$ 的一个特殊的分法 T（如等分法等），在 $[x_{k-1},x_k]$

上选取特殊的ξ_k(如取ξ_k是$[x_{k-1}, x_k]$的左端点、右端点、中点等)，作出积分和，然后再取极限，就得函数$f(x)$在$[a,b]$的定积分.

例 1. 求 $\int_a^b \sin x dx,\quad a<b.$

解 因为函数$\sin x$在$[a,b]$连续，所以函数$\sin x$在$[a,b]$可积. 采用特殊的方法作积分和.

取$h=\frac{b-a}{n}$，将$[a,b]$等分成n个小区间，分点坐标依次是:

$$a<a+h<a+2h<\cdots<a+nh=b.$$

取ξ_k是小区间$[a+(k-1)h,\ a+kh]$的右端点，即$\xi_k=a+kh$. 于是,

$$\int_a^b \sin x dx=\lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sin(a+kh)\cdot h=\lim_{h\to 0}h\sum_{k=1}^{n}\sin(a+kh).$$

其中

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(a+kh)=\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\sum_{k=1}^{n}2\sin(a+kh)\sin\frac{h}{2}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(a+\frac{2k-1}{2}h\right)-\cos\left(a+\frac{2k+1}{2}h\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(a+\frac{3}{2}h\right)+\cos\left(a+\frac{3}{2}h\right)\right.$$

$$\left.-\cos\left(a+\frac{5}{2}h\right)+\cdots+\cos\left(a+\frac{2n-1}{2}h\right)-\cos\left(a+\frac{2n+1}{2}h\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(a+\left(n+\frac{1}{2}\right)h\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}h\right)\right]\qquad(a+nh=b)$$

将此结果代入上式之中，有

$$\int_a^b \sin x dx=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}h\right)\right]$$

$$=\cos a-\cos b.$$

例2. 求 $\int_a^b x^k dx$，其中 $0<a<b$，k 是自然数。

解 因为函数 x^k 在$[a,b]$连续，所以函数 x^k 在$[a,b]$可积. 采用特殊的方法作积分和.

取 $q=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ 或$b=aq^n$. 将$[a,b]$ 分成 n 个小区间，分点坐标依次是:

$$a<aq<aq^2<\cdots<aq^n=b,$$

取ξ_i 是小区间$[aq^{i-1},aq^i]$的右端点，即 $\xi_i=aq^i$，有 $(aq^i)^k=a^kq^{ki}$，$n\to\infty\Longleftrightarrow q\to 1$. 于是，

$$\int_a^b x^k dx=\lim_{q\to 1}\sum_{i=1}^{n}a^kq^{ki}(aq^i-aq^{i-1})$$

$$=\lim_{q\to 1}a^{k+1}(q-1)\sum_{i=1}^{n}q^{(k+1)i-1}$$

$$=\lim_{q\to 1}a^{k+1}(q-1)\frac{q^k-q^{(k+1)n+k}}{1-q^{k+1}}$$

$$=\lim_{q\to 1}\frac{a^{k+1}q^{(k+1)n+k}-a^{k+1}q^k}{q^k+q^{k-1}+\cdots+q+1}\qquad (b^{k+1}=a^{k+1}q^{(k+1)n})$$

$$=\lim_{q\to 1}\frac{q^k(b^{k+1}-a^{k+1})}{q^k+q^{k-1}+\cdots+q+1}=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1},$$

即

$$\int_a^b x^k dx=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}.$$

从上述二例可见，按照定积分的定义计算定积分要进行复杂的计算，一般来说，没有实际意义. 下面给出计算定积分的实用

方法.

二、积分上限函数

函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个数，这个数只与被积函数 $f(x)$ 以及积分区间 $[a,b]$ 有关，而与积分变量 x 无关，即

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du.$$

例如，在上段例 1 中，将积分变量 x 换成积分变量 t 并不影响定积分，即

$$\int_a^b \sin x dx=\cos a-\cos b \quad 或 \quad \int_a^b \sin t dt=\cos a-\cos b.$$

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 可积，根据§8.3 定理 5，$\forall x\in[a,b]$，函数 $f(x)$ 在 $[a,x]$ 也可积，将积分变量 x 换成积分变量 t，$\forall x\in[a,b]$，有

$$\int_a^x f(t)dt.$$

显然，$\forall x\in[a,b]$，都对应唯一一个定积分 $\int_a^x f(t)dt$（数）. 根据函数定义，它是定义在区间 $[a,b]$ 的函数，表为 $\phi(x)$，即

$$\phi(x)=\int_a^x f(t)dt, \qquad a\leqslant x\leqslant b,$$

称为**积分上限函数**.

积分上限函数的几何意义：如果 $\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)\geqslant 0$，对 $[a,b]$ 上任意 x，积分上限函数 $\phi(x)$ 是区间 $[a,x]$ 上的曲边梯形的面积，如图 8.7 的阴影部分.

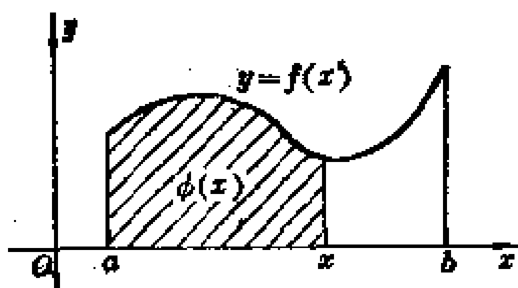


图 8.7

积分上限函数有如下的重要性质:

定理 1. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续,则积分上限函数

$$\phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

在 $[a,b]$ 可导,且 $\phi'(x)=f(x)$,即积分上限函数 $\phi(x)$ 是被积函数 $f(x)$ 的原函数.

证明 只须证明,$\forall x\in[a,b]$,有

$$\phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\phi(x+\Delta x)-\phi(x)}{\Delta x}=f(x).$$

设自变量 x 有改变量 Δx,使 $x+\Delta x\in[a,b]$,有

$$\begin{aligned}\phi(x+\Delta x)-\phi(x)&=\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\\&=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\\&=\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt.\end{aligned}$$

根据§8.3 定理 9,有

$$\phi(x+\Delta x)-\phi(x)=f(x+\theta\Delta x)\Delta x,\qquad 0\leqslant\theta\leqslant 1$$

或

$$\frac{\phi(x+\Delta x)-\phi(x)}{\Delta x}=f(x+\theta\Delta x).$$

已知函数 $f(x)$ 在 x 连续,有

$$\phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\phi(x+\Delta x)-\phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(x+\theta\Delta x)=f(x).\quad\square$$

由此可见,尽管定积分与不定积分(原函数)的概念是完全不同的,但是二者之间存在着密切的联系.

我们在§7.1 曾提出什么样的函数存在原函数的问题.定理 1 回答了:区间上的连续函数 $f(x)$ 存在原函数,而积分上限函数 $\phi(x)$ 就是 $f(x)$ 的一个原函数.

三、定积分的基本公式

已知用积分上限函数能够表示连续函数的原函数．反之，又可应用原函数求定积分．

定理 2. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a). \tag{1}$$

证明 已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，即 $\forall x\in[a,b]$，有

$$F'(x)=f(x).$$

根据定理 1．积分上限函数 $\int_a^x f(t)dt$ 也是 $f(x)$ 的原函数，即

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x).$$

再根据 §6.1 例 1 的推论，有

$$\int_a^x f(t)dt-F(x)=C,$$

其中 C 是常数．为了确定常数 C，令 $x=a$，有

$$\int_a^a f(t)dt-F(a)=C,\quad 即\ C=-F(a).\ \square$$

从而，

$$\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a).$$

再令 $x=b$，有

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).\quad \square$$

(1)式称为定积分的基本公式，亦称**牛顿-莱布尼兹公式**．有时也将 $F(b)-F(a)$ 表为 $F(x)\Big|_a^b$，公式(1)又可表为

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b.$$

定理 2 指出，求连续函数 $f(x)$ 的定积分，只须求出 $f(x)$ 的一个原函数，然后按照公式(1)计算即可．于是，有了牛顿-莱布尼兹公式，求连续函数的定积分问题就转化为求被积函数的原函数．在本章之前，第七章集中讲了不定积分(原函数)，目的之一就是为本章计算定积分服务．利用牛顿-莱布尼兹公式求定积分很简便．例如，上述的例 1 与例 2．

求 $\int_a^b \sin x dx$.

已知 $(-\cos x)' = \sin x$，有

$$\int_a^b \sin x dx = -\cos x \Big|_a^b = -\cos b + \cos a = \cos a - \cos b.$$

求 $\int_a^b x^k dx$，其中 k 是自然数．

已知 $\left(\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)' = x^k$，有

$$\int_a^b x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_a^b = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

例 3. 求 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

解 已知 $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$，有

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

例 4. 求 $\int_1^e \frac{dx}{x}$.

解 已知 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$，有

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1.$$

四、定积分的分部积分法

设函数 $u(x)$，$v(x)$ 在 $[a, b]$ 有连续导数．由函数乘积的导

数公式，有

$$[u(x)v(x)]'=u(x)v'(x)+v(x)u'(x),$$

$$\int_a^b [u(x)v'(x)+v(x)u'(x)]dx=u(x)v(x)\Big|_a^b,$$

即
$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx \tag{2}$$

或
$$\int_a^b u(x)dv(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x). \tag{3}$$

(2)式或(3)式称为定积分的分部积分公式.

例 5. 求 $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$.

解 $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx=\int_0^{\ln 2} xd(-e^{-x})=-xe^{-x}\Big|_0^{\ln 2}+\int_0^{\ln 2} e^{-x}dx$

$$=-xe^{-x}\Big|_0^{\ln 2}-e^{-x}\Big|_0^{\ln 2}=-\ln 2e^{-\ln 2}-e^{-\ln 2}+1$$

$$=-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}(1-\ln 2)$$

$$=\frac{1}{2}(\ln e-\ln 2)=\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}.$$

例 6. 求 $\int_0^1 \arcsin x dx$.

解 $\int_0^1 \arcsin x dx=x\arcsin x\Big|_0^1-\int_0^1 x d\arcsin x$

$$=x\arcsin x\Big|_0^1-\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=x\arcsin x\Big|_0^1+\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-1.$$

例 7. 求 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$，其中 n 是非负整数.

解 $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\frac{\pi}{2}.$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

当 $n\geqslant 2$ 时，

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x d(-\cos x)$$

$$=(-\sin^{n-1}x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x d(\sin^{n-1}x)$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx,$$

即
$$I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,$$

或
$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

1) 当 n 为偶数时，设 $n=2k$，有

$$I_{2k}=\frac{2k-1}{2k}I_{2k-2}=\frac{(2k-1)(2k-3)}{2k(2k-2)}I_{2k-4}=\cdots=$$

$$=\frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{(2k)(2k-2)\cdots 4\cdot 2}I_0=\frac{(2k-1)!!^{①}}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}.$$

2) 当 n 为奇数时，设 $n=2k+1$，有

$$I_{2k+1}=\frac{2k}{2k+1}I_{2k-1}=\frac{2k(2k-2)}{(2k+1)(2k-1)}I_{2k-3}=\cdots=$$

$$=\frac{(2k)(2k-2)\cdots 4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\cdots 5\cdot 3}I_1=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

---

① 见“常用符号”。

五、定积分的换元积分法

应用牛顿-莱布尼兹公式求定积分，首先求被积函数的原函数；其次再按公式(1)计算．在一般情况，把这两步截然分开是比较麻烦的．通常在应用换元积分法求原函数的过程中，也相应变换积分的上、下限，这样可简化计算．

定理 3. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 连续，且函数 $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 有连续导数，当 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 时，有 $a\leqslant\varphi(t)\leqslant b$，又 $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \tag{4}$$

证明 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，即 $F'(x)=f(x)$．由复合函数的求导法则，$F[\varphi(t)]$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的原函数．于是，由牛顿-莱布尼兹公式，有

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]$$

$$=F(b)-F(a),$$

即
$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \quad \square$$

(4) 式称为定积分的**换元积分公式**.

例 8. 求 $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

解 应用两种方法.

1) 应用牛顿-莱布尼兹公式，首先求不定积分(原函数)

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

设 $x=a\sin t$，有 $dx=a\cos t\,dt$.

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=a^2\int\cos^2t dt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

有 $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\left(\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\right)\Big|_0^a=\frac{\pi a^2}{4}.$

2) 应用定积分换元积分公式(4).

设 $x=a\sin t$，有 $dx=a\cos t dt$. 当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=a$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$，

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

显然，上述两种计算方法，后者使用定积分换元积分公式(4)比较简便.

例 9. 求 $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$.

解 设 $x=\cos t$，有 $dx=-\sin t dt$. 当 $x=0$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$；当 $x=1$ 时，$t=0$.

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^2t\cos^2t dt=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t dt$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt=\frac{1}{8}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{16}.$$

例 10. 求 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$.

解 设 $\sqrt{e^x-1}=t$，即 $x=\ln(t^2+1)$，有 $dx=\frac{2t}{t^2+1}dt$.

当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=\ln 2$ 时，$t=1$.

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx=2\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$=2(t-\mathrm{arc\,tg}\,t)\Big|_0^1=2(1-\mathrm{arc\,tg}\,1)=2-\frac{\pi}{2}.$$

例 11. 设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 连续，证明:

若 $f(x)$ 是偶函数，则 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx.$

若 $f(x)$ 是奇函数，则 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0.$

证明 已知 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_0^a f(x)dx.$

讨论上式等号右端的第一个积分 $\int_{-a}^{0}f(x)dx.$

若 $f(x)$ 是偶函数，即 $f(x)=f(-x)$. 设 $x=-t$，有 $dx=-dt.$

$$\int_{-a}^{0}f(x)dx=-\int_a^0 f(-t)dt=\int_0^a f(t)dt=\int_0^a f(x)dx,$$

则

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx.$$

若 $f(x)$ 是奇函数，即 $f(x)=-f(-x)$. 设 $x=-t$，有 $dx=-dt.$

$$\int_{-a}^{0}f(x)dx=-\int_a^0 f(-t)dt$$
$$=-\int_0^a f(t)dt=-\int_0^a f(x)dx,$$

则

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$$
$$=-\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=0.$$

例 12. 证明: 若函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则

$$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx.$$

证明 已知

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_T^{a+T} f(x)dx.$$

讨论定积分 $\int_T^{a+T} f(x)dx$. 设 $x=t+T$，有 $dx=dt$.

$$\int_T^{a+T} f(x)dx=\int_0^a f(t+T)dt=\int_0^a f(t)dt=\int_0^a f(x)dx$$

$$=-\int_a^0 f(x)dx.$$

则

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_T^{a+T} f(x)dx$$

$$=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx-\int_a^0 f(x)dx$$

$$=\int_0^T f(x)dx.$$

应用定积分能够计算某些和的极限.

例 13. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}}$.

解 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{n}\sqrt{\frac{n}{n}}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right). \tag{5}$$

(5) 式的和是函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在[0, 1]的特殊积分和. 它是把[0, 1] n 等分，ξ_i 取为 $\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$ 的右端点 $\left(\text{即}\ \xi_i=\frac{i}{n},\ f(\xi_i)=\sqrt{\frac{i}{n}}\right)$ 构成的积分和. 因为函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在[0, 1]可积，由定积分定义，有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)\right]$$

$$=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}.$$

例 14. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^3}\sqrt{n^2-k^2}$.

解 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^3}\sqrt{n^2-k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right).\tag{6}$$

(6) 式的和是函数 $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ 在[0, 1]的特殊积分和. 它是把[0, 1] n 等分, ξ_i 取为 $\left[\frac{i-1}{n},\ \frac{i}{n}\right]$ 的右端点 $\left(即 \xi_i=\frac{i}{n},\right.$ $\left.f(\xi_i)=\frac{i}{n}\sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2}\right)$ 构成的积分和. 因为函数 $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ 在[0, 1]可积, 由定积分定义, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^3}\sqrt{n^2-k^2}=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}.$$

例 15. 求 $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

解 被积函数中有三角函数和幂函数 x, 因此直接求出其原函数是有困难的. 这里可应用换元积分法消去 x. 为此, 设 $x=\pi-t$. 有 $dx=-dt$. 当 $x=0$ 时, $t=\pi$; 当 $x=\pi$ 时, $t=0$.

$$I=-\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-\int_0^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt$$

$$= -\pi \int_0^{\pi} \frac{d\cos t}{1+\cos^2 t} - I,$$

由此得

$$2I = -\pi \operatorname{arc\,tg} \cos t \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2},$$

即

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

练习题 8.4

1. 用定积分定义求下列定积分:

(1) $\int_0^1 x dx$,

(2) $\int_0^1 x^3 dx$ $\left(提示: \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (1+n)^2\right)$,

(3) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2}$ (提示: 可取 $\xi_k = \sqrt{x_{k-1} x_k}$).

2. 求下列定积分:

(1) $\int_{-1}^{3} (3x^2 - 2x + 1) dx$, (2) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$,

(3) $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$, (4) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx$,

(5) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$, (6) $\int_1^{e} \frac{2+\ln x}{x} dx$,

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$, (8) $\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{2+4x}} dx$,

(9) $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$, (10) $\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx$,

(11) $\int_0^1 \arccos x dx$, (12) $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$,

(13) $\int_{-a}^{a} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}} dx$, (14) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx$, $a \neq b$.

(15) $\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\,dx$.

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{x^n}{1+x}dx$, (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n x\,dx$,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}dx \quad (p>0)$.

4. 应用定积分求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$, (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^p}{n^{p+1}}\,(p>0)$,

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots[n+(n-1)]}$.

5. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 是正值可积，令 $f_{in}=f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(f_{1n}+f_{2n}+\cdots+f_{nn})=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f_{1n}f_{2n}\cdots f_{nn}}=e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx}$,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{f_{1n}}+\frac{1}{f_{2n}}+\cdots+\frac{1}{f_{nn}}}=\frac{b-a}{\int_a^b\frac{dx}{f(x)}}$,

并有

$$\frac{b-a}{\int_a^b\frac{dx}{f(x)}}\leqslant e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx}\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

(提示：见练习题 2.2，第 24 题的提示)

6. 证明：若 m 与 n 是非负整数，则

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n\neq 0;\end{cases}$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n\neq 0,\\ 2\pi, & m=n=0;\end{cases}$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx dx=0$.

(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]^2dx$

$$=\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right],$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$ 都是常数.

7. 设函数 $f(x)$ 连续. 证明:

(1) $\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$.

(2) $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\int_0^1 x^n(1-x)^m dx \quad (n>0,m>0)$.

8. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积, 则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 连续.

9. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 R 连续, 且 $f(x)=\int_a^x f(t)dt$, 则 $f(x)\equiv 0$.

10. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x\cos t^2 dt$,　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_1^x\frac{1-\cos t}{t}dt$,

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{x^2}}\int_0^x e^{t^2}dt$.

11. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, $\forall x,x_0\in[a,b]$, 则

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x}[f(t+h)-f(t)]dt=f(x)-f(x_0).$$

12. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积, 则 $\exists x\in[a,b]$, 有

$$\int_a^x f(t)dt=\int_x^b f(t)dt.$$

13. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, 则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=A.$$

*　　*　　*　　*

14. 证明: 若函数 $f(x)$ 连续, $u(x)$ 与 $v(x)$ 可导, 则 $F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)dt$ 可导, 并求其导数.

15. 证明：若 $f^{(n+1)}(t)$ 在 $U(a)$ 连续，$\forall x\in U(a)$，有

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,$$

则 1) $R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

2) $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$，$a<\xi<x$.

(提示：1)对 $R_n(x)$ 反复应用分部积分法. 2) 应用积分中值定理(定理10). $R_n(x)$ 是泰勒公式积分余项)

16. 证明

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\sin t^2\,dt=0.$$

(提示：应用换元积分法，证明当 $x>0$ 时，$\left|\int_x^{x+1}\sin t^2\,dt\right|<\frac{1}{x}$).

17. 设函数 $f(x)$ 连续. 证明

$$\int_0^x\left\{\int_0^t f(x)\,dx\right\}dt=\int_0^x f(t)(x-t)\,dt.$$

(提示：可应用分部积分法)

18. 证明：若函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 严格单调、连续，其反函数是 $x=f^{-1}(y)$，且 $\alpha=f(a)$，$\beta=f(b)$，则

$$\int_\alpha^\beta f^{-1}(y)\,dy=b\beta-a\alpha-\int_a^b f(x)\,dx.$$

当函数 $f(x)$ 非负时，说明此等式的几何意义.

19. 证明：若函数 $y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，且严格增加，又 $f(0)=0$，$\forall a>0, b>0$，则

$$ab\leqslant\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^b f^{-1}(y)\,dy.$$

特别是，当 $p>1$ 时，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，有 $ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$. (提示：取 $y=x^{p-1}$)

20. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有连续导函数，令

$$h=\frac{b-a}{n},\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}hf(a+kh),\quad I=\int_a^b f(x)\,dx,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}n(s_n-I)=\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)].$$

（提示：将 s_n 与 I 分别表为 $s_n=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)dx$ 与 $I=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$，

其中 $x_k=a+kh$. $s_n-I=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x_k)-f(x)]dx$，应用微分中值定理，

再分别讨论连续函数 $f'(x)$ 在 $[x_{k-1},x_k]$ 的上、下确界，估值计算之）.

21. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)>0$，则

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\geqslant(b-a)^2.$$

$\left(\text{提示：根据定积分定义，用等分法及不等式}\frac{f(\xi_i)}{f(\xi_j)}+\frac{f(\xi_j)}{f(\xi_i)}\geqslant 2.\right)$

22. 证明：若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\leqslant\int_a^b[f(x)]^2dx\int_a^b[g(x)]^2dx.$$

它称为施瓦兹[①]不等式.$\left(\text{提示：讨论}\int_a^b[tf(x)+g(x)]^2dx\geqslant 0.\right)$

23. 应用施瓦兹不等式证明：

(1) $\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2\leqslant(b-a)\int_a^b[f(x)]^2dx$，

(2) 第 21 题，

(3) $\ln\frac{p}{q}\leqslant\frac{p-q}{\sqrt{pq}}$，　$0<q\leqslant p$.

24. 证明：$\exists A<1,\forall n\in\mathbf{N},n>1$，有不等式

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<An^{\frac{3}{2}}.$$

25. 证明

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ \dfrac{2}{2n+1}, & n=m.\end{cases}$$

其中 $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$.

---

① 施瓦兹(Schwarz 1843—1921)德国数学家.

§ 8.5 定积分的应用

一、微元法

应用定积分计算实际问题，首先根据问题的实际意义作出积分和，然后再取极限，从而就将实际问题抽象为定积分. 但是，将作积分和与取极限两步截然分开的作法比较麻烦. 在实际应用中是将作积分和与取极限两步合并为一步，即"微元法"，简便易行. 本段关于微元法不给严格处理，只是通过实例给出应用微元法的方法.

定积分是分布在区间上的整体量. 因为整体是由局部组成的，所以将实际问题抽象为定积分，必须从整体着眼，从局部入手. 这里所说的"局部"不是区间分法的小区间，而是小区间在极限过程中($l(T)\to 0$)缩小为一"点"了. 但是，我们看待这个"点"仍具有小区间的意义. 例如，它的"长"是 dx. 具体作法是，首先将区间上的整体量化成区间上每一点的微分，亦称**微元**，这是"化整为零"；然后，对区间上每一点上的微分无限累加——"连续作和"，这是"积零为整"，就得到了欲求的定积分. 具体过程是：



下面以曲边梯形的面积、物体运动路程和变力作功为例，说明怎样用微元法将这些实际问题化成定积分.

曲边梯形的面积 求区间$[a, b]$上的连续曲线 $y=f(x)\geqslant 0$、x 轴，直线 $x=a$ 与 $x=b$ 所围成曲边梯形的面积 A. 首先求曲边梯形面积的面积微元 dA. 在$[a, b]$上任取一点 x，在点 x 上的面积微元dA 就是高为 $f(x)$，"宽"为微分 dx 的矩形面积，即

$$dA=f(x)\,dx \quad （矩形面积=高\times宽）.$$

再将每一点 x 的面积微元 dA 从 a 到 b 连续累加起来，即由 a 到 b 的定积分，就得到所求的曲边梯形的面积

$$A=\int_a^b dA=\int_a^b f(x)\,dx.$$

物体运动的路程　已知物体沿直线运动，在时刻 t 的速度是 $v(t)$，求从时刻 a 到时刻 b 物体运动的路程 s. 首先求物体运动路程的路程微元 ds. 在时间间隔 $[a,b]$ 上任取一个时刻 t，物体在时刻 t 的运动速度是 $v(t)$，"运动时间"是微分 dt，在时间 t 物体运动的路程微元

$$ds=v(t)\,dt \quad （路程=速度\times时间）.$$

再将每个时刻 t 的路程微元 ds 从时刻 a 到时刻 b 连续累加起来，即由 a 到 b 的定积分，就得到所求的物体运动的路程

$$s=\int_a^b ds=\int_a^b v(t)\,dt.$$

变力作的功　已知变力 $F(x)$（方向不变）沿力的方向将物体从点 a 推到点 b，求变力 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上作的功 W. 首先求变力作功的功微元 dW. 在 $[a,b]$ 上任取一点 x，在点 x 的力是 $F(x)$，物体在点 x 运动的"距离"是微分 dx，在点 x 变力作功的功微元

$$dW=F(x)\,dx \qquad （功=力\times距离）.$$

再将每一点 x 变力作功的功微元 dW 从 a 到 b 连续累加起来，即由 a 到 b 的定积分，就得到所求的变力 $F(x)$ 作的功

$$W=\int_a^b dW=\int_a^b F(x)\,dx.$$

从上述三例看到微元法的共性. 欲将某实际问题抽象为定积分，首先要求出欲求量的微元. 例如，求曲边梯形的面积要求出面积微元；求物体运动的路程要求出路程微元；求变力作功要求出功微元. 这些微元都是根据具体问题的几何、物理等已知的公式写

出来的．例如，矩形面积微元根据矩形面积公式；路程微元根据公式 $s=vt$；功微元根据公式 $W=Fs$．其次再将每一点上的微元连续累加起来，就得到了定积分．下面除计算平面曲线的弧长应用定积分的定义外，其余的问题都是应用微元法．

二、平面区域的面积

围成平面区域的曲线可用不同的形式表示．以下分三种情况：

1．直角坐标系

已知在区间 $[a, b]$ 上的非负连续曲线 $y=f(x)$、x 轴及二直线 $x=a$ 与 $x=b$ 所围成的曲边梯形的面积

$$A=\int_a^b f(x)\,dx.$$

如果 $\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)\leqslant 0$．根据§8.3定理7，有 $\int_a^b f(x)\,dx\leqslant 0$．因为平面图形的面积不能是负数，所以在区间 $[a,b]$ 上的连续曲线 $y=f(x)$（有的部分为正，有的部分为负）、x 轴及二直线 $x=a$ 与 $x=b$ 所围成的平面区域的面积

$$A=\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

如图8.8，连续曲线 $y=f(x)$，x 轴及二直线 $x=a$ 与 $x=b$ 所围成的平面区域的面积

$$A=\int_a^b |f(x)|\,dx=-\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

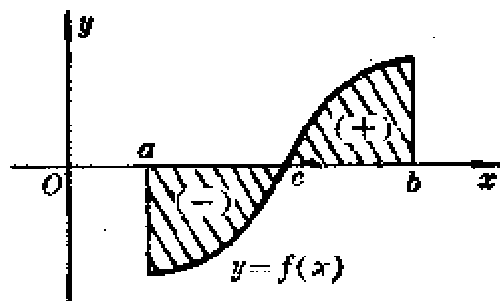


图 8.8

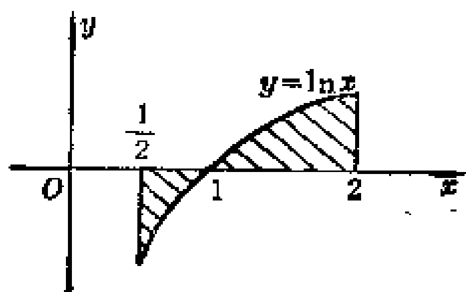


图 8.9

例 1. 求在区间$\left[\frac{1}{2},2\right]$上连续曲线 $y=\ln x$，x 轴及二直线 $x=\frac{1}{2}$ 与 $x=2$ 所围成平面区域(如图 8.9)的面积.

解 已知在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上，$\ln x\leqslant 0$；在$[1,2]$上，$\ln x\geqslant 0$，则此区域的面积

$$A=\int_{\frac{1}{2}}^{2}|\ln x|dx=-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ln x dx+\int_{1}^{2}\ln x dx$$

$$=-(x\ln x-x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}+(x\ln x-x)\Big|_{1}^{2}=\frac{3}{2}\ln 2-\frac{1}{2}.$$

如果平面区域是由区间 $[a,b]$ 上的两条连续曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ （彼此可能相交)及二直线 $x=a$ 与 $x=b$ 所围成(如图 8.10)，它的面积

$$A=\int_{a}^{b}|f(x)-g(x)|dx.$$

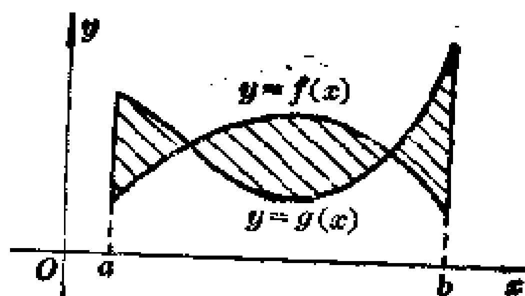


图 8.10

例 2. 求半径为 r 的圆的面积.

解 在直角坐标系中，取圆心为原点，半径为 r 的圆的方程是

$$x^2+y^2=r^2.$$

上半圆的方程是 $y_1=\sqrt{r^2-x^2}$，下半圆的方程是 $y_2=-\sqrt{r^2-x^2}$.于是，圆的面积

$$A=\int_{-r}^{r}|y_1-y_2|dx=2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$$=\left(x\sqrt{r^2-x^2}+r^2\arcsin\frac{x}{r}\right)\Big|_{-r}^{r}=\pi r^2.$$

例 3. 求由两条曲线 $y=x^2$ 与 $x=y^2$ 围成的平面区域(如图 8.11)的面积.

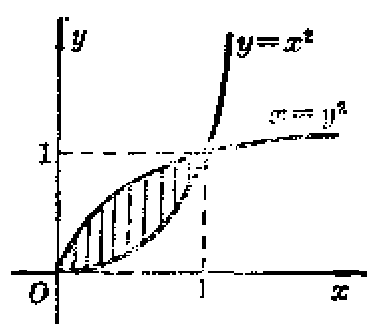


图 8.11

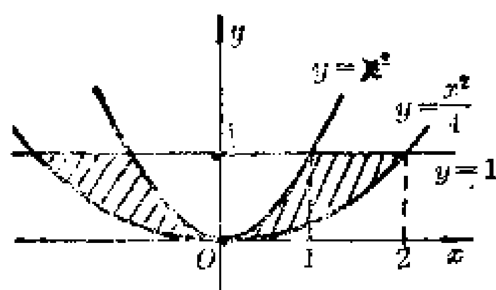


图 8.12

解 两条曲线的交点是(0,0)与(1,1)，则此区域的面积

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

例 4. 求由二条曲线 $y=x^2$, $y=\frac{x^2}{4}$ 和直线 $y=1$ 围成的平面区域(如图 8.12)的面积.

解法一 此区域关于 y 轴对称，其面积是第一象限那部分面积的二倍. 在第一象限中，直线 $y=1$ 与曲线 $y=x^2$ 与 $y=\frac{x^2}{4}$ 的交点分别是(1,1)与(2,1). 此区域的面积

$$A=2\left(\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 dx-\int_0^2\frac{x^2}{4}dx\right)=\frac{4}{3}.$$

解法二 将 y 看作是自变量. 在第一象限的那部分区域是由曲线 $x=\sqrt{y}$, $x=2\sqrt{y}$ 和直线 $y=1$ 所围成(y 作自变量). 此区域的面积

$$A=2\int_0^1(2\sqrt{y}-\sqrt{y})\,dy=2\int_0^1\sqrt{y}\,dy=\frac{4}{3}.$$

2. 参数方程

设曲线 C 是参数方程

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

其中 $\varphi'(t)$ 与 $\psi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续.

1) 若函数 $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 严格增加，从而 $\varphi'(t)\geqslant 0$，有

$$a=\varphi(\alpha)<\varphi(\beta)=b,$$

则函数 $x=\varphi(t)$存在反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，曲线 $C:y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$、$x$ 轴和二直线 $x=a, x=b$ 围成区域的面积

$$A=\int_a^b |y|\,dx=\int_a^b |\psi[\varphi^{-1}(x)]|\,dx=\int_\alpha^\beta |\psi(t)|\varphi'(t)\,dt. \tag{1}$$

2) 若函数 $x=\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$严格减少，从而 $\varphi'(t)\leqslant 0$，有

$$a=\varphi(\alpha)>\varphi(\beta)=b,$$

则函数 $x=\varphi(t)$存在反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，曲线 $C:y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$、$x$ 轴和二直线 $x=a, x=b$ 围成区域的面积

$$A=\int_b^a |y|\,dx=\int_b^a |\psi[\varphi^{-1}(x)]|\,dx=\int_\beta^\alpha |\psi(t)|\varphi'(t)\,dt.$$

$$=-\int_\alpha^\beta |\psi(t)|\varphi'(t)\,dt. \tag{2}$$

例 5. 求旋轮线：$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ $(a>0, 0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 一拱与 x 轴围成区域（如图 8.13）的面积.

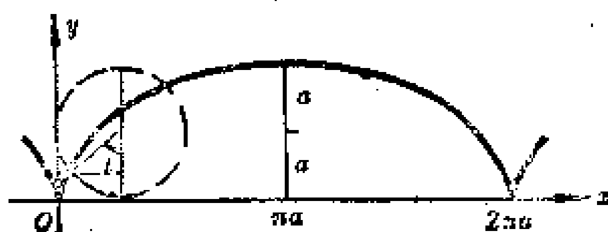


图 8.13

解 函数 $x=a(t-\sin t)$在$[0,2\pi]$严格增加，或 $\forall t\in[0,2\pi]$，有 $x'=a(1-\cos t)\geqslant 0$（仅在$[0, 2\pi]$上的孤立点使 $x'=0$）. 由公式(1)，旋轮线的一拱与 x 轴围成区域的面积

$$A=\int_0^{2\pi} |a(1-\cos t)|\,a(1-\cos t)\,dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt$$

$$=a^2\left(t-2\sin t+\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=3\pi a^2.$$

例 6. 求椭圆: $x=a\cos t, y=b\sin t\,(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$的面积.

解 椭圆关于 x 轴、y 轴都对称，其面积是第一象限那部分区域面积的四倍. 第一象限那部分区域是曲线

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$$

和 x 轴、y 轴所围成. 而函数 $x=a\cos t$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$严格减少，或 $\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，有 $x'=-a\sin t\leqslant 0$. 由公式(2)，椭圆的面积

$$A=-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}|b\sin t|(-a\sin t)\,dt=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt$$

$$=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt=2ab\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=ab\pi.$$

3. 极坐标

设曲线是极坐标方程

$$r=f(\theta),\quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,$$

其中 $f(\theta)$在$[\alpha,\ \beta]$连续. 求曲线 $r=f(\theta)$及二射线 $\theta=\alpha$ 与 $\theta=\beta$ 围成区域(如图 8.14)的面积.

应用微元法 $\forall\theta\in[\alpha,\ \beta]$. 在角 θ 的向径 $r=f(\theta)$. 角 θ 的微分是 $d\theta$. 由扇形面积公式，在角 θ，向径是 $r=f(\theta)$，夹角是 $d\theta$ 的扇形面积微元

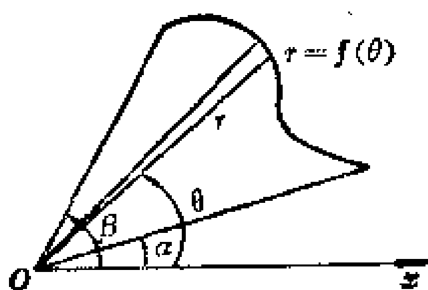


图 8.14

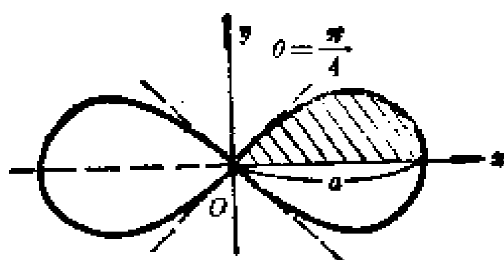


图 8.15

$$dA=\frac{1}{2}r^2d\theta=\frac{1}{2}[f(\theta)]^2d\theta.$$

再将扇形面积微元 dA 从 α 到 β 连续累加起来，就得到此区域的面积

$$A=\int_\alpha^\beta dA=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[f(\theta)]^2d\theta.$$

例 7. 求双纽线 $r^2=a^2\cos2\theta\,(a>0)$ 围成区域(如图 8.15)的面积.

解 双纽线关于两个坐标轴都对称. 双纽线围成区域的面积是第一象限那部分区域面积的 4 倍. 双纽线

$$r=a\sqrt{\cos2\theta}$$

在第一象限中，θ 的变化范围是由 0 到 $\frac{\pi}{4}$. 于是，双纽线围成区域的面积

$$A=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}r^2d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos2\theta d\theta$$

$$=a^2(\sin2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2.$$

例 8. 求三叶玫瑰线

$$r=a\cos3\theta\,(a>0)$$

围成区域 (如图 8.16)的面积.

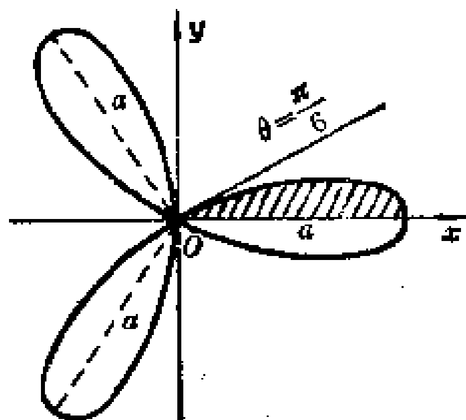


图 8.16

解 三叶玫瑰线围成的三个叶全等，如图 8.16. 只须计算第一象限那部分面积的 6 倍. 三叶玫瑰线 $r=a\cos 3\theta$，在第一象限中，角 θ 的变化范围是由 0 到 $\frac{\pi}{6}$. 于是，三叶玫瑰线围成区域的面积

$$A=\frac{6}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}a^2\cos^2 3\theta d\theta=a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta d(3\theta)$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\varphi)d\varphi$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

三、平面曲线的弧长

在§2.1中，用刘徽割圆术定义了圆的周长. 现将刘徽割圆术加以推广，定义平面曲线的弧长，并得到计算平面曲线弧长的公式.

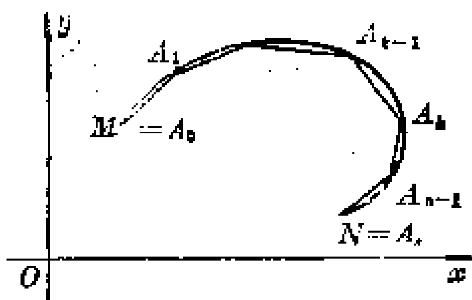


图 8.17

设有平面曲线 MN，如图 8.17. 在曲线 MN 上任取 $n+1$ 个点：

$$M=A_0, A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}, A_k, \cdots, A_{n-1}, A_n=N,$$

称为曲线 MN 的一个分法，表为 T. 用线段连接相邻两点，得到曲线 MN 的内接折线. 设内接折线的长（已知的）是 $L(T)$，即 $L(T)=\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{A_{k-1}A_k}$. 显然，内接折线的长 $L(T)$ 仅与分法 T 有关. 一般来说，分法 T 不同，$L(T)$ 也不同.

定义 若当 $l(T)$① $\to 0$ 时，平面曲线 MN 的内接折线的长

① $l(T)=\max\{\overline{A_0A_1}, \overline{A_1A_2}, \cdots, \overline{A_{n-1}A_n}\}$.

$L(T)$存在极限，设

$$\lim_{l(T)\to 0} L(T)=L,$$

称曲线 MN **可求长**，其长为 L.

1. 参数方程

设曲线 MN 是参数方程

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta. \tag{3}$$

若 $\varphi'(t)$ 与 $\psi'(t)$ 在$[\alpha,\beta]$连续，且不同时为 0(或 $\forall t\in[\alpha,\beta]$，有$[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2\neq 0$)，则称 MN 是**光滑曲线**.

定理 1. 若 MN 是光滑曲线(3)，则曲线 MN 可求长，且MN 的弧长

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt. \tag{4}$$

(4)式是**弧长公式**.

证明 给曲线 MN 一个分法 T，分点：

$$M=A_0,A_1,\cdots,A_k,\cdots,A_n=N.$$

设它们的坐标是 $A_k(x_k,y_k)$，其中 $x_k=\varphi(t_k),y_k=\psi(t_k)$, $k=0,1,2,\cdots,n$. 相应有区间$[\alpha,\beta]$的分法 T'，分点：

$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_k<\cdots<t_n=\beta.\quad \Delta t_k=t_k-t_{k-1}.$$

根据微分中值定理，有

$$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}=\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})=\varphi'(\xi_k)\Delta t_k, \tag{5}$$

$$\Delta y_k=y_k-y_{k-1}=\psi(t_k)-\psi(t_{k-1})=\psi'(\eta_k)\Delta t_k, \tag{6}$$

其中 $t_{k-1}<\xi_k<t_k$, $t_{k-1}<\eta_k<t_k$.

由于 $\varphi'(t)$与 $\psi'(t)$不同时为 0，$\forall t\in[\alpha,\beta]$，存在 t 的邻域，在其上或 $\varphi(t)$有连续反函数，或 $\psi(t)$有连续反函数. 而

$$\overline{A_{k-1}A_k}=\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2}.$$

从而 $l(T)\to 0\Longleftrightarrow\Delta x_k\to 0$ 与 $\Delta y_k\to 0\quad(k=1,2,\cdots,n)\Longleftrightarrow$

$\Delta t_k\to 0(k=1,2,\cdots,n)\Longleftrightarrow l(T')\to 0.$

由(5)式和(6)式，得到曲线 MN 的内接折线的长

$$L(T)=\sum_{k=1}^{n}\overline{A_{k-1}A_k}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[\varphi'(\xi_k)\Delta t_k]^2+[\psi'(\eta_k)\Delta t_k]^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\eta_k)}\,\Delta t_k$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\xi_k)}\,\Delta t_k+\sum_{k=1}^{n}Q_k\Delta t_k,$$

其中 $Q_k=\sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\eta_k)}-\sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\xi_k)}$. 于是，

$$\lim_{l(T)\to 0}L(T)$$

$$=\lim_{l(T')\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\xi_k)}\,\Delta t_k+\lim_{l(T')\to 0}\sum_{k=1}^{n}Q_k\Delta t_k.$$

因为上式等号右端第一个极限是连续函数$\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$ 在区间$[\alpha,\beta]$关于分法 T' 的积分和，第二个极限值为 0(待证)，所以

$$\lim_{l(T)\to 0}L(T)=\lim_{l(T')\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\xi_k)}\,\Delta t_k$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

下面证明 $\lim\limits_{l(T')\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}Q_k\Delta t_k=0$.

事实上，有不等式

$$|Q_k|=\left|\sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\eta_k)}-\sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\xi_k)}\right|$$

$$\leqslant|\psi'(\eta_k)-\psi'(\xi_k)|\text{①}.$$

---

① $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|=\dfrac{|b^2-c^2|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}}$

$=|b-c|\dfrac{|b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}}\leqslant|b-c|.$

已知函数 $\psi'(t)$在$[\alpha,\beta]$连续，从而在$[\alpha,\beta]$一致连续，即
$\forall \varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall t, t'\in[\alpha,\beta]: |t-t'|<\delta$，有

$$|\psi'(t)-\psi'(t')|<\varepsilon.$$

$\forall T': l(T')<\delta,\ \xi_k,\eta_k\in[t_{k-1},t_k]: |\xi_k-\eta_k|\leqslant\Delta t_k<\delta$，有

$$|\psi'(\eta_k)-\psi'(\xi_k)|<\varepsilon.$$

从而，
$$\left|\sum_{k=1}^{n}Q_k\Delta t_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\psi'(\eta_k)-\psi'(\xi_k)|\Delta t_k<\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\Delta t_k$$
$$=\varepsilon(\beta-\alpha),$$

即
$$\lim_{l(T')\to 0}\sum_{k=1}^{n}Q_k\Delta t_k=0.$$

于是，光滑曲线 MN 的弧长

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.\ \square$$

若在曲线 MN 上任取一点 A，设 A 对应的参数是 t，则曲线 MA 的弧长表为 $s(t)$，有

$$s(t)=\int_{\alpha}^{t}\sqrt{\varphi'^2(u)+\psi'^2(u)}\,du.$$

显然，$s(t)$在区间$[\alpha,\beta]$是可导的单调增加函数，有

$$s'(t)=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$$

或
$$ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt. \tag{7}$$

(7)式称为**弧长微分公式**.

例 9. 求半径为 r 的圆的周长.

解 取圆心在原点半径为 r 的圆的参数方程

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi,\qquad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$
$$x'=-r\sin\varphi,\qquad y'=r\cos\varphi.$$

于是，半径为 r 的圆的周长 s 是

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}\,d\varphi=r\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi r.$$

例 10. 求星形线 $x=a\cos^3\varphi, y=a\sin^3\varphi, a>0, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ (如图 8.18)的全长.

解 如图 8.18, 星形线关于两个坐标轴都对称. 于是, 星形线的全长是它在第一象限那部分弧长的 4 倍.

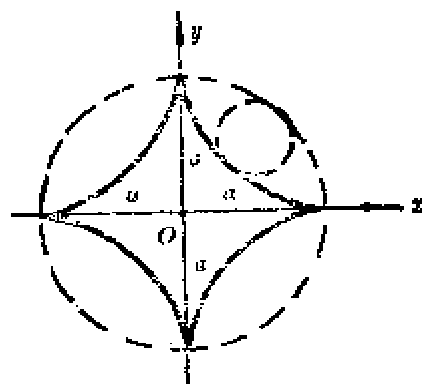


图 8.18

$$x'=-3a\cos^2\varphi\sin\varphi,$$

$$y'=3a\sin^2\varphi\cos\varphi,$$

则星形线的全长

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x'^2+y'^2}d\varphi=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}d\varphi$$

$$=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin\varphi\cos\varphi|d\varphi=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi$$

$$=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi d(2\varphi)=6a.$$

2. 直角坐标系

设曲线 MN 的方程是

$$y=f(x),\qquad a\leqslant x\leqslant b.$$

可将它看作是以 x 为参数的参数方程

$$x=x,\quad y=f(x),\qquad a\leqslant x\leqslant b.$$

若 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则由公式(4)和公式(7), 分别有曲线 MN 的弧长公式和弧长微分公式:

$$s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$$

和
$$ds=\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$$

例 11. 求悬链线 $f(x)=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ 在 $[0, a]$ 上的弧长.

解 $f'(x)=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}), \sqrt{1+f'^2(x)}=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})$.

悬链线在$[0,a]$的弧长

$$s=\frac{1}{2}\int_0^a(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})dx=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})\Big|_0^a$$

$$=\frac{a}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right).$$

3. 极坐标

设曲线 MN 是极坐标方程

$$r=f(\theta),\qquad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta.$$

可将极坐标方程 $r=f(\theta)$ 化成以 θ 为参数的参数方程

$$x=f(\theta)\cos\theta,\quad y=f(\theta)\sin\theta,\quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta.$$

当 $f(\theta)$ 可导时，有

$$x'=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta,$$

$$y'=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta.$$

若 $f'(\theta)$ 在$[\alpha,\ \beta]$连续，则由公式(4)和公式(7)分别有曲线 MN 的弧长公式和弧长微分公式：

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2+y'^2}\,d\theta=\int_\alpha^\beta\sqrt{f^2(\theta)+f'^2(\theta)}\,d\theta=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta.$$

和
$$ds=\sqrt{f^2(\theta)+f'^2(\theta)}\,d\theta=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta.$$

例 12. 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$（如图 8.19）的全长.

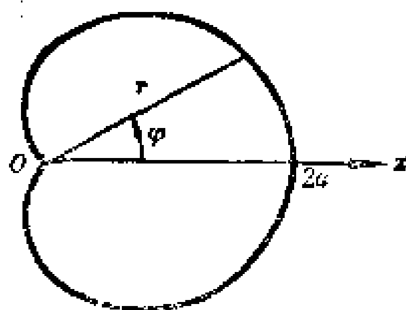


图 8.19

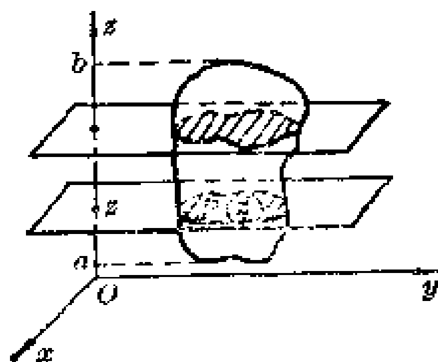


图 8.20

解　如图 8.19，心脏线在$[0,\pi]$与$[\pi,2\pi]$上的弧长相等.

$$r'=-a\sin\theta.$$

心脏线的全长

$$s=2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=2a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}d\theta$$

$$=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=8a.$$

四、应用截面面积求体积

在空间直角坐标系中，有封闭曲面围成的立体，如图 8.20. 用垂直于 z 轴的任意平面截立体，如果截面的面积都是已知的，即截面的面积是 z 的函数，设为 $P(z)$. 如果立体在 z 轴上的投影是区间$[a,b]$，并设 $P(z)$是$[a,b]$的连续函数.

在区间$[a,b]$任取一点 z，已知截面的面积是 $P(z)$，设"厚度"是微分 dz，则在点 z 的体积微元 dV 是截面面积为 $P(z)$厚度为dz的柱体的体积，即

$$dV=P(z)dz.\qquad (\text{柱体体积}=\text{底面积}\times\text{高})$$

再将每一点 z 的体积微元 dV 从 a 到 b 连续累加起来，就得到立体的体积

$$V=\int_a^b dV=\int_a^b P(z)dz.\quad(8)$$

(8) 式是已知截面面积求立体的**体积公式**.

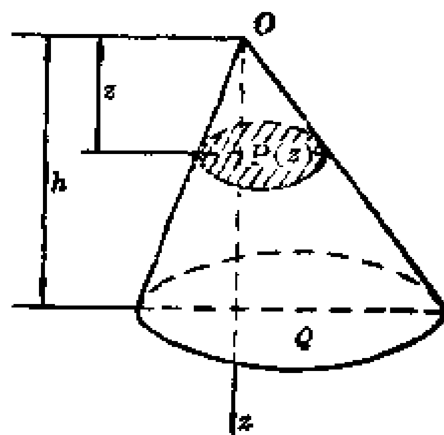


图　8.21

例 13. 证明：底面积为 Q 高为 h 的锥体的体积是

$$V=\frac{1}{3}Qh.$$

证明　如图 8.21，取锥体的顶点为坐标原点O. 设过顶点 O

垂直于底面的直线为 z 轴（正方向向下）．设距顶点 O 为 z ($0\leqslant z\leqslant h$) 的截面的面积为 $P(z)$．

由初等几何知，平行于锥体底面的截面的面积与底面面积之比等于二者分别距顶点距离的平方比，即

$$\frac{P(z)}{Q}=\frac{z^2}{h^2} \quad 或 \quad P(z)=\frac{Q}{h^2}z^2,\quad 0\leqslant z\leqslant h.$$

$P(z)$ 是$[0,h]$的连续函数，则底面积为 Q 高为 h 的锥体的体积

$$V=\int_0^h P(z)dz=\int_0^h \frac{Q}{h^2}z^2dz=\frac{Q}{h^2}\int_0^h z^2dz$$
$$=\frac{Q}{h^2}\frac{z^3}{3}\bigg|_0^h=\frac{1}{3}Qh.$$

例 14. 求椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 及平面 $z=\frac{c}{a}x$，$z=0$ 所围成立体($z\geqslant 0$)（如图 8.22）的体积．

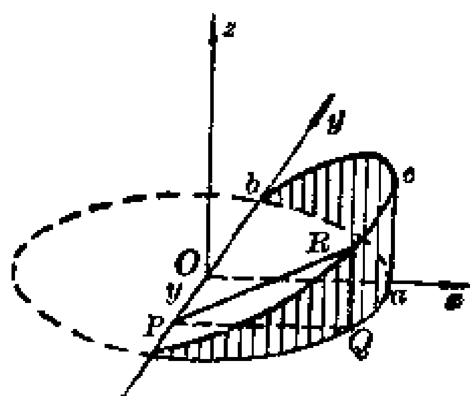


图 8.22

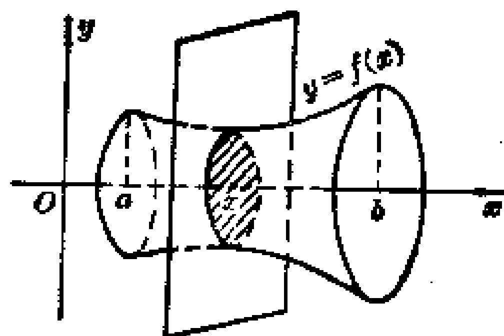


图 8.23

解 如图 8.22．$\forall y\in[-b,b]$，$P(0,y)$为 y 轴上的任意一点，用过点 P，且垂直于 y 轴的平面截立体，截面是直角三角形 PQR．因为点 Q 在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上，所以

$$PQ=x=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}.$$

又因为点 R 在平面 $z=\frac{c}{a}x$ 上，所以

$$QR=\frac{c}{a}x=c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}.$$

截面的面积，即直角三角形 PQR 的面积

$$A(y)=\frac{PQ\cdot QR}{2}=\frac{ac}{2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right).$$

于是，此立体的体积

$$V=\int_{-b}^{b}A(y)dy=\int_{-b}^{b}\frac{ac}{2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy$$
$$=\frac{ac}{2}\left(y-\frac{y^3}{3b^2}\right)\Bigg|_{-b}^{b}=\frac{2}{3}abc.$$

将区间 $[a,b]$ 的连续曲线 $y=f(x)$ 绕 x 轴旋转一周，得到旋转体①. $\forall x\in[a,b]$，过点 x 作垂直于 x 轴的平面，与旋转体相截，截面是半径为 $f(x)$ 的圆（如图 8.23），其面积是 $\pi[f(x)]^2$. 于是，在 $[a,b]$ 的连续曲线 $y=f(x)$ 绕 x 轴旋转的旋转体的体积

$$V=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx.$$

类似有，将在区间 $[c,d]$ 的连续曲线 $x=\varphi(y)$ 绕 y 轴旋转一周，所得旋转体的体积

$$V=\pi\int_c^d[\varphi(y)]^2dy.$$

例 15. 求曲线 $y=\ln x$ 在区间 $[1,\ e]$ 绕 x 轴旋转一周的旋转体的体积.

解 曲线 $y=\ln x$ 在区间 $[1,e]$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$V=\pi\int_1^e(\ln x)^2dx.$$

由分部积分法，有

$$\int(\ln x)^2dx=x(\ln x)^2-\int xd(\ln x)^2$$

① 这是简述说法. 实际上应是"连续曲线 $y=f(x)$，x 轴，直线 $x=a$，$x=b$ 围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周".

$$=x(\ln x)^2-2\int \ln x dx$$

$$=x(\ln x)^2-2(x\ln x-\int x d\ln x)$$

$$=x(\ln x)^2-2x\ln x+2\int dx$$

$$=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C.$$

于是，

$$V=\pi[x(\ln x)^2-2x\ln x+2x]\Big|_1^e=\pi(e-2).$$

例 16. 求圆$(x-b)^2+y^2=a^2(0<a<b)$绕y轴旋转一周的旋转体(环体)的体积.

解 圆的方程改写为$x=b\pm\sqrt{a^2-y^2}$.

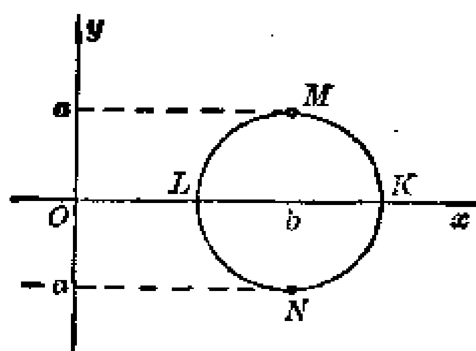


图 8.24

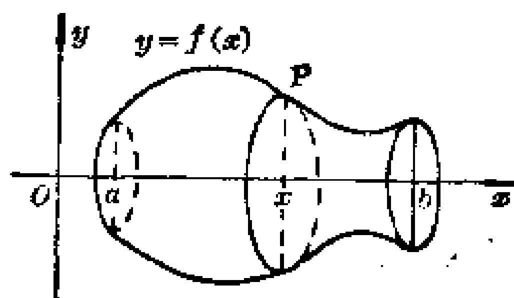


图 8.25

如图 8.24. 右半圆 MKN 的方程是

$$\varphi_1(y)=b+\sqrt{a^2-y^2}.$$

左半圆 MLN 的方程是

$$\varphi_2(y)=b-\sqrt{a^2-y^2}.$$

环体的体积是两个半圆$\varphi_1(y)$与$\varphi_2(y)$$(-a\leqslant y\leqslant a)$绕$y$轴旋转一周所得旋转体的体积的差，即环体的体积

$$V=\pi\int_{-a}^{a}[\varphi_1(y)]^2dy-\pi\int_{-a}^{a}[\varphi_2(y)]^2dy$$

$$= \pi \int_{-a}^{a} \{[\varphi_1(y)]^2 - [\varphi_2(y)]^2\} dy$$

$$= \pi \int_{-a}^{a} \{(b+\sqrt{a^2-y^2})^2 - (b-\sqrt{a^2-y^2})^2\} dy$$

$$= 4b\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-y^2} dy$$

$$= 4\pi b \left(\frac{y}{2}\sqrt{a^2-y^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{y}{a} \right) \Big|_{-a}^{a}$$

$$= 2a^2 b\pi^2.$$

例 17. 祖暅定理 "夹在两个平行平面间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等。"（见高中《立体几何》第100页）

证明 在空间直角坐标系中，将两个平行平面中的一个作为 xy 平面，另一个放在 xy 平面之上，如图 8.26. 设两个平行平面之

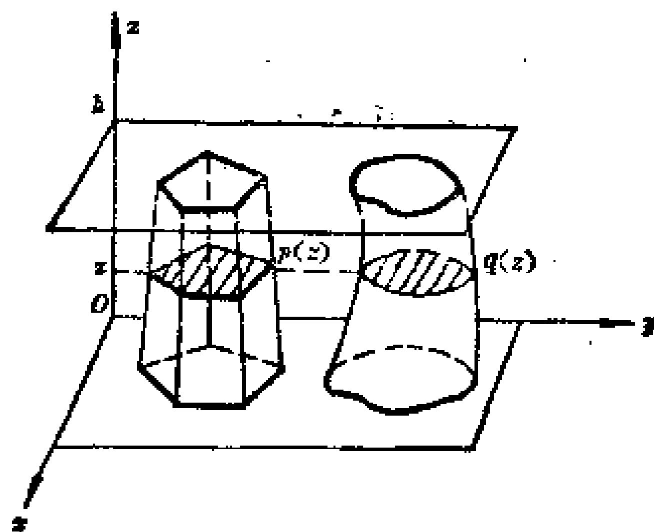


图 8.26

间的距离是 h. $\forall z \in [0, h]$，过点 z 垂直 z 轴的平面与这两个几何体相截，设截面的面积分别是 $p(z)$ 与 $q(z)$. 设这两个几何体的体积分别是 V_1 与 V_2

已知 $\forall z\in[0,h]$，有 $p(z)=q(z)$. 于是，

$$V_1=\int_0^h p(z)dz=\int_0^h q(z)dz=V_2,$$

即两个几何体的体积相等.

高中《立体几何》正是应用祖暅定理给出了棱柱、圆柱、棱锥、圆锥、球的体积公式. 在中学数学中，祖暅定理是不能证明的. 为此在那里只好将它作为不证自明的公理. 在数学分析中，它不是公理，而是极易证明的定理.

五、旋转体的侧面积

将区间$[a,b]$的非负连续曲线 $y=f(x)$ 绕 x 轴旋转，得到旋转体，求此旋转体的侧面积(如图 8.25)①.

设导函数 $f'(x)$在$[a,\ b]$ 连续. 首先求旋转体的侧面积的微元dA. $\forall x\in[a,b]$，在点x，旋转半径是$f(x)$，在曲线上点 $P(x,f(x))$ 的弧长微元是 ds，则在点 x 旋转体的侧面积的微元

$$dA=2\pi f(x)ds.$$

[圆台的侧面积$=\pi\times$母线长$\times$(上底半径$+$下底半径). 在极限状态，母线长是弧长微元 ds；上底半径$+$下底半径$=2f(x)$.]
再将每一点 x 旋转体的侧面积微元 dA 从 a 到 b 连续累加，就得到旋转体的侧面积

$$A=\int_a^b dA=2\pi\int_a^b f(x)ds.$$

已知弧长微元$ds=\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$，有

$$A=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

例 18. 求半径为 r 的球的表面积.

---

① "旋转体的侧面"仅是曲线 $y=f(x)$ 绕 x 轴旋转而成的曲面. "旋转体的表面"是侧面再加上两端的圆面.

解 取球心在原点，半径为 r 的球面方程

$$x^2+y^2=r^2.$$

半径为 r 的球的表面积 A 等于上半圆 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 在区间 $[-r,r]$ 绕 x 轴旋转的侧(表)面积.

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}=-\frac{x}{y},\quad \sqrt{1+y'^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}=\frac{r}{y}.$$

半径为 r 的球的表面积

$$A=2\pi\int_{-r}^{r}y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\pi r\int_{-r}^{r}dx=4\pi r^2.$$

例 19. 求圆 $x^2+(y-b)^2=a^2(0<a<b)$ 绕 x 轴旋转所得旋转体(环体)的(表)面积.

解 如图 8.27. 上半圆与下半圆的方程分别是

$$y_1=b+\sqrt{a^2-x^2}\quad 与\quad y_2=b-\sqrt{a^2-x^2}.$$

$$y'^2=\frac{x^2}{a^2-x^2},\qquad \sqrt{1+y'^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

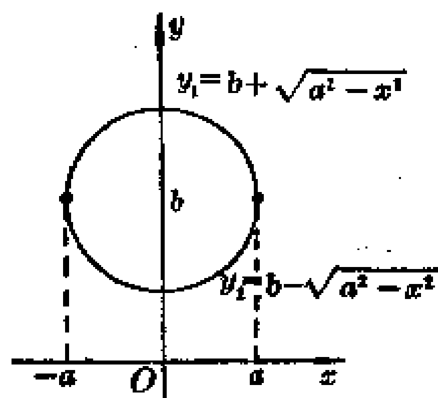


图 8.27

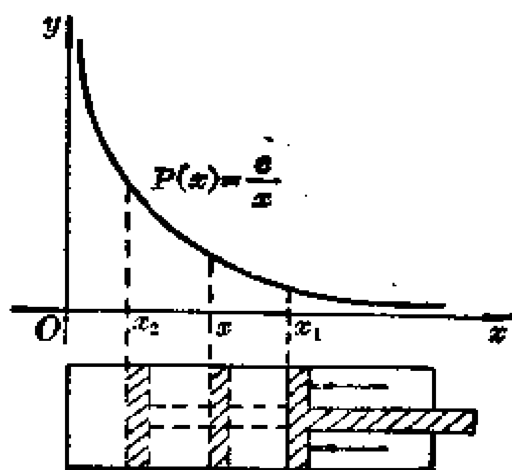


图 8.28

显然，旋转体的面积(环体的表面积) A 是上、下半圆绕 x 轴旋转的侧面积之和，即

$$A=2\pi\int_{-a}^{a}y_1\sqrt{1+y_1'^2}\,dx+2\pi\int_{-a}^{a}y_2\sqrt{1+y_2'^2}\,dx$$

$$= 2\pi\int_{-a}^{a}[y_1\sqrt{1+y_1'^2}+y_2\sqrt{1+y_2'^2}]dx$$

$$= 2\pi\int_{-a}^{a}\left[(b+\sqrt{a^2-x^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\right.$$

$$\left.+(b-\sqrt{a^2-x^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]dx$$

$$= 4ab\pi\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 4ab\pi\arcsin\frac{x}{a}\Big|_{-a}^{a} = 4ab\pi^2.$$

六、变力作功

第一段已经得到变力作功的公式. 这里使用微元法给出两个例子.

例 20. 设空气压缩机的活塞面积是 A, 在等温的压缩过程中,活塞由 x_1 处(此时气体体积 $V_1=Ax_1$)压缩到 x_2($x_2<x_1$, 此时气体体积 $V_2=Ax_2$), 见图 8.28. 求空压机在这段压缩过程中消耗的功.

解 已知单位面积上的压强 p 与体积 V 成反比, 即 $p=\frac{c}{V}$, 其中 c 是比例常数. $\forall x\in[x_2,x_1]$, 气体体积 $V=Ax$, 即 $p=\frac{c}{Ax}$. 而活塞面上的总压力 $F(x)=A\frac{c}{Ax}=\frac{c}{x}$. 在点 x 活塞运动 dx, 则在点 x 空压机消耗的功微元

$$dW=-\frac{c}{x}dx,$$

其中负号表示活塞运动的方向与 x 轴正方向相反. 于是, 活塞由 x_1 压缩到 x_2 消耗的功

$$W=\int_{x_1}^{x_2}dW=-c\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x}=-c\ln x\Big|_{x_1}^{x_2}=c\ln\frac{x_1}{x_2}.$$

例 21. 从地面垂直向上发射质量为 m 的火箭, 当火箭距地面

为 r 时，求火箭克服地球引力所作的功. 如果火箭脱离地球引力范围，问火箭的初速度 v_0 多大？

解 已知两质点的质量分别是 m_1 与 m_2，它们之间的距离是 r，根据万有引力定律，两者之间的引力

$$f=k\frac{m_1m_2}{r^2},$$

其中 k 是引力常数.

设地球的半径为 R，地球的质量为 M；设火箭距地面的高度为 x，已知火箭的质量是 m，则火箭受到地球的引力

$$f=k\frac{Mm}{(R+x)^2}.$$

为了确定引力常数 k，已知当 $x=0$ 时，$f=mg$，其中 g 是重力加速度，即 $mg=k\frac{Mm}{R^2}$，则 $k=\frac{R^2g}{M}$. 于是，火箭受到地球的引力

$$f=\frac{R^2mg}{(R+x)^2}.$$

在 x 处火箭升离 dx，则在 x 处火箭克服地球引力所作功的功微元

$$dW=fdx=\frac{R^2mg}{(R+x)^2}dx.$$

于是，当火箭距地面为 r 时，火箭克服地球引力所作的功

$$W_r=\int_0^r\frac{R^2mg}{(R+x)^2}dx=R^2mg\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+r}\right).$$

当火箭脱离地球引力范围时，即相当于 r 无限增大，这时，火箭克服地球引力所作的功

$$W_\infty=\lim_{r\to+\infty}R^2mg\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+r}\right)=Rmg.$$

火箭作的功全部转化为火箭的位能，而位能是来源于动能的. 若火箭离开地面时的初速度是 v_0，则它的动能是 $\frac{1}{2}mv_0^2$. 于是，给予火箭的动能要不小于火箭克服地球引力所需的功，即

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \geqslant Rmg \quad 或 \quad v_0 \geqslant \sqrt{2Rg}.$$

已知 $g=9.81$ 米/秒^2，地球半径 $R=6.371\times10^6$ 米，则

$$v_0 \geqslant \sqrt{2\times6.371\times10^6\times9.81} \approx 11.2\times10^3 \text{ 米/秒}$$
$$=11.2 \text{ 公里/秒}.$$

$v_0=11.2$ 公里/秒是火箭脱离地球引力范围最小的初速度，即第二宇宙速度.

练习题 8.5

1. 求下列平面曲线所围成的区域的面积：

(1) $2y=x^2$ 与 $x=y-4$，

(2) $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=-\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{4}$,

(3) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$, $x=0$, $y=0$,

(4) $y(x^2+a^2)=a^3$, $x^2=2ay$ $(a>0)$,

(5) $y^2=x^2(a^2-x^2)$,

(6) $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $(a>0)$,

(7) $x=2a\cos t-a\cos 2t$, $y=2a\sin t-a\sin 2t$,

(8) $x=2t-t^2$, $y=2t^2-t^3$,

(9) $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$,

(10) $r=a\sin 2\theta$ $(a>0)$.

2. 求由抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 与它在点 $A(0,-3)$ 与点 $B(3,0)$ 的切线所围成的区域的面积.

3. 求下列曲线的弧长：

(1) $y^2=x^3$, 由 $x=0$ 到 $x=1$,

(2) $y=\ln x$, 由 $x=\sqrt{3}$ 到 $x=\sqrt{8}$,

(3) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$,

(4) $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$,

(5) $r=a\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ $(a>0)$,

(6) $r=a\sin^3\frac{\theta}{3}$ 的全长 $(a>0)$,

4. 求截楔形的体积，其平行的上底与下底的边长分别是 A,B 与 a,b 的矩形，而高是 h.

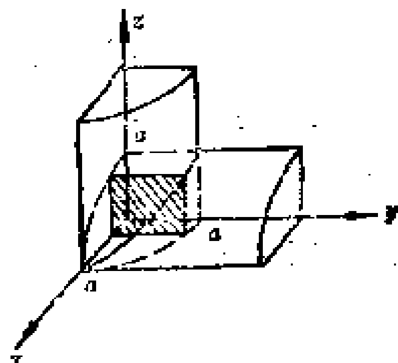


图 8.29

5. 求柱面 $x^2+z^2=a^2$ 与 $y^2+z^2=a^2$ 围成的体积（如图 8.29. 仅是第一卦限的部分）

6. 求下列曲线围成的区域绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

(1) $y=x^3$, $x=2$, $y=0$, (2) $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$,

(3) $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$,

7. 求下列曲线绕指定轴旋转所成旋转体的侧面积：

(1) $y^2=x$, $0\leqslant x\leqslant 6$, 绕 x 轴，(2) $y=\operatorname{tg}x$, $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$, 绕 x 轴，

(3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴，

8. 求曲线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, 绕 x 轴和 y 轴旋转所成曲面的面积.

9. 若 1 千克的力能使弹簧伸长 1 厘米，现在要使弹簧伸长 10 厘米，问需要花费多大的功？（提示：应用虎克定律.）

10. 直径为 20 厘米，长为 80 厘米的圆柱被压力为 10 千克/厘米^2 的蒸汽充满，若汽体的温度不变，要使汽体的体积减少一半，问需花费多大的功？

* * * *

11. 证明：若立体垂直于 x 轴的横截面的面积

$$S(x)=Ax^2+Bx+C,\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

其中 A,B,C 是常数，则此立体的体积

$$V=\frac{b-a}{6}\left[S(a)+4S\left(\frac{a+b}{2}\right)+S(b)\right].$$

12. 证明：将区域 $a\leqslant x\leqslant b$, $0\leqslant y\leqslant y(x)$（其中 $y(x)$ 是连续函数）绕 y 轴

旋转所成的旋转体的体积

$$V_y=2\pi\int_a^b xy(x)dx.$$

13. 证明：将区域 $0\leqslant\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\leqslant\pi, 0\leqslant r\leqslant r(\varphi)$（$r$ 与 φ 是极坐标）绕极轴旋转所成的旋转体的体积

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi.$$

14. 有内半径为 10 米的半球容器，其中盛满水，欲将水抽尽，求所作的功.

15. 一矩形板垂直水面浸在水中，其底 8 米，高 12 米，上沿与水面平行，并距水面 5 米，求矩形板的一侧所受的水压力.

§8.6 定积分的近似计算

求连续函数 $f(x)$ 的定积分 $\int_a^b f(x)dx$，仅有牛顿—莱布尼兹公式并没有全部解决定积分的计算问题. 这是因为：有些连续函数，如 e^{-x^2}，$\frac{\sin x}{x}$（在 0 作连续开拓）等，尽管它们存在原函数，但是它们的原函数都不是初等函数. 因此，求这些连续函数的定积分不能应用牛顿—莱布尼兹公式；有些连续函数，尽管它们存在初等函数的原函数，但是求这些函数的原函数要进行极为繁琐的计算，或原函数的形式极为复杂. 因此也就失去迅速简便求定积分的目的. 为此，要研究定积分的近似计算.

在实际问题中，经过观察或测量得到的数据常是区间上一串离散点的函数值. 计算此区间上"函数"的定积分也只能作近似计算.

由定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的定义，积分和 $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$ 就是定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的近似值. 一般来说，用积分和 $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$ 代替定积

分$\int_a^b f(x)dx$误差较大．为此，改造积分和的结构，既要减少计算量，又要提高精度，并易于掌握误差的界限．本节只介绍两种定积分的近似计算方法：梯形法和抛物线法

一、梯形法

从几何意义上说，梯形法是用曲线上相邻两点的弦近似代替小弧，近似计算定积分的方法．

设函数 $f(x)$在$[a,b]$可积，将区间$[a,b]$ n 等分，分点是

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

其中
$$x_k-x_{k-1}=h=\frac{b-a}{n},\quad k=1,2,\cdots,n.$$

各分点的纵坐标是：$f(x_k)=y_k,\quad k=0,1,2,\cdots,n.$

连接曲线上相邻两点$(x_{k-1},\ y_{k-1})$与$(x_k,\ y_k)$，得到 n 个梯形(如图 8.30)．第 k 个梯形的面积是

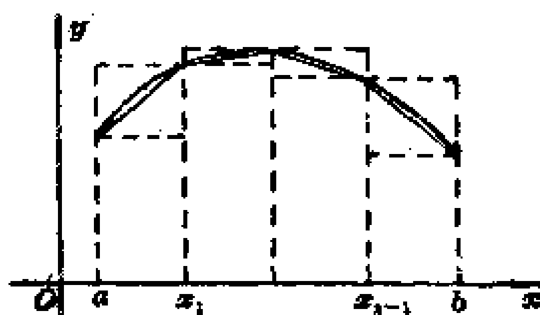


图 8.30

$$\frac{1}{2}(y_{k-1}+y_k)h,\ k=1,2,\cdots,n.$$

设 n 个梯形面积之和是

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(y_{k-1}+y_k)\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{2n}\sum_{k=1}^{n}(y_{k-1}+y_k)$$

$$=\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}y_k\right).$$

于是，
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}y_k\right) \quad (1)$$

(1)式是近似计算定积分的梯形法公式.

若函数 $f(x)$ 在区间$[a, b]$存在连续的二阶导数，且 $\forall x\in [a,b]$，有$|f''(x)|\leqslant M$，则公式(1)的误差不超过
$$\frac{(b-a)^3}{12n^2}M.$$

事实上，在区间$[x_{k-1}, x_k]$讨论定积分($k=1,2,\cdots,n$)
$$\begin{aligned}
\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)d(x-x_{k-1})\\
&= f(x)(x-x_{k-1})\Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_{k-1})df(x)\\
&= f(x_k)(x_k-x_{k-1}) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)(x-x_{k-1})dx\\
&= y_k h - \frac{1}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)d(x-x_{k-1})^2\\
&= y_k h - \frac{1}{2}\left[f'(x)(x-x_{k-1})^2\Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_{k-1})^2 df'(x)\right]\\
&= y_k h - \frac{1}{2}f'(x_k)h^2 + \frac{1}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x)(x-x_{k-1})^2dx. \quad (2)
\end{aligned}$$
$$\left(h = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}\right)$$

同样方法，有
$$\begin{aligned}
\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)d(x-x_k)\\
&= y_{k-1}h + \frac{1}{2}f'(x_{k-1})h^2 + \frac{1}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x)(x-x_k)^2dx. \quad (3)
\end{aligned}$$

将(2)式与(3)式等号两端相加，并除以 2，有
$$\begin{aligned}
\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \frac{y_{k-1}+y_k}{2}h + \frac{1}{4}[f'(x_{k-1})-f'(x_k)]h^2\\
+\frac{1}{4}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x)[(x-x_{k-1})^2+(x-x_k)^2]dx
\end{aligned}$$

$$=\frac{y_{k-1}+y_k}{2}h-\frac{1}{4}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f''(x)h^2dx$$

$$+\frac{1}{4}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f''(x)[(x-x_{k-1})^2+(x-x_k)^2]dx$$

$$=\frac{y_{k-1}+y_k}{2}h+\frac{1}{4}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f''(x)[(x-x_{k-1})^2+(x-x_k)^2-(x_k-x_{k-1})^2]dx$$

$$=\frac{y_{k-1}+y_k}{2}h+\frac{1}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f''(x)(x-x_{k-1})(x-x_k)dx$$

$$=\frac{y_{k-1}+y_k}{2}h+\frac{1}{2}f''(\xi_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_{k-1})(x-x_k)dx$$

$$(x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k)$$

$$=\frac{y_{k-1}+y_k}{2}h-\frac{1}{12}f''(\xi_k)(x_k-x_{k-1})^3$$

$$=\frac{y_{k-1}+y_k}{2}\,\frac{b-a}{n}-\frac{1}{12}f''(\xi_k)\left(\frac{b-a}{n}\right)^3.\quad k=1,2,\cdots,n.$$

对$k=1,2,\cdots,n$相加，有

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_{k-1}+y_k}{2}\,\frac{b-a}{n}-\frac{1}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3\sum_{k=1}^{n}f''(\xi_k)$$

$$=\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}y_k\right)-\frac{(b-a)^3}{12n^2}\,\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}f''(\xi_k)}{n},$$

$$=\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}y_k\right)-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi).\quad a\leqslant\xi\leqslant b$$

或 $$\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}y_k\right)\right|=\left|-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi)\right|$$

$$\leqslant\frac{(b-a)^3}{12n^2}M,$$

即公式(1)的误差不超过 $\frac{(b-a)^3}{12n^2}M$. □

由此可知，用梯形法公式(1)近似计算定积分，如果给定的误差限是 $\delta>0$，即要

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2}M\leqslant\delta,$$

只需等分$[a, b]$的小区间个数 $n>\sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\delta}M}$即可.

例 1. 应用梯形法公式(1)近似计算 $\ln 5=\int_1^5\frac{dx}{x}$.

解 将区间[1, 5]8 等分，$\frac{b-a}{n}=\frac{5-1}{8}=0.5=\frac{1}{2}$. 分点是

$$1,\ 1.5,\ 2,\ 2.5,\ 3,\ 3.5,\ 4,\ 4.5,\ 5.$$

函数$\frac{1}{x}$在分点的值分别是:

$x=$	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$\frac{1}{x}=$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{5}$

由公式(1)，有

$$\ln 5=\int_1^5\frac{dx}{x}\approx\frac{1}{2}\left(\frac{1+\frac{1}{5}}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+\frac{2}{7}+\frac{1}{4}+\frac{2}{9}\right)$$
$$\approx 1.63.$$

例 2. 应用梯形法公式(1)近似计算定积分$\int_1^5\sqrt[3]{2+x^2}\,dx$.

解 将区间[1, 5]4 等分，$\frac{b-a}{n}=\frac{5-1}{4}=1$. 分点是

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

函数$\sqrt[3]{2+x^2}$在分点的值分别是:

$x=$	1	2	3	4	5
$\sqrt[3]{2+x^2}=$	1.442	1.817	2.224	2.621	3.000

由公式(1)，有

$$\int_1^5 \sqrt[3]{2+x^2}\,dx \approx \frac{1}{2}(3+1.442)+1.817+2.224+2.621$$
$$=8.883.$$

二、抛物线法

抛物线法是用通过曲线上相邻三点的抛物线近似代替小弧计算定积分的方法.

抛物线的一般形式是

$$y=\alpha x^2+\beta x+\gamma,$$

其中 α, β, γ 是常数. 已知通过平面上的三点可唯一确定一条抛物线. 抛物线在区间$[c-h, c+h]$的积分，有公式

$$\int_{c-h}^{c+h}(\alpha x^2-\beta x+\gamma)\,dx=\frac{h}{3}[f(c-h)+4f(c)+f(c+h)]. \tag{3}$$

事实上，
$$\int_{c-h}^{c+h}(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\,dx$$
$$=\left(\frac{\alpha}{3}x^3+\frac{\beta}{2}x^2+\gamma x\right)\Big|_{c-h}^{c+h}$$
$$=\frac{\alpha}{3}(6c^2h+2h^3)+2\beta ch+2\gamma h$$
$$=\frac{h}{3}[\alpha(c-h)^2+\beta(c-h)+\gamma$$
$$+4(\alpha c^2+\beta c+\gamma)+\alpha(c+h)^2+\beta(c+h)+\gamma]$$
$$=\frac{h}{3}[f(c-h)+4f(c)+f(c+h)].$$

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积. 将区间 $[a, b]$ 等分为 $2n$(偶数)个小区间,分点是

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{2n-1}<x_{2n}=b,$$

其中 $x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{2n}, k=1,2,\cdots,2n$. 设各分点的纵坐标是 $f(x_k)=y_k$, $k=1,2,\cdots,2n$.

在两个相邻小区间 $[x_{2k-2}, x_{2k-1}]$ 及 $[x_{2k-1}, x_{2k}]$ 上,用通过曲线上的三点:

(x_{2k-2}, y_{2k-2}), (x_{2k-1}, y_{2k-1}), (x_{2k}, y_{2k})

的抛物线 $y=\alpha_k x^2+\beta_k x+\gamma_k$ 代替在区间 $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ 上的曲线 $y=f(x)$ (如图 8.31).

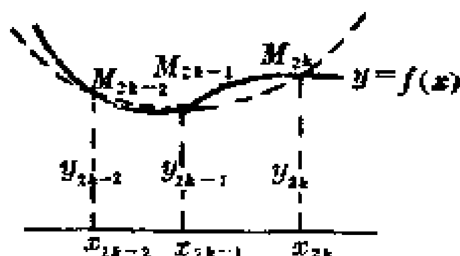


图 8.31

令 $c=x_{2k-1}, c-h=x_{2k-2}, c+h=x_{2k}$, 其中 $h=\frac{b-a}{2n}$. 于是,在区间 $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ 函数 $f(x)$ 的定积分近似等于抛物线 $y=\alpha_k x^2+\beta_k x+\gamma_k$ 的定积分. 由(3)式,得

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx \approx \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} (\alpha_k x^2+\beta_k x+\gamma_k)dx$$

$$=\frac{b-a}{6n}(y_{2k-2}+4y_{2k-1}+y_{2k}), \quad k=1,2,\cdots,n.$$

将 k 从 1 到 n 加起来,得

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\sum_{k=1}^{n}(y_{2k-2}+4y_{2k-1}+y_{2k})$$

$$=\frac{b-a}{6n}\left(y_0+y_{2n}+4\sum_{k=1}^{n}y_{2k-1}+2\sum_{k=1}^{n-1}y_{2k}\right). \tag{4}$$

(4)式就是近似计算定积分的抛物线法公式.

用抛物线法公式(4)近似计算定积分,其误差不超过

$$\frac{(b-a)^5}{2880n^4}M_1,$$

其中 M_1 是 $|f^{(4)}(x)|$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值．证明很繁，从略．

例 3. 应用抛物线法公式(4)近似计算 $\ln 5=\int_1^5\frac{dx}{x}$.

解 将区间[1,5] 8 等分，$n=4, h=0.5$．分点是

1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5.

函数 $\frac{1}{x}$ 在分点的值分别是

$x=$	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$\frac{1}{x}=$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{5}$

由公式(4)，有

$$\ln 5=\int_1^5\frac{dx}{x}\approx\frac{4}{24}\left[1+\frac{1}{5}+2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\right.$$

$$\left.+4\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\frac{2}{9}\right)\right]\approx 1.61.$$

这个结果比例 1 的结果精确些．ln5 精确到小数点后第三位的近似值是 1.609，用抛物线法公式(4)计算是 1.61，而用梯形法公式(1)计算却是 1.63．从估算误差也可看出，在等分的小区间个数相等的情况下，抛物线法公式(4)较梯形法公式(1)精确．

$$f(x)=\frac{1}{x},\quad 有\quad f''(x)=\frac{2}{x^3},\quad f^{(4)}(x)=\frac{24}{x^5}.$$

$$\forall x\in[1,5],\ 有\quad M=\max|f''(x)|=\max\left|\frac{2}{x^3}\right|=2.$$

$$M_1=\max|f^{(4)}(x)|=\max\left|\frac{24}{x^5}\right|=24.$$

梯形法的最大误差是 $\frac{4^3}{12\cdot 8^2}\cdot 2=\frac{1}{6}\approx 0.1667$.

抛物线法的最大误差是$\frac{4^5}{2880\cdot 4^4}\cdot 24=\frac{1}{30}\approx 0.0333.$

例 4. 某河宽 20 公尺，每隔 2 公尺测得河深如下表：

$x=$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	公尺
$y=$	0.2	0.5	0.9	1.1	1.3	1.7	2.1	1.5	1.1	0.6	0.2	公尺

求该河横截面的面积.

解 设该河横截面的面积是 A，由公式(4)($n=5$, $a=0$, $b=20$)，有

$$A\approx\frac{20}{30}[(0.2+0.2)+4(0.5+1.1+1.7+1.5+0.6)$$
$$+2(0.9+1.3+2.1+1.1)]\approx 21.9(\text{公尺})^2.$$

练习题 8.6

1. 应用梯形法公式近似计算下列定积分，并估算其误差：

(1) $\int_0^1\frac{dx}{1+x}$ $(n=8)$，　　(2) $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$ $(n=12)$，

2. 应用抛物线法公式近似计算下列定积分，并估算其误差：

(1) $\int_1^9\sqrt{x}\,dx$ $(n=4)$，

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx$ $(n=3)$，

附　　录

希腊字母表

字	母	汉语拼音	中文注音
A	α	alfa	阿尔法
B	β	bita	贝塔
Γ	γ	gama	伽马
Δ	δ	dêlta	德耳塔
E	ε	êpsilon	艾普西隆
Z	ζ	zita	截塔
H	η	yita	艾塔
Θ	θ	sita	西塔
I	ι	yota	约塔
K	κ	kapa	卡帕
Λ	λ	lamda	兰布达
M	μ	miu	米尤
N	ν	niu	纽
Ξ	ξ	ksai	克西
O	o	omikron	奥密克戎
Π	π	pai	派
P	ρ	rou	洛
Σ	σ	sigma	西格马
T	τ	tao	陶
Υ	υ	yupsilon	宇普西隆
Φ	ϕ	fai	斐
X	χ	kai	克黑
Ψ	ψ	psai	普西
Ω	ω	omiga	奥墨伽

练习题答案

练习题 1.1

1. $f(0)=2$，$f(2)=0$，$f(-2)=-4$，$f(1)=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

2. $\varphi(2)=1$，$\varphi(-2)=\frac{1}{16}$，$\varphi\left(\frac{5}{2}\right)=\sqrt{2}$，$\varphi(a)-\varphi(b)=\frac{2^a-2^b}{4}$，

$\varphi(a)\varphi(b)=\frac{2^{a+b}}{16}$，$\frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}=2^{a-b}$.

3. $F(2-h)=h^2+h+5$，$\frac{F(2+h)-F(2)}{h}=h+1$.

4. $\psi(0)=0$，$\psi(1)=a$，$\psi(t+1)=(t+1)a^{t+1}$，

$\psi(t+1)+1=(t+1)a^{t+1}+1$，$\psi\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t}a^{\frac{1}{t}}$，$\frac{1}{\psi(t)}=\frac{1}{ta^t}$.

5. (1) $\left[-\frac{4}{3},\ +\infty\right)$. (2) $[-1,2]$. (3) $(-1,1]$. (4) $[-1,0]$.

(5) $(-\infty,0)$. (6) $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{4}{3}\right]$.

(7) $\left(\frac{1}{2k+1},\ \frac{1}{2k}\right)$与$\left(-\frac{1}{2k+1},\ -\frac{1}{2k+2}\right)$ $(k=0,1,2,\cdots)$，当 $k=0$ 时，

$\frac{1}{2k}=+\infty$. (8) $(0,4)$与$(4,+\infty)$. (9) $(-\infty,0)$与$(0,+\infty)$.

(10) $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

6. L 与 A 之间的对应是单值对应，是函数. l 与 S 之间的对应不是单值对应，不是函数.

7. (1) 不相等. (2) 不相等. (3) 不相等. (4) 不相等. 都是因为两个函数的定义域不相同.

11. $\left\{\frac{1}{4^{n-1}}\right\}$.

练习题 1.2

3. $F_1(x)=a^x+a^{-x}$, $F_2(x)=a^x-a^{-x}$; $F_1(x)=(1+x)^n+(1-x)^n$, $F_2(x)=(1+x)^n-(1-x)^n$.

4. (1) 奇. (2) 偶. (3) 奇. (4) 偶. (5) 奇. (6) 奇. (7) 奇. (8) 偶. (9) 偶.

6. (1) 是. $l=\pi$. (2) 非. (3) 是. $l=\frac{2\pi}{\omega}$. (4) 是. $l=\frac{2}{5}$. (5) 是. $l=\pi$. (6) 是. 没有最小的正周期. (7) 是. $l=2\pi$. (8) 是. $l=20\pi$.

练习题 1.3

1. (1) $-\sqrt{1-x^2}$, $x\in[0, 1]$. (2) $\lg x-2, x\in(0,+\infty)$. (3) $\frac{1}{2}(e^x-1)$, $x\in\mathbb{R}$. (4) $\frac{b-dx}{cx-a}$, $x\in\left(\mathbb{R}-\left\{\frac{a}{c}\right\}\right)$. (5) $\ln(x+\sqrt{1+x^2}), x\in\mathbb{R}$.

(6) $$y=\begin{cases}x, & x\in(-\infty, 1),\\ \sqrt{x}, & x\in[1,16],\\ \log_2 x, & x\in(16,+\infty).\end{cases}$$

3. (1) $(x+2)^3$. (2) $\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+1}=|\sec x|$. (3) $\begin{cases}2, & x\leqslant 0,\\ x^6, & x>0.\end{cases}$

4. $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{1+x}$, $g\left(\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{x^2}$. $f[f(x)]=\frac{x+1}{x+2}$. $g[g(x)]=2+2x^2+x^4$.

$f[g(x)]=\frac{1}{2+x^2}$. $g[f(x)]=\frac{2+2x+x^2}{(1+x)^2}$. $g[f(1)]=\frac{5}{4}$.

$f[g(2)]=\frac{1}{6}$. $f\{f[f(1)]\}=\frac{3}{5}$.

6. (1) $y=\sqrt[3]{u}, u=\arcsin v, v=a^x$. (2) $y=u^3, u=\sin v$, $v=\ln w$, $w=x+1$. (3) $y=\ln u$, $u=\cos v$, $v=\sqrt[3]{w}$, $w=\arccos x$.

(4) $y=a^u$, $u=\sin v$, $v=3x^2-1$. (5) $y=\ln u$, $u=v^2$, $v=\ln w$, $w=t^3$, $t=\ln x$.

7. x^2-x+1.

9. x^2-2.

10. $\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

练习题 2.1

1. (1) 等价. (2) 等价. (3) 不等价. (4) 不等价. (5) 等价.
2. (1) 发散. (2) 收敛. (3) 收敛. (4) 收敛. (5) 收敛.

练习题 2.2

11. (1) 500. (2) $-\frac{1}{2}$. (3) 0. (4) 0. (5) $\frac{1-b}{1-a}$. (6) 1. (7) 3.

    (8) $\frac{4}{3}$. (9) e^5. (10) e^2.

练习题 2.4

12. (1) $\frac{1}{2}$. (2) 0. (3) $\frac{1}{8}$. (4) $3x^2$. (5) -1. (6) $\frac{1}{2}$. (7) $\frac{4}{3}$.

    (8) 0. (9) $\frac{ad+bc}{2\sqrt{ac}}$. (10) $\frac{m}{n}$.

13. (1) $\frac{1}{8}$. (2) 3. (3) 2. (4) $\cos x$. (5) 1.

    (6) e^{-1}. (7) e. (8) e. (9) e^2. (10) e^{-5}.

15. (1) $a=1$, $b=-1$. (2) $a=1$, $b=-\frac{1}{2}$. (3) $a=-\frac{15}{16}$, $b=-\frac{1}{4}$.

练习题 3.1

7. (1) -1 是第二类间断点. (2) $\pm\sqrt{2}$ 是第二类间断点.

   (3) 0 是可去间断点, $k\pi\ (k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 是第二类间断点.

   (4) 0 是可去间断点, ±1 是第二类间断点. (5) 0 是第一类间断点.

   (6) 0 是第二类间断点. (7) 0 是第二类间断点.

   (8) 0 是第一类间断点.

8. (1) 8. (2) 2. (3) -1. (4) 1.

练习题 3.2

4. (1) $\frac{1}{\sqrt{2a}}$. (2) $-\frac{1}{16}$. (3) $\frac{a+b}{2}$. (4) $\frac{1}{2}$. (5) $\sqrt{e}$.

   (6) 1. (7) $\frac{1}{5}$. (8) $\frac{\pi}{3}$.

11. (1) 0. (2) $e^{\operatorname{ctg} a}$ $(a \neq k\pi,\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots)$. (3) e. (4) e^2.

   (5) $a^a \ln \frac{a}{e}$. (6) $a^x \ln^2 a$. (7) 2. (8) $\sqrt{ab}$.

练习题 4.1

1. (1) 8; −10. (2) $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{2}$. (3) 5; 1. (4) 1; −1. (5) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$. (6) 4; 0. (7) 上确界不存在; 0. (8) 1; −1.
2. (1) $\varnothing$. (2) $\{0\}$. (3) $\{1\}$. (4) $\{-1,1\}$. (5) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

   (6) $[0,4]$. (7) $[0,+\infty)$. (8) $[-1,1]$.

练习题 5.1

1. 从 $t=2$ 到 $t=2+\Delta t$ 的平均速度是 $14+3\Delta t$. 在 $t=2$ 的瞬时速度是 14.
2. (1) 切线方程 $x+y=2$, 法线方程 $y=x$. (2) 切线方程 $12x-y=16$. 法线方程 $x+12y=98$. (3) 切线方程 $x+y+2=0$, 法线方程是 $x=y$.
3. $\theta_1 = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, $\theta_2 = \pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.
4. (1) $-\sin x$. (2) $-\frac{1}{(1+x)^2}$. (3) $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$. (4) $3\cos 3x$.
5. (1) $f'(0)$. (2) $f'(a)$.
6. $f'_+(c)=2c$. 当 $a=2c, b=-c^2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 c 可导.
7. (1) $f'_+(0)=0$, $f'_-(0)=1$. (2) $\varphi'_+(0)=1$, $\varphi'_-(0)=-1$.

13. $e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$.

14. (1) $f'(a)$. (2) $f'(a)$. (3) $2f'(a)$. (4) $\frac{1}{2}f'(a)$.

   (5) $(\alpha-\beta)f'(a)$.

练习题 5.2

1. (1) $4x^3+6x$, (2) $21x^{\frac{5}{2}}+10x^{\frac{3}{2}}+2$. (3) $4x(1+3x+10x^3)$.

(4) $-\dfrac{2a}{(a+x)^2}$. (5) $\dfrac{x^4-2x^3-6x^2-2x+1}{(x^2-x-2)^2}$.

(6) $x\cos x$. (7) $\operatorname{tg}x+x\sec^2x+\csc^2x$.

(8) $\dfrac{1}{1+\cos x}$. (9) $\dfrac{-2}{x(1+\ln x)^2}$. (10) $\dfrac{1-x\ln4}{4^x}$.

(11) $\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{x}{1+x^2}-\operatorname{arctg}x\right)$. (12) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{arcctg}x-\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$.

(13) $2x\arccos x-\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. (14) $10^x(1+x\ln10)$.

(15) $\sin x\cdot\ln x+x\cos x\cdot\ln x+\sin x$.

2. (1) $8x(2x^2-3)$. (2) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

(3) $\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$. (4) $\dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$.

(5) $\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$.

(6) $\dfrac{a}{\cos^2(ax+b)}$.

(7) $2\cos2x\cos3x-3\sin2x\sin3x$. (8) $-10\operatorname{ctg}5x\csc^25x$.

(9) $a\sin^2\dfrac{x}{3}\cos\dfrac{x}{3}$. (10) $2a\sin^3\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$.

(11) $\dfrac{2}{\sin2x}$. (12) $\dfrac{1}{\cos x}$.

(13) $2x\operatorname{ctg}x(\operatorname{ctg}x-x\csc^2x)$. (14) $\dfrac{2x}{(x^2+1)\ln a}$.

(15) $\dfrac{2x-\cos x}{(x^2-\sin x)\ln3}$. (16) $\dfrac{4x}{1-x^4}$.

(17) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. (18) $\dfrac{1}{x\ln x}$.

(19) $-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. (20) $\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}$.

(21) $\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$.　　(22) $4e^{4x+5}$.

(23) $2(x+1)7^{x^2+2x}\ln 7$.

(24) $\dfrac{a}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$.　　(25) $\dfrac{1}{1+e^x}$.　　(26) $\cos x e^{\sin x}$.

(27) $\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$　　(28) $\dfrac{2x}{1+(x^2+1)^2}$.　　(29) $\dfrac{2}{1+x^2}$.

(30) $\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$.　　(31) $2\sqrt{a^2-x^2}$　　(32) $\dfrac{1}{2}$.

(33) $\dfrac{\cos x}{|\cos x|}=\begin{cases}1, & x\text{ 在一、四象限},\\ -1, & x\text{ 在二、三象限}.\end{cases}$　　(34) $\dfrac{4}{5+3\cos x}$.

(35) $\dfrac{2a^3}{x^4-a^4}$.　　(36) $\dfrac{1}{x^3+1}$.

(37) $x^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{1-\ln x}{x^2}\right)$.　　(38) $e^{x^x}(1+\ln x)x^x$.

(39) $(\sin x)^x(\ln\sin x+x\operatorname{ctg}x)$.

(40) $(\sin x)^{\cos x}[\cos x\operatorname{ctg}x-\sin x\cdot\ln\sin x]$.

3. $F'(0)=-\dfrac{1}{4}$, $F'(-1)=-\dfrac{1}{2}$, $F'(1)=-\dfrac{11}{18}$

10. (1) $\dfrac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}$, $(f^2(x)+g^2(x)\neq 0)$.

(2) $\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{f^2(x)+g^2(x)}$, $(f^2(x)+g^2(x)\neq 0)$.

(3) $\sqrt[g(x)]{f(x)}\left\{\dfrac{1}{g(x)}\dfrac{f'(x)}{f(x)}-\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}\ln f(x)\right\}$.

(4) $\dfrac{g'(x)}{g(x)}\dfrac{1}{\ln f(x)}-\dfrac{f'(x)}{f(x)}\dfrac{\ln g(x)}{\ln^2 f(x)}$.

练习题　5.3

1. (1) $\dfrac{2p}{y}$.　(2) $-\dfrac{b^2x}{a^2y}$.　(3) $\dfrac{2a}{3(1-y^2)}$.　(4) $-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$.

(5) $\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$.　(6) $-\dfrac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$.　(7) $\dfrac{1+\sqrt{x-y}}{1-4\sqrt{x-y}}$.

(8) $\dfrac{1}{x\cos(xy)}-\dfrac{y}{x}$.

2. (1) $x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x^2}\right)$.

(2) $\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}\left(\frac{2-x}{x(1-x)}+\frac{x-9}{3(9-x^2)}\right)$.

(3) $(x+\sqrt{1+x^2})^n\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}$.

(4) $(x-a_1)^{a_1}(x-a_2)^{a_2}\cdots(x-a_n)^{a_n}\left(\frac{a_1}{x-a_1}+\frac{a_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{x-a_n}\right)$.

3. (1) $-\frac{1}{4}$. (2) $-\frac{2}{3}$. (3) $\frac{4}{3}$

4. (1) $-2\left(\frac{t}{t+1}\right)$. (2) $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$. (3) $-\frac{b}{a}$. (4) $-\frac{b}{a}\operatorname{tg}t$.

5. $y-x=2a-\frac{a\pi}{2}$.

7. $\frac{f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta}$.

练习题 5.4

1. (1) $(1-x+x^2-x^3)dx$. (2) $(2x\sin x+x^2\cos x)dx$.

(3) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}dx$. (4) $\frac{2}{\sin 2x}dx$.

(5) $e^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)dx$.

(6) $$\frac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, & x>0,\\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, & x<0.\end{cases}$$

2. (1) $\Delta x+\Delta x^2$; dx. (2) $10\Delta x+6(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$; $10dx$.

(3) $\sqrt{1+\Delta x}-1$; $\frac{1}{2}dx$.

4. (1) 2.9907. (2) 1.938. (3) 1.9954.

5. (1) 1.007. (2) 0.4849. (3) −0.8747.

练习题 5.5

1. (1) $-(a^2\sin ax+b^2\cos bx)$.

(2) $\frac{1}{4x}(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}})-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}})$.

(3) $\frac{2(x^2-4x+7)}{(x-1)^5}$. (4) $-2\frac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}$.

2. (1) $-\frac{r^2}{y^3}$. (2) $-\frac{p^2}{y^3}$.

(3) $\frac{6(x^2-xy+y^2)}{(x-2y)^3}$. (4) $\frac{2x^2y}{(1+y^2)^3}[3(1+y^2)^2+2x^4(1-y^2)]$.

3. (1) $(x+n)e^x$. (2) $(-1)^n\cdot 2\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$.

(3) $x\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)-n\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

(4) $(-1)^n e^{-x}[x^2-2(n-1)x+(n-1)(n-2)]$.

6. $z''=g''[f(x)][f'(x)]^2-g'[f(x)]\cdot f''(x)$.

8. (1) $\frac{3}{4(1-t)}$. (2) $-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$.

练习题 6.2

1. (1) 2. (2) 2. (3) $-\frac{1}{6}$. (4) $-\frac{1}{8}$. (5) 1. (6) $\frac{3\pi}{2}$. (7) 1.

(8) $\frac{2}{\pi}$. (9) 1. (10) $-\frac{1}{2}$. (11) $\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$. (12) 1. (13) 1.

(14) 1. (15) $\frac{1}{e}$.

3. $a=-3$, $b=\frac{9}{2}$.

4. $c=\ln 2$.

5. (1) 0. (2) 1.

练习题 6.3

1. (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right.$

$\left.+\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4+\frac{1}{5!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5-\frac{1}{6!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^6\right]+R_6$.

(2) $e^{-a}\left[1-(x-a)+\frac{1}{2!}(x-a)^2-\frac{1}{3!}(x-a)^3+\frac{1}{4!}(x-a)^4\right.$

$$\left.-\frac{1}{5!}(x-a)^5+\frac{1}{6!}(x-a)^6\right]+R_6.$$

(3) $-5+9(x+1)-11(x+1)^2+10(x+1)^3-5(x+1)^4+(x+1)^5.$

$R_n=0$，当 $n\geqslant 5$.

(4) $1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3-\frac{5}{128}(x-1)^4+\frac{7}{256}(x-1)^5$

$$-\frac{21}{1024}(x-1)^6+R_6.$$

2. (1) $a+\frac{x}{ma^{m-1}}-\frac{(m-1)x^2}{2m^2a^{2m-1}}+o(x^2).$

(2) $1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^5).$

(3) $1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+o(x^4).$ (4) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5).$

4. (1) 3.1072. (2) 1.64872. (3) 0.182321.

练习题 6.4

1. (1)

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	3	↘	−1	↗

极大值 $f(-1)=3$，极小值 $f(1)=-1$.

(2)

x	$(-\infty,-1)$	-1	$\left(-1,\frac{9}{7}\right)$	$\frac{9}{7}$	$\left(\frac{9}{7},3\right)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗		↗

极大值 $f(-1)=0$，极小值 $f\left(\frac{9}{7}\right)=-\frac{16^4\cdot 12^3}{7^7}$.

(3)

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘

极小值$f(-1)=-\frac{1}{2}$，极大值$f(1)=\frac{1}{2}$.

(4) 在$\left(k\pi,\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)f(x)$严格增加.

在$\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi,k\pi\right)f(x)$严格减少.

极大值$f\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]=1$.

极小值 $f(k\pi)=0$, $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

(5)

x	$(0,e)$	e	$(e,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘

极大值$f(e)=\frac{1}{e}$.

(6) 在$\left(\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{4}+(k+1)\pi\right)$，当$k$为奇数，$f(x)$严格增加；当$k$为偶数$f(x)$严格减少. 当$k$为偶数，极大值

$f\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)}$;

当k为奇数. 极小值

$f\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)}$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

4. $a=2$, $b=-3$, $c=-12$, $d=1$.

6 (1) $f(-1)=\frac{1}{2}$; $f(5)=32$. (2) $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{5(1-\sqrt{5})}{2}$; $f(-2)=15$. (3) $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0$; $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. (4) $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$; $f(e)=e$. (5) $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2e}}$; $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2e}}$.

7. 腰$\frac{2}{3}l$;最大面积 $\frac{l^2}{3\sqrt{3}}$

8. 高 $h=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, 底半径 $r=\frac{h}{2}$, 表面积$S=\sqrt[3]{54\pi V^2}$.

9. 高 $h=\frac{2a}{\sqrt{3}}$, 底半径 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}a$,体积 $V=\frac{4}{3\sqrt{3}}\pi a^3$.

10. 距A为15公里处.

11.

(1)

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$f''(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	严凹	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	严凸	0	严凹	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	严凸

拐点是$\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$、$(0,0)$与$\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(2) 在$((2k-1)\pi, 2k\pi)$函数$f(x)$严凸, 在$(2k\pi, (2k+1)\pi)$函数$f(x)$严凹;拐点是$(k\pi, k\pi)$, $k=0, \pm1, \pm2, \cdots$.

(3)

x	$(0,e)$	e	$(e,+\infty)$
$f''(x)$	+	0	−
$f(x)$	严凸	1	严凹

拐点是$(e,1)$.

(4) 在$\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right)$，当$k$为偶数，$f(x)$是严凸；当$k$为奇数，$f(x)$是严凹；拐点是$\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\ (-1)^k e^{-\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}\right)$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

15. (1) $x=-1,\ x=5,\ y=0$　　(2) $x=-1,\ x-2y=2$.

(3) $y=1,\ x=1,\ x=-1,$　　(4) $y=x,\ x=0$

(5) $y=x+\frac{1}{e},\quad x=-\frac{1}{e}$

18. $\sqrt[3]{3}$最大.

19. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$.

20. $\lim\limits_{p\to+\infty} g(p)=4e^{-2}$.

练习题 7.1

1. (1) $\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+x+C$.　(2) $\frac{x^4}{108}+\frac{x^2}{3}-\frac{4}{x^2}+4\ln|x|+C$.

(3) $\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C$.　(4) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+x+C$.　(5) $\frac{4^x}{\ln4}+2\frac{6^x}{\ln6}+\frac{9^x}{\ln9}+C$.

(6) $\frac{3^xe^x}{\ln3+1}+C$. (7) $2x-\frac{5}{\ln2-\ln3}\left(\frac{2}{3}\right)^x+C$. (8) $\frac{x^3}{3}-x+\mathrm{arctg}\,x+C$.

(9) $\ln|x|+\mathrm{arctg}\,x+C$.　(10) $-2x-\mathrm{ctg}\,x+C$.　(11) $\mathrm{tg}\,x-x+C$.

(12) $\frac{e^xa^x}{\ln a+1}-\arcsin x+C$.

2. (1) x^2+1.　(2) $4x^2-5x-x^3+5$.　(3) $x+\cos x-\frac{\pi}{2}$.

3. $f(x)=x^2-2x+1$.

4. $f(x)=-x^4+7$.

练习题 7.2

1. (1) $x\sin x+\cos x+C$.　　(2) $\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C$.

(3) $-x-(1-x)\ln(1-x)+C$.　　(4) $\frac{x^4}{16}(4\ln x-1)+C$.

(5) $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C.$ (6) $x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C.$

(7) $\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C.$ (8) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C.$

2. (1) $\frac{1}{5}e^{5x}+C.$ (2) $\frac{1}{3}\sin 3x+C.$

(3) $-\frac{1}{3}\ln|4-3x|+C.$ (4) $-\frac{1}{5}\cos(5x+1)+C.$

(5) $\frac{\operatorname{tg}7x}{7}+C.$ (6) $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C.$

(7) $-\frac{\cos^4 x}{4}+C.$

(8) $\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C.$ (9) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C.$

(10) $-\frac{1}{\sin x}+C.$ (11) $\frac{1}{2\cos^2 x}+C.$ (12) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+C.$

(13) $2\sqrt{\operatorname{tg}x-1}+C.$

(14) $2\sqrt{1+\sin^2 x}+C.$ (15) $\frac{2}{3}(\operatorname{tg}x+1)^{\frac{3}{2}}+C.$

(16) $-\frac{1}{12(2+3\sin 2x)^2}+C.$ (17) $\frac{1}{\sqrt[3]{\cos 3x}}+C.$

(18) $\frac{\ln^3 x}{3}+C.$ (19) $\frac{1}{2}\arcsin^2 x+C.$ (20) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+C.$

(21) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$ (22) $\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3|+C.$

(23) $\frac{1}{2}\ln(2\sin x+3)+C.$ (24) $-\frac{1}{2\ln^2 x}+C.$ (25) $\frac{(x^2+1)^5}{5}+C.$

(26) $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-\operatorname{tg}x+x+C.$ (27) $e^{\sin x}+C.$

(28) $\frac{1}{4}\ln(3+4e^x)+C.$ (29) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(\sqrt{3}x)+C.$

(30) $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x}{2}+C.$ (31) $\frac{1}{2}\arcsin x^2+C.$ (32) $\frac{1}{2a^2}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{a^2}+C.$

(33) $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x}{a}\right)+C.$ (34) $\arcsin(\ln x)+C.$

(35) $\frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}+C.$

3. (1) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.　　(2) $-\frac{e^{-2x}}{2}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)+C$.

(3) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$.

(4) $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$.

(5) $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$.

(6) $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C$.

(7) $-\frac{x}{2}+\frac{1+x^2}{2}\operatorname{arctg}x+C$.

(8) $-\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+C$.

4. (1) $-\arcsin\frac{1}{|x|}+C$.　　(2) $-\ln(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}})+C$.

(3) $\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2+C$.　　(4) $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\cos 2x)+C$.

(5) $x-\ln(1+e^x)+C$.　　(6) $-\frac{3}{140}(9+12x+14x^2)(1-x)^{\frac{4}{3}}+C$.

(7) $\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\sin^2 x+\frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^3 x}+C$.

(8) $x-\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C$.

(9) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+1}\right)+C$.

(10) $(1+\sqrt{1+x^2})\ln(1+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$.

(11) $\frac{1}{2}[(1+x)|1+x|+(1-x)|1-x|]+C$.

(12) 若 $x<0$, e^x-1+C; 若 $x\geqslant 0$, $1-e^{-x}+C$.

练习题 7.3

(1) $x+3\ln|x-3|-3\ln|x-2|+C$.

(2) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}\right|+C$.　　(3) $\frac{1}{1+x}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$.

(4) $\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^{16}}{(2x-1)^7(2x+1)^9}\right|+C$.

(5) $x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$

(6) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}+C.$

(7) $\ln\frac{x^2+4}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$

(8) $\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)}+\operatorname{arctg}(x+1)+C.$

(9) $\frac{3x-17}{2(x^2-4x+5)}+\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)+\frac{15}{2}\operatorname{arctg}(x-2)+C.$

(10) $\ln|x+1|+\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{5}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

$-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+C.$

练习题 7.4

1\. (1) $\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{3}}-6x^{\frac{1}{6}}+3\ln(1+x^{\frac{1}{3}})$

$+6\operatorname{arctg}x^{\frac{1}{6}}+C.$

(2) $12\left[\frac{1}{9}x^{\frac{3}{4}}-\frac{1}{7}x^{\frac{7}{12}}+\frac{1}{5}x^{\frac{5}{12}}-\frac{1}{3}x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{12}}-\operatorname{arctg}(x^{\frac{1}{12}})\right]+C.$

(3) $-\frac{3}{5}\sqrt[3]{(3-x)^2}\left(\frac{19}{2}+x\right)+C.$

(4) $\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right|-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C.$

(5) $\sqrt{3x^2-7x-6}+\frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\left(x-\frac{7}{6}+\sqrt{x^2-\frac{7}{3}x-2}\right)+C.$

(6) $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{5x-2}{3}+C.$ (7) $-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}+C.$

(8) $-\frac{1}{3}\sqrt{1-2x-3x^2}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x+1}{2}+C.$

(9) $-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+\frac{3}{2}\arcsin 2x+C.$

(10) $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3}+\frac{5}{4}\ln|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}|+C.$

(11) $\frac{3}{2}\sqrt{x(2x-1)}+\frac{23}{4\sqrt{2}}\ln\left|4x-1+\sqrt{8x(2x-1)}\right|+C.$

(12) $\sqrt{x^2+2x}+\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right|+C.$

(13) $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C.$

(14) $\ln\left|\frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x^2}\right|+C.$ (15) $-\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}}+C.$

2. (1) $-\frac{1}{5}\cos^6 x+\frac{1}{7}\cos^7 x+C.$ (2) $\frac{3}{8}x-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C.$

(3) $\frac{1}{128}\left(3x-\sin 4x+\frac{\sin 8x}{8}\right)+C.$ (4) $\frac{\mathrm{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C.$

(5) $-\frac{\mathrm{ctg}^2 x}{2}-\ln|\sin x|+C.$ (6) $\frac{\mathrm{tg}^7 x}{7}+\frac{\mathrm{tg}^5 x}{5}+C.$

(7) $\frac{\mathrm{tg}^7 x}{7}+\frac{3\mathrm{tg}^5 x}{5}+\mathrm{tg}^3 x+\mathrm{tg}\, x+C.$

(8) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\cos^4 x}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^{10} x}-\frac{3}{16}\sqrt[3]{\cos^{16} x}+C.$

(9) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^5 x}+\frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}}+C.$ (10) $-\frac{\sin 4x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+C.$

(11) $\frac{\sin 11x}{22}+\frac{\sin 3x}{6}+C.$ (12) $-\frac{\cos x}{2}+\cos\frac{x}{2}+C.$

(13) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-2}{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1}\right|+C.$ (14) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left|2\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$

(15) $\frac{2}{1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}}+x+C.$ (16) $x-\mathrm{tg}\frac{x}{2}+C.$

(17) $\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-5}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+C.$ (18) $-x+2\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}\right|+C.$

练习题 8.4

1. (1) $\frac{1}{2}.$ (2) $\frac{1}{4}(b^4-a^4).$ (3) $\frac{1}{6}.$

2. (1) 24. (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3) $\frac{\pi}{8}$. (4) $\ln 2$.

(5) 1. (6) $\frac{5}{2}$. (7) $\frac{1}{3}$.

(8) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. (9) $2(2-\text{arctg}\,2)$. (10) $\frac{1}{3}(2-\ln 3)$.

(11) 1. (12) $\frac{\pi a^4}{16}$. (13) $a^2\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$.

(14) $\frac{1}{b^2-a^2}\ln\left|\frac{b}{a}\right|$. (15) $\frac{3\pi}{16}$.

3. (1) 0. (2) 0. (3) 0.

4. (1) $\ln 2$. (2) $\frac{\pi}{4}$. (3) $\frac{1}{p+1}$. (4) $\frac{4}{e}$.

10. (1) 1. (2) 0. (3) -1.

练习题 8.5

1. (1) 18. (2) $\sqrt{2}$. (3) $\frac{1}{6}$.

(4) $\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\right)a^2$. (5) $\frac{4}{3}a^3$. (6) $\frac{3}{8}\pi a^2$.

(7) $6\pi a^2$. (8) $\frac{8}{15}$. (9) $\frac{3}{2}\pi a^2$.

(10) $\frac{1}{2}\pi a^2$.

2. $\frac{9}{4}$.

3. (1) $\frac{13\sqrt{13}-8}{27}$. (2) $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

(3) $8a$. (4) $2\pi^2 a$.

(5) $a\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. (6) $\frac{3\pi a}{2}$.

4. $\frac{h}{6}[(2A+a)B+(A+2a)b]$.

5. $\frac{16}{3}a^3$.

6. (1) 7

7. (1) $\frac{62}{3}\pi$. (2) $\pi\left[\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}\right]$.

(3) $2\pi b^2+2\pi ab\,\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}$，其中 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

8. 绕 x 轴，$\frac{64}{3}\pi a^2$；绕 y 轴，$16\pi^2a^3$.

9. 0.5 千克米.

10. 1740 千克米.

14. $2.5\times10^6\pi$ 公斤米.

15. 1056 吨.

练习题 8.6

1. (1) 0.6941. (2) 0.8352.
2. (1) 17.332. (2) 1.3707.

目　录

第九章 级　　数

级数分为数值级数与函数级数. 函数级数是表示函数，特别是表示非初等函数的一个重要的数学工具. 例如，有的微分方程的解不是初等函数，但其解却可表为函数级数. 函数级数又是研究函数（初等函数与非初等函数）性质的一个重要手段. 因此，函数级数在自然科学、工程技术和数学本身都有广泛的应用. 数值级数是函数级数的特殊情况，它又是函数级数的基础. 本章首先讨论数值级数的基本理论.

§9.1. 数 值 级 数

一、收敛与发散概念

设有数列$\{u_n\}$，即

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots. \tag{1}$$

将数列(1)的项依次用加号连接起来，即

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots, \quad 或 \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{2}$$

称为**数值级数**，简称**级数**，其中 u_n 称为级数(2) 的**第n项**或**通项**.

级数(2)是无限多个数的和. 我们只会计算有限个数的和，不仅不会计算无限多个数的和，甚至都不知道何谓无限多个数的和. 因此，无限多个数的和是一个未知的新概念. 这个新概念也不是孤立的，它与我们已知的有限个数的和联系着. 不难想到，由有限个数的和转化到“无限多个数的和”应借助极限这个工具来完成.

设级数(2)前 n 项的和是 S_n，即

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n \quad 或 \quad S_n=\sum_{k=1}^{n} u_k,$$

称为级数(2)的 n 项**部分和**. 显然,对给定级数(2),其任意 n 项部分和 S_n 都是已知的. 于是,级数(2)对应着一个部分和数列$\{S_n\}$.

定义 若级数(2)的部分和数列$\{S_n\}$收敛,设

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k = S,$$

则称级数(2)**收敛**, S 是级数(2)的**和**,表为

$$S=\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots.$$

若部分和数列$\{S_n\}$**发散**,则称级数(2)**发散**. 此时级数(2)没有和.

定义 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,其和是 S,而 $S-S_n$ 表为 r_n,即

$$r_n = S-S_n=\sum_{k=1}^{\infty} u_k-\sum_{k=1}^{n} u_k = u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots,$$

称为收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 **n 项余和**,简称**余和**. 显然,有

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(S-S_n)=0.$$

由此可见,级数的敛散性(收敛与发散)是借助于它的部分和数列的敛散性定义的. 反之,数列的敛散性也可归结为级数的敛散性. 事实上,设有数列$\{S_n\}$. 令

$$a_1=S_1,\ a_2=S_2-S_1,\ \cdots,\ a_n=S_n-S_{n-1},\ n=2,3,\cdots.$$

显然,
$$S_n=S_1+(S_2-S_1)+\cdots+(S_n-S_{n-1})$$
$$=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

即数列$\{S_n\}$的敛散性可归结为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性.

因此，研究收敛级数及其和数只不过是研究收敛数列及其极限的一种新形式．因为级数是有限和的推广，有鲜明的直观性，所以，这种新形式不是收敛数列及其极限的简单重复，它使我们处理不同形式的极限具有更大的灵活性，并提供了新的工具.

例1. 讨论几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

的敛散性，其中 $a \neq 0$，r是公比.

解 1）当$|r| \neq 1$时，已知几何级数的 n 项部分和

$$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1-r}.$$

(i) 当$|r|<1$时，极限

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - ar^n}{1-r}^{①} = \frac{a}{1-r}.$$

因此，当$|r|<1$时，几何级数收敛，其和是$\frac{a}{1-r}$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}.$$

(ii) 当$|r|>1$时，极限

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - ar^n}{1-r} = \infty.$$

因此，当$|r|>1$时，几何级数发散.

2）当$|r|=1$时，有两种情况：

(i) 当 $r=1$时，几何级数是

$$a + a + a + \cdots + a + \cdots.$$

$$S_n = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\text{个}} = na.$$

① 见§2.1例4，当$|r|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}na=\infty \quad (a\neq 0),$$

即部分和数列$\{S_n\}$发散.

(ii) 当$r=-1$时，几何级数是

$$a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots.$$

$$S_n=\begin{cases}0, & n\text{ 是偶数},\\ a, & n\text{ 是奇数},\end{cases}$$

即部分和数列$\{S_n\}$发散.

于是，当$|r|=1$时，几何级数发散.

综上所述，几何级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$，当$|r|<1$时收敛，其和是$\frac{a}{1-r}$；当$|r|\geqslant 1$时发散.

例2. 证明，级数

$$\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$$

收敛，并求其和.

证明 通项u_n可改写为

$$u_n=\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right).$$

级数的 n 项部分和

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}\\&=\frac{1}{5}\left[\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\right]\\&=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right).\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)=\frac{1}{5}.$$

于是，级数收敛，其和是$\frac{1}{5}$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}.$$

例 3. 证明,调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

是发散的.

证明 设调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的 n 项部分和是 y_n, 即

$$y_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

由 §2.2 例 11,已知数列$\{y_n\}$发散,从而,调和级数发散.

二、收敛级数的性质

因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的收敛与它的部分和数列$\{S_n\}$的收敛是等价的,所以数列$\{S_n\}$收敛的必要充分条件也就是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的必要充分条件. 已知数列$\{S_n\}$的柯西收敛准则:

数列$\{S_n\}$收敛$\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N,\forall p\in\mathbf{N}$,有

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon.$$

设 S_n 是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的 n 项部分和,有

$$S_{n+p}-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}.$$

于是,有下面级数的柯西收敛准则:

定理 1.(柯西收敛准则) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛$\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}$,
$\forall n>N,\forall p\in\mathbf{N}$,有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon.$$

根据定理 1 的必要性，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，取 $p=1$，有 $|u_{n+1}|<\varepsilon$. 于是，有

推论 1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

推论 1 的等价命题是，若 $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

例如，级数

$$\frac{1}{101}+\frac{2}{201}+\frac{3}{301}+\cdots+\frac{n}{100\cdot n+1}+\cdots,$$

因为 $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{100\cdot n+1}=\frac{1}{100}\neq 0$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{100\cdot n+1}$ 发散.

注 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ 仅是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的必要条件而不是充分条件，即 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也可能发散. 例如，调和级数(见例 3)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,$$

有 $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 却是发散的.

定理 1 指出，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛等价于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的充分远(即 $n>N$)的任意片段(即 $\forall p$，$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}$) 的绝对值可以任

意小．由此可见，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性仅与级数充分远的任意片段有关，而与级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$前面有限多个项无关．于是，又有

推论 2. 若去掉、增添或改变级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的有限项，则不改变级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性．

例如，去掉发散级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的前面 100 项，而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{100+n}=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{100+n}+\cdots$$

仍是发散的．

根据数列极限运算定理可得级数运算定理：

定理 2. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，其和是S，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}cu_n=cu_1+cu_2+\cdots+cu_n+\cdots$$

也收敛，其和是cS，其中c是常数（$c\neq0$）．

证明 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}cu_n$的n项部分和分别是S_n与σ_n，有

$$\sigma_n=cu_1+cu_2+\cdots+cu_n=c(u_1+u_2+\cdots+u_n)=cS_n.$$

已知$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，有

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}cS_n=cS,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 收敛，其和是 cS. □

定理 2 的结果可改写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cS = c\sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

即收敛级数(无限个数的和)满足数(非零)的分配律.

定理 3. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，其和是 S，则不改变级数每项的位置，按原有的顺序将某些项结合在一起，构成的新级数

$$(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots$$
$$+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})+\cdots① \quad (3)$$

也收敛，其和也是 S.

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 n 项部分和是 S_n，新级数(3)的 k 项部分和是 σ_k，有

$$\begin{aligned}\sigma_k &= (u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots\\ &\quad +(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})\\ &= u_1+u_2+\cdots+u_{n_k}=S_{n_k},\end{aligned}$$

即新级数(3)的部分和数列 $\{\sigma_k\}$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 的子数列. 根据 §2.2 定理 9，已知 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\sigma_k = S$. 于是，新级数(3)收敛，其和也是 S. □

定理 3 说明：收敛级数(无限个数的和)满足结合律.

注 一个级数的项经过结合之后构成的新级数收敛，去掉括

① 每个括号内的和数作为新级数的一项，新级数的第 k 项是

$$(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k}).$$

号之后的级数不一定收敛. 例如，级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

收敛于 0，但去掉括号之后的级数

$$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$$

却是发散的.

定理 4. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛，其和分别是$A$与$B$，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)+\cdots$$

也收敛，其和是$A\pm B$.

证明 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$的$n$项部分和分别是$A_n$, B_n与C_n，有

$$C_n=\sum_{k=1}^{n}(u_k\pm v_k)=(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)$$

$$=(u_1+u_2+\cdots+u_n)\pm(v_1+v_2+\cdots+v_n)=A_n\pm B_n.$$

已知$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$与$\lim\limits_{n\to\infty}B_n=B$，有

$$\lim_{n\to\infty}C_n=\lim_{n\to\infty}A_n\pm\lim_{n\to\infty}B_n=A\pm B,$$

即级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$收敛，其和是$A\pm B$. □

练 习 题 9.1(一)

1. 求下列级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$,　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$,

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$,

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

2. 证明：m 是固定的自然数，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right).$$

3. 证明：若 $\lim_{n\to\infty} na_n=a>0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

4. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ (a_n\geqslant 0)$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛. 反之是否成立?

5. 证明：若 $\{a_n\}$ 是整数数列，且 $0\leqslant a_n\leqslant 9$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n 10^{-n}$ 收敛，其和是 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$.

6. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，且

$$a_n\leqslant c_n\leqslant b_n \qquad (n=1,2,\cdots),$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 也收敛.（提示：应用级数的柯西收敛准则.）

7. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 发散.

8. 证明：若级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k-1}$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}$ 都收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

*　　*　　*　　*

9. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.（提示：证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 的两个子数列 $\{S_{2n}\}$ 与 $\{S_{2n-1}\}$

有相同的极限)

10. 证明：若数列$\{na_n\}$收敛，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛.

11. 证明：若$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant\cdots\geqslant 0$，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

12. 证明：若将级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$依次若干项结合得新级数$\sum_{k=1}^{\infty}A_k$收敛，其中$A_k=a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k}$，且$A_k$的项有相同的符号，则原级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，且两个收敛级数的和相等.

三、同号级数

同号级数是指级数

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

的每一项u_n的符号都是非负或都是非正. 若$u_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$，称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$是**正项级数**；若$u_n\leqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$，称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$是**负项级数**.

将负项级数每项乘以-1，负项级数就变成了正项级数，根据定理2，负项级数与正项级数具有相同的敛散性. 于是，讨论负项级数的敛散性可以归结为讨论正项级数的敛散性. 因此，下面只讨论正项级数敛散性及其敛散性的判别法.

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$是正项级数，则此级数的部分和数列$\{S_n\}$单调增加，即

$$S_1\leqslant S_2\leqslant\cdots\leqslant S_n\leqslant\cdots.$$

根据§2.2公理，有判别正项级数收敛性的定理：

定理 5. 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛$\Longleftrightarrow$它的部分和数列$\{S_n\}$有上界

例 4. 证明：正项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

是收敛的.

证明 已知 $\frac{1}{n!}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\leqslant\frac{1}{\underbrace{1\cdot 2\cdot 2\cdots 2}_{n-1个}}=\frac{1}{2^{n-1}}$, $n=1,2,\cdots$.

从而，$\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$S_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

即部分和数列$\{S_n\}$有上界，则正项级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$收敛。

从上例看到，判别正项级数的敛散性，将其通项与某个已知的正项级数的通项进行比较，再应用定理 5 可判别其敛散性. 于是，有下面的正项级数比较判别法：

定理 6.（比较判别法） 有两个正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，且$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n\geqslant N$，有

$$u_n\leqslant cv_n,\qquad c\text{ 是正常数.}$$

1）若级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛；

2) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$也发散.

证明 根据定理 1 的推论 2，改变级数前面有限个项并不改变级数的敛散性. 因此，不妨设$\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$u_n\leqslant cv_n.$$

设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$的n项部分和分别是A_n与B_n，由上述不等式，有

$$\begin{aligned}A_n=u_1+u_2+\cdots+u_n&\leqslant cv_1+cv_2+\cdots+cv_n\\&=c(v_1+v_2+\cdots+v_n)=cB_n.\end{aligned}$$

1) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，根据定理 5，数列$\{B_n\}$有上界，从而数列$\{A_n\}$也有上界，再根据定理 5，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

2) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，根据定理 5，数列$\{A_n\}$无上界，从而数列$\{B_n\}$也无上界，再根据定理 5，级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散. □

例 5. 讨论正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

的敛散性，其中p是任意实数. 此级数称为**广义调和级数**，或**p-级数**.

解 广义调和级数的敛散性与数p有关，下面分三种情况讨论：

1) 当 $p=1$ 时，广义调和级数就是调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，已知调和级数发散，即广义调和级数发散。

2) 当 $p<1$ 时，$\forall n\in\mathbb{N}$，有

$$\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}.$$

已知调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，根据定理 6，广义调和级数也发散.

3) 当 $p>1$ 时，由练习题6.1第 9 题的(5)题，$\forall n\geqslant 2$，有

$$\frac{1}{n^p}<\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right].$$

于是，$\forall n\in\mathbb{N}$，有

$$\begin{aligned}S_n&=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\leqslant 1+\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{1^{p-1}}-\frac{1}{2^{p-1}}\right)\\&\quad+\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{2^{p-1}}-\frac{1}{3^{p-1}}\right)+\cdots+\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right)\\&=1+\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{1^{p-1}}-\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{2^{p-1}}-\frac{1}{3^{p-1}}+\cdots\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right)\\&=1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)<1+\frac{1}{p-1}=\frac{p}{p-1},\end{aligned}$$

即广义调和级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界，从而广义调和级数收敛.

综上所述，广义调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，当 $p\leqslant 1$ 时发散，当 $p>1$ 时收敛.

例 6. 判别下列正项级数的敛散性:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$.　　2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}-1}$.

解　1) $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}<\frac{1}{\sqrt{n(n^2+0)}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

已知广义调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ $(p=\frac{3}{2}>1)$ 收敛，根据定理 6，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ 也收敛。

2) $\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}-1}>\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}=\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$.

已知广义调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}(p=\frac{2}{3}<1)$ 发散，根据定理 6，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}-1}$ 也发散.

定理 6 有下面的简便的推论:

推论　有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(v_n\neq0)$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k\qquad(0\leqslant k\leqslant+\infty).$$

1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，且 $0\leqslant k<+\infty$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，且 $0<k\leqslant+\infty$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散.

证明　1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，且 $0\leqslant k<+\infty$，由已知条件，

$\exists\varepsilon_0>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n\geqslant N$，有

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-k\right|<\varepsilon_0 \quad \text{或} \quad \frac{u_n}{v_n}$$

即$\forall n\geqslant N$，有$u_n<(k+\varepsilon_0)v_n$，根据定理 6，

2) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散，且$0<k<+\infty$，由已知条件，

$\exists\varepsilon_0$：$0<\varepsilon_0<k$，$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n\geqslant N$，有

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-k\right|<\varepsilon_0 \quad \text{或} \quad k-\varepsilon_0<\frac{u_n}{v_n} \quad (k-\varepsilon_0>0),$$

即$\forall n\geqslant N$，有$v_n\leqslant\dfrac{1}{k-\varepsilon_0}u_n$，根据定理 6，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也发散。

若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散，且$k=+\infty$，由已知条件，

$$\exists M>0, \exists N\in\mathbf{N}, \forall n\geqslant N, \text{有}\frac{u_n}{v_n}>M,$$

即$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，有$v_n<\dfrac{1}{M}u_n$，根据定理6，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也发散. □

例 7 判别下列正项级数的敛散性：

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot n!}. \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

解 1) 取$v_n=\dfrac{1}{n!}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n\cdot n!}}{\dfrac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$收敛（见例 4），根据定理 6 的推论，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot n!}$也

收敛.

2) 取 $v_n=\frac{1}{n}$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1,$$

已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 (见例 3), 根据定理 6 的推论, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 也发散.

应用正项级数的比较判别法不仅能直接判别某些正项级数的敛散性, 并能导出下面比较简便的正项级数敛散性的判别法:

定理 7. (**柯西判别法**) 有正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

1) 若 $\exists N\in\mathbf{N}, \forall n\geqslant N$, 有

$$\sqrt[n]{u_n}\leqslant q\,(\text{常数})<1,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

2) 若存在无限个 n, 有

$$\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

证明 1) 已知 $\exists N\in\mathbf{N}, \forall n\geqslant N$, 有

$$\sqrt[n]{u_n}\leqslant q \quad 或 \quad u_n\leqslant q^n.$$

又已知几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty}q^n\,(0\leqslant q<1)$ 收敛, 于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

2）已知存在无限个 n，有

$$\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1 \quad 或 \quad u_n\geqslant 1,$$

即u_n不趋近于 0 $(n\to\infty)$，于是级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. □

推论 有正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，若

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l,$$

则 1）$l<1$ 时级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

2）$l>1$ 时级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

证明 1）$\exists q$: $l<q<1$. 由数列极限定义，
$\exists \varepsilon_0=q-l>0, \exists N\in\mathbf{N}, \forall n\geqslant N$，有

$$|\sqrt[n]{u_n}-l|<q-l \quad 或 \quad \sqrt[n]{u_n}<q<1.$$

根据定理 7，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

2）已知 $l>1$，根据数列极限的保号性，$\exists N\in\mathrm{N}, \forall n\geqslant N$，有

$$\sqrt[n]{u_n}>1.$$

根据定理 7，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. □

例 8. 判别下列正项级数的敛散性：

1）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.　　2）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(\ln n)^n}$.　　3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^{\ln n}}$.

解 1）$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1,$

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$收敛.

2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0<1$,

级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$收敛.

3) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{3^{\ln n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3^{\frac{\ln n}{n}}}=\frac{2}{3^0}=2>1$,

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^{\ln n}}$发散.

定理8.（达朗贝尔①判别法） 有正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(u_n>0)$.

1）若$\exists N\in\mathbf{N}$, $\forall n\geqslant N$, 有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant q(\text{常数})<1,$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

2）若$\exists N\in\mathbf{N}$, $\forall n\geqslant N$, 有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1,$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

证明 1）不妨设 $\forall n\in\mathbf{N}$, 有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant q \qquad \text{或} \qquad u_{n+1}\leqslant u_n q.$$

① 达朗贝尔(D'Alembert 1717—1783)法国数学家.

$n=1,\quad u_2\leqslant u_1q,$

$n=2,\quad u_3\leqslant u_2q\leqslant u_1q^2,$

$n=3,\quad u_4\leqslant u_3q\leqslant u_1q^3,$

$\cdots\quad\quad \cdots$

$n=k,\quad u_{k+1}\leqslant u_kq\leqslant u_1q^k,$

$\cdots\quad\quad \cdots$

已知几何级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_1q^k(0<q<1)$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

2) 已知$\exists N\in\mathbf{N},\forall n\geqslant N$，有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1 \quad\quad 或 \quad\quad u_{n+1}\geqslant u_n,$$

即正数数列$\{u_n\}$从N项以后单调增加，u_n不趋近于0 ($n\to\infty$)，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散。 □

推论 有正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(u_n>0)$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l.$$

1) 若$l<1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

2) 若$l>1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

证明 1) $\exists q: l<q<1$. 由数列极限定义，

$\exists\varepsilon_0=q-l>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N$，有

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-l\right|<q-l \quad\quad 或 \quad\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}<q<1.$$

根据定理8，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

2) 已知 $l>1$. 根据数列极限的保号性,

$\exists N\in\mathrm{N}$, $\forall n\geqslant N$, 有 $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$.

根据定理 8，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. □

例 9. 判别下列正项级数的敛散性:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$.　　2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.　　3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$.

解 1) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^n}\bigg/\frac{n}{2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}<1$,

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$ 收敛.

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\bigg/\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1,$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 收敛.

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}}{(n+1)^5}\bigg/\frac{5^n}{n^5}=\lim_{n\to\infty}5\left(\frac{n}{n+1}\right)^5=5>1$,

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$ 发散.

注 当 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$ 或 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 可能收敛也可能发散. 例如, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^p}=1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^p}\Big/\frac{1}{n^p}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1.$$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，当 $p>1$ 时收敛；当 $p\leqslant 1$ 时发散.

柯西判别法与达朗贝尔判别法都是以比较判别法为基础，与几何级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$比较得到的. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$时，这两个判别法都失效了. 为了进一步讨论正项级数的敛散性，需要比几何级数收敛更慢的正项级数作为比较的标准. 通常选用广义调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$. 于是，以广义调和级数作为比较标准，又有更细致的正项级数的敛散性判别法. 本书从略.

四、变号级数

若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$既有无限多项是正数又有无限多项是负数，则称此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是**变号级数**.

例如，级数($u_n>0$，依次一项正两项负)

$$u_1+(-u_2)+(-u_3)+u_4+(-u_5)+(-u_6)+u_7+(-u_8)+(-u_9)+\cdots$$

是变号级数. 为书写简便，将这个变号级数写为：

$$u_1-u_2-u_3+u_4-u_5-u_6+u_7-u_8-u_9+\cdots. \qquad (u_n>0)$$

特别是，级数的项依次是正数与负数相间，即

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+u_{2k-1}-u_{2k}+\cdots, \qquad (u_n>0)$$

称为**交错级数**．判别交错级数的收敛性有下面的判别法：

定理9．（莱布尼兹判别法） 有交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0)$．若

1) $\forall n\in\mathbf{N}$，有 $u_n\geqslant u_{n+1}$； 2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，

则交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛，且

$$|r_n|=|S-S_n|<u_{n+1},$$

其中S、S_n与r_n分别是交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$的和、$n$项部分和与余和．

证明 首先讨论交错级数部分和数列$\{S_n\}$的偶子列$\{S_{2k}\}$．$\forall k\in\mathbf{N}$，有

$$S_{2(k+1)}=u_1-u_2+\cdots+u_{2k-1}-u_{2k}+u_{2k+1}-u_{2k+2},$$

$$S_{2k}=u_1-u_2+\cdots+u_{2k-1}-u_{2k},$$

$$S_{2(k+1)}-S_{2k}=u_{2k+1}-u_{2k+2}.$$

由条件1)，有$S_{2(k+1)}-S_{2k}\geqslant 0$，即偶子列$\{S_{2k}\}$单调增加．又有

$$S_{2k}=u_1-u_2+u_3-\cdots+u_{2k-1}-u_{2k}$$

$$=u_1-(u_2-u_3)-\cdots-(u_{2k-2}-u_{2k-1})-u_{2k}\leqslant u_1,$$

即偶子列$\{S_{2k}\}$有上界．根据§2.2公理，偶子列$\{S_{2k}\}$收敛，设$\lim\limits_{k\to\infty}S_{2k}=S$．由条件2)，有

$$\lim_{k\to\infty}S_{2k+1}=\lim_{k\to\infty}(S_{2k}+u_{2k+1})=\lim_{k\to\infty}S_{2k}+\lim_{k\to\infty}u_{2k+1}=S,$$

即奇子列$\{S_{2k-1}\}$也收敛于S．根据§2.2定理10，有

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,$$

即交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛．

由条件 1)，即 $\forall n\in\mathbf{N}$，有 $u_n-u_{n+1}\geqslant 0$. 再根据定理 3，有

$$\begin{aligned}|r_n|=|S-S_n|&=|u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-u_{n+4}+\cdots|\\&=u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-u_{n+4}+u_{n+5}-\cdots\\&=u_{n+1}-(u_{n+2}-u_{n+3})-(u_{n+4}-u_{n+5})-\cdots\\&<u_{n+1}.\quad\square\end{aligned}$$

例 10. 判别下列交错级数的收敛性:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$.　　2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{10^n}$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

解 1) $\forall n\in\mathbf{N}$，有 $\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{n+1}$；$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$. 根据莱布尼兹判别法，交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 收敛.

2) $\forall n\in\mathbf{N}$，有 $\dfrac{n}{10^n}>\dfrac{n+1}{10^{n+1}}$①；$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{10^n}=0$②. 根据莱布尼兹判别法，交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{10^n}$ 收敛.

3) $\forall n\in\mathbf{N}$，有 $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}>\dfrac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}$③；$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

---

① 已知 $10\cdot n>n+1$，不等号两端用 10^{n+1} 除，有 $\dfrac{n}{10^n}>\dfrac{n+1}{10^{n+1}}$.

② $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{10^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{10^x\ln 10}=0$.

③ 已知 $\dfrac{2n+1}{2n+2}<1$，有 $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}>\dfrac{(2n-1)!!(2n+1)}{(2n)!!(2n+2)}=\dfrac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}$.

$=0$①. 根据莱布尼兹判别法，交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$收敛.

下面讨论一般变号级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性.

定义 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**绝对收敛**；若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，而正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$却发散，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**条件收敛**.

例如，正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ （p级数，$p=2>1$）收敛，从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$绝对收敛.

正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$收敛(见例10)，从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$条件收敛.

---

① 设$A=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$，有

$$A=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot(2n)}=\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{2}{3}\ \frac{4}{5}\ \frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n+1}$$

$$=\frac{1}{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}}=\frac{1}{A(2n+1)},$$

即 $A<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. 当$n\to\infty$时，有$A=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\to0$.

定理 10. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛.

证明 已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，根据级数的柯西收敛准则，$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n > N, \forall p \in \mathbf{N}$，有

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+p}| < \varepsilon.$$

从而，有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \leqslant |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+p}| < \varepsilon,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. □

例 11. 讨论下列变号级数的绝对收敛性:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2^n}$.　　2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{4}}{n^2}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

解 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2^n} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6} + \cdots$.

$\forall n \in \mathbf{N}$，有

$$\left| \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2^n} \right| = \frac{1}{2^n}.$$

已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛. 根据定理 10，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2^n}$ 收敛，且绝对收敛.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{4}}{n^2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{3^2} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{5^2} + \cdots$.

$\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$\left|\frac{\sin n\frac{\pi}{4}}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}.$$

已知正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，根据定理 10，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\frac{\pi}{4}}{n^2}$收敛，且绝对收敛。

3) $\forall n\in\mathbf{N}$，有$\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，且$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$。根据莱布尼兹判别法，(交错)级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$收敛。而正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\quad\left(p\text{ 级数},\ p=\frac{1}{2}<1\right)$$

发散。从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$条件收敛。

判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的绝对收敛可归结为判别正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$的收敛。判别变号级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的条件收敛，有下面两个判别法。这两个判别法要用到一个引理，通常称为阿贝尔变换。

引理（阿贝尔①变换） 设a_k与$b_k(k=1,2,\cdots,n)$是两组数，$B_m=\sum_{k=1}^{m}b_k(m=1,2,\cdots,n)$。若$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant0$，且$\exists M>0$，$\forall m=1,2,\cdots,n$，有$|B_m|\leqslant M$，则

① 阿贝尔(Abel 1802—1829)挪威数学家。

$$|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n|=\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leqslant a_1M.$$

证明 已知 $b_1=B_1$, $b_2=B_2-B_1$, $\cdots$, $b_n=B_n-B_{n-1}$, 有

$$|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n|=\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}a_k(B_k-B_{k-1})\right|$$

$$(B_0=0)$$

$$=|a_1(B_1-B_0)+a_2(B_2-B_1)+\cdots+a_n(B_n-B_{n-1})|$$

$$=|B_1(a_1-a_2)+B_2(a_2-a_3)+\cdots+B_{n-1}(a_{n-1}-a_n)+a_nB_n|$$

$$\leqslant|B_1|(a_1-a_2)+|B_2|(a_2-a_3)+\cdots+|B_{n-1}|(a_{n-1}-a_n)$$

$$+|B_n|a_n$$

$$\leqslant M(a_1-a_2+a_2-a_3+\cdots+a_{n-1}-a_n+a_n)=a_1M.\ \square$$

定理 11. **(狄利克莱判别法)** 若数列$\{a_n\}$单调减少, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$的部分和数列$\{B_n\}$有界, 即 $\exists M>0$, $\forall n\in\mathbf{N}$, 有

$$|B_n|=|b_1+b_2+\cdots+b_n|\leqslant M,$$

则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛.

证明 $\forall n,p\in\mathbf{N}$, 有

$$|b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+p}|=|B_{n+p}-B_n|\leqslant|B_{n+p}|+|B_n|\leqslant 2M.$$

根据引理, 有

$$|a_{n+1}b_{n+1}+a_{n+2}b_{n+2}+\cdots+a_{n+p}b_{n+p}|\leqslant a_{n+1}\cdot 2M.$$

已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}$, $\forall n>N$, 有

$$|a_n|<\varepsilon\quad\text{或}\quad a_n<\varepsilon.$$

于是, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}$, $\forall n>N$, $\forall p\in\mathbf{N}$, 有

$$|a_{n+1}b_{n+1}+a_{n+2}b_{n+2}+\cdots+a_{n+p}b_{n+p}|\leqslant a_{n+1}\cdot 2M<2M\varepsilon,$$

根据定理 1，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛。□

不难看到，判别交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0)$ 收敛的莱布尼兹判别法只是狄利克莱判别法的特殊情况. 事实上，若数列 $\{u_n\}$ 单调减少，且 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 的部分和数列 $\{B_n\}$ 有界，即

$$B_n=\begin{cases}1, & n\text{是奇数},\\0, & n\text{是偶数},\end{cases}\qquad |B_n|\leqslant 1.$$

根据狄利克莱判别法，交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛.

定理 12.（阿贝耳判别法） 若数列 $\{a_n\}$ 是单调有界，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

证明 若数列 $\{a_n\}$ 单调减少有下界，则数列 $\{a_n\}$ 收敛，设 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$. 从而数列 $\{a_n-a\}$ 是单调减少且 $\lim_{n\to\infty}(a_n-a)=0$. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则它的部分和数列必有界. 根据定理 1，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a)b_n$ 收敛. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}ab_n$ 收敛.

再根据定理 3，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a)b_n+\sum_{n=1}^{\infty}ab_n$$

收敛. 若数列 $\{a_n\}$ 单调增加有上界，则数列 $\{-a_n\}$ 是单调减少有

下界. 利用上面结果, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n)b_n$收敛, 于是级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛. □

例 12. 设数列$\{a_n\}$单调减少, 且$\lim_{n\to\infty}a_n=0$. 讨论下列级数的收敛性:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$.

解 1) 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$的部分和$S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin kx$.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}2\sin kx\sin\frac{x}{2}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

$\forall x\neq 2k\pi, k\in\mathbf{Z}$, 有

$$|S_n|=\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|=\left|\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},$$

即$x\neq 2k\pi, k\in\mathbf{Z}$, 部分和数列$\{S_n\}$有界. 根据狄利克莱判别法, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$收敛.

$\forall x=2k\pi, k\in\mathbf{Z}$, 有$\sin nx=0$. 显然, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$也收敛.

于是，$\forall x\in\mathbf{R}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$收敛。

2) 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$的部分和$P_n=\sum_{k=1}^{n}\cos kx$，同法有

$$P_n=\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

$\forall x\neq 2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，有

$$|P_n|=\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},$$

即$x\neq 2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，部和数列$\{P_n\}$有界，根据狄利克莱判别法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$收敛。

$\forall x=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，有$\cos nx=1$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

于是，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$与$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$同时收敛，同时发散。

由例 12 知：

$\forall x\in\mathbb{R}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln(n+1)}$都收敛。

$\forall x\neq 2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt[3]{n^2}}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\ln(n+1)}$都收敛。

例 13. 判别下列级数绝对收敛与条件收敛：

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$，$p$ 是参数，且 $p>0, 0<x<\pi$。

解　1) 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n+2}{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ 发散. 事实上，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\bigg/\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1.$$

已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ 发散，根据定理 6 的推论，正项级数发散。

已知交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ 收敛，而数列 $\left\{\frac{n+2}{n+1}\right\}=\left\{1+\frac{1}{n+1}\right\}$ 严格减少有下界. 根据阿贝尔判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ 收敛.

于是，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ 条件收敛.

2) $\forall p>1$，有 $\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\leqslant\frac{1}{n^p}$. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，于是，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ 绝对收敛.

$\forall p$: $0<p\leqslant 1$. 由例 12 知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ 收敛. 又因为

$$\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\geqslant\frac{\sin^2 nx}{n^p}=\frac{1}{n^p}\left(\frac{1-\cos 2nx}{2}\right)=\frac{1}{2n^p}-\frac{\cos 2nx}{2n^p}.$$

已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n^p}$ 收敛（见例12），则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n^p}-\frac{\cos 2nx}{2n^p}\right)$ 发散(见练习题 9.1(一) 第7题)， 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|$发散. 于是，当$0<p\leqslant 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$条件收敛.

练习题 9.1(二)

1. 判别下列正项级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$,

(2) $\sum_{n=7}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n-6}}$,

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$,

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$,

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$,

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$,

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^{\frac{n}{2}}$,

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}$,

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$,

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$

(11) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$,

(12) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln n}$,

(13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$,

(14) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$,

(15) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$.

2. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛. 下列级数是否收敛，为什么?

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$,　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$,　　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ $(a_n > 0)$,

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ $(a_n > 0)$.

3. 证明:若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛,则下列级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$$

也收敛.

4. 证明:若$\{a_n\}$是等差数列,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 发散.

5. 证明:若 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant \cdots \geqslant 0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$

同时收敛,同时发散.

6. 设 $P(n)$ 与 $Q(n)$ 分别是关于 n 的 p 次与 q 次多项式, 且 $Q(n) \neq 0$.

证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ 收敛 $\Longleftrightarrow q - p \geqslant 2$.

7. 判别下列级数的收敛性,并指出是绝对收敛还是条件收敛:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$,　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^2}{2^n}$,

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n}$,　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$

8. 参数 s 取何值,下列级数是绝对收敛和条件收敛:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^s$.

9. 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛,数列$\{b_n\}$有界,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

10. 证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$绝对收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$也收敛.（提示：应用级数柯西收敛准则. 设$S_n=b_1+\cdots+b_n$，而$b_n=S_n-S_{n-1}$.）

11. 有级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，设

$$a_n^+=\frac{|a_n|+a_n}{2},\qquad a_n^-=\frac{|a_n|-a_n}{2}.$$

证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛$\Longleftrightarrow$正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$与$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$都收敛；当级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+-\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

12. 证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛，则正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$与$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$（符号$a_n^+$与$a_n^-$见第11题）都发散到正无穷大$(+\infty)$.

13. 证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ (a_n>0)$发散，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$也发散.（提示：$\frac{a_{N+1}}{S_{N+1}}+\frac{a_{N+2}}{S_{N+2}}+\cdots+\frac{a_{N+k}}{S_{N+k}}\geqslant 1-\frac{S_N}{S_{N+k}}$.）

14. 证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ (a_n>0)$收敛，$r_n=\sum_{k=n}^{\infty} a_k$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{r_n}$发散.（提示：当$n>k$时，$\frac{a_k}{r_k}+\frac{a_{k+1}}{r_{k+1}}+\cdots+\frac{a_n}{r_n}>1-\frac{r_n}{r_k}$.）

15. 证明：若在调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$中去掉分母$n$含有数字0的项，则剩余

项组成的新级数收敛，其和不超过90.

16．证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\alpha}$收敛，则$\forall\beta>\alpha$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\beta}$也收敛.（提示：应用阿贝尔判别法）

17．证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\sigma}$（$\sigma>0$）收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0.$$

18．证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，且有数列$\{b_n\}$：$\exists M>0,\forall n\in N$，有

$$\sum_{k=1}^{n}|b_k-b_{k+1}|\leqslant M,$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛.

（提示：应用柯西收敛准则和阿贝尔变换、§2.2第20题的结果（数列$\{b_n\}$收敛）．它是阿贝尔判别法的推广）

五、绝对收敛级数的性质

已知有限和的运算满足结合律、交换律和分配律．收敛级数是无限和，那么收敛级数的运算是否也满足结合律、交换律与分配律呢①？定理3已回答收敛级数满足结合律．一般来说，收敛级数不满足交换律与分配律.

例如，已知交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$收敛，设其和为$A$，即

$$A=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots.$$

如果将其项作如下交换：按此级数原有的正项与负项的顺序，一项

---

① 这里所说的"交换"是指交换级数中无限个项的位置．"分配"是指两个级数相乘.

正两项负交替排列，即

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots.$$

假设此级数收敛，作如下的结合：

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\right)=\frac{1}{2}A,$$

即交换其项之后的新级数，其和却是$\frac{1}{2}A$. 由此可见，收敛级数不满足交换律. 这是有限和与无限和（收敛级数）的区别之一. 交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$不满足交换律，因为它是条件收敛的. 关于条件收敛的级数还有更为一般的结果，这就是黎曼定理：

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛，$\forall a\in\mathbb{R}$（包括$a=\pm\infty$），则适当交换级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的项，可使交换后的新级数收敛于a（或发散到$\pm\infty$）.

证明从略.

下面的定理指出，绝对收敛级数满足交换律.

定理13. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛，其和为S，则任意交换级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的项，得到的新级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_{n_k}$①也绝对收敛，其和也是$S$.

---

① 新级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_{n_k}$中的第$k$项$u_{n_k}$是原级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$中的第$n_k$项. 例如，

原级数 $u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6+u_7+\cdots$

新级数 $u_3+u_4+u_1+u_6+u_7+u_9+u_2+\cdots$

$\quad\quad\quad\ \ \| \quad \| \quad \| \quad \| \quad \| \quad \| \quad \|$

$\quad\quad\quad u_{n_1}\ u_{n_2}\ u_{n_3}\ u_{n_4}\ u_{n_5}\ u_{n_6}\ u_{n_7}\ \cdots$

即 $n_1=3, n_2=4, n_3=1, n_4=6, n_5=7, n_6=9, n_7=2, \cdots$.

证明 首先证明新级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_{n_k}$绝对收敛，即$\sum_{k=1}^{\infty}|u_{n_k}|$收敛。

已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛。设$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=A$，级数$\sum_{k=1}^{\infty}|u_{n_k}|$的$m$项部分和是$P_m=\sum_{k=1}^{m}|u_{n_k}|$。$\forall m\in\mathrm{N}$，$|u_{n_1}|$，$|u_{n_2}|$，…，$|u_{n_m}|$都是正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$中的某一项。令

$$j=\max\{n_1,n_2,\cdots,n_m\}.$$

于是，$\forall m\in\mathrm{N}$，有

$$P_m=\sum_{k=1}^{m}|u_{n_k}|\leqslant\sum_{n=1}^{j}|u_n|\leqslant A,$$

即正项级数$\sum_{k=1}^{\infty}|u_{n_k}|$的部分和数列$\{P_m\}$有上界，则新级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_{n_k}$绝对收敛。

其次证明新级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_{n_k}$的和也是$S$。

设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的n项部分和是S_n。已知$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$与级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛。根据数列极限定义与级数的柯西收敛准则，即

$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathrm{N},\forall p\in\mathrm{N}$，有

$$|S_N-S|<\varepsilon \quad 与 \quad \sum_{k=N+1}^{N+p}|u_k|<\varepsilon.$$

因为p是任意自然数，当$p\to\infty$时，有$\sum_{k=N+1}^{\infty}|u_k|\leqslant\varepsilon$。

原级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的前N项$u_1, u_2, \cdots, u_N$必在新级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_{n_k}$中出现。设$u_1, u_2, \cdots, u_N$在新级数中分别是$u_{n_{k_1}}, u_{n_{k_2}}, \cdots, u_{n_{k_N}}$。令

$$\max\{k_1, k_2, \cdots, k_N\}=i.$$

显然，$i\geqslant N$。当$m\geqslant i$时，新级数的部分和

$$\sigma_m=\sum_{k=1}^{m}u_{n_k}$$

中除包含原级数的前N项$u_1, u_2, \cdots, u_N$外，还可能包含原级数第N项u_N以后的若干项。设这些项的总和是q，有$|q|\leqslant\sum_{k=N+1}^{\infty}|u_k|\leqslant\varepsilon$。

$$\sigma_m=\sum_{k=1}^{m}u_{n_k}=\sum_{n=1}^{N}u_n+q=S_N+q.$$

$$|\sigma_m-S|\leqslant|S_N-S|+|q|.$$

于是，当$m\geqslant i\,(\geqslant N)$时，有

$$|\sigma_m-S|\leqslant|S_N-S|+|q|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,$$

即$\lim\limits_{m\to\infty}\sigma_m=S$，则新级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_{n_k}$收敛，其和是$S$。□

由此可见，虽然级数的条件收敛与绝对收敛都是收敛，但是二者收敛的机制却是不同的。条件收敛级数之所以收敛，是由于按原有级数的各项顺序，正项与负项互相抵消，从而使它的部分和数列收敛与项的位置有关。因此，条件收敛级数不满足交换律。绝对收敛级数之所以收敛，是由于其项的绝对值趋近于0的速度达到了收敛的要求，从而使它的部分和数列收敛与项的位置无关。因此，绝对收敛级数满足交换律。

下面讨论两个级数的乘积。两个级数的乘积是两个有限和乘

积的推广.

定义 两个级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$的**乘积级数**是所有乘积$a_ib_k$ $(i,k\in\mathrm{N})$之和,即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\right)=\sum_{i,k=1}^{\infty}a_ib_k.$$

乘积级数的项可按不同的顺序排列. 常用的是按正方形顺序或对角线顺序的排列:

$$\begin{array}{cccc} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \cdots \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \cdots \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \cdots \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \cdots \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

(正方形排列) (对角线排列)

按正方形顺序排列是:

$$\sum_{i,k=1}^{\infty}a_ib_k=a_1b_1+a_1b_2+a_2b_2+a_2b_1+a_1b_3+a_2b_3+a_3b_3+a_3b_2+a_3b_1+\cdots.$$

按对角线顺序排列是:

$$\sum_{i,k=1}^{\infty}a_ib_k=a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}c_n,$$

其中$c_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+a_3b_{n-2}+\cdots+a_nb_1$(每项下角标之和是$n+1$). 按对角线顺序排列的乘积级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$称为两个级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$的**柯西乘积**.

两个收敛级数的乘积级数可能发散．例如，已知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

收敛．此收敛级数的自乘，它的柯西乘积是

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)^2=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}c_k, \tag{4}$$

其中 $c_k=\dfrac{1}{1\cdot\sqrt{k}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{k-1}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{i}\cdot\sqrt{k-i+1}}$

$$+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}\cdot 1}.$$

$\forall i=1,2,\cdots,k$，有

$$\frac{1}{\sqrt{i}\ \sqrt{k-i+1}}\ \geqslant\ \frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k}}=\frac{1}{k},\quad \text{从而 } c_k\geqslant\frac{1}{k}k=1,$$

即 $\forall N\in\mathbf{N}$，$\exists k>N$，使 $|(-1)^{k-1}c_k|\geqslant 1$．于是，级数(4)发散．这是因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 是条件收敛的．关于绝对收敛的级数却有下面的定理：

定理 14． 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都绝对收敛，其和分别是 A 与 B，则它们的乘积级数 $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty}a_ib_k$ 也绝对收敛，其和为 AB．

证明　首先证明 $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty}a_ib_k$ 绝对收敛．已知正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛．设它们的 n 项部分和分别是 A'_n 与 B'_n，且数列 $\{A'_n\}$ 与 $\{B'_n\}$ 都有上界，设它们的上界分别是 A' 与 B'．

设正项级数 $\sum_{i,k=1}^{\infty}|a_ib_k|$ 的 m 项部分和是 S'_m，即

$$S'_m=\sum_{p=1}^{m}|a_{i_p}b_{k_p}|$$
$$=|a_{i_1}b_{k_1}|+|a_{i_2}b_{k_2}|+\cdots+|a_{i_m}b_{k_m}|,$$

其中 i_p, k_p 都是自然数. 令

$$q=\max\{i_1, i_2, \cdots, i_m; k_1, k_2, \cdots, k_m\}.$$

$\forall m\in\mathbf{N}$，有

$$S'_m\leqslant(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_q|)(|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_q|),$$

或 $$S'_m\leqslant A'_qB'_q\leqslant A'B'（常数）.$$

即正数数列 $\{S'_m\}$ 有上界，级数 $\sum_{i,k=1}^{\infty}|a_ib_k|$ 收敛，从而乘积级数 $\sum_{i,k=1}^{\infty}a_ib_k$ 绝对收敛.

其次证明 $\sum_{i,k=1}^{\infty}a_ib_k=AB$. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 与 $\sum_{i,k=1}^{\infty}a_ib_k$ 的 n 项部分和分别是 A_n、B_n 与 S_n. 又已知 $\lim_{n\to\infty}A_n=A$ 与 $\lim_{n\to\infty}B_n=B$. 根据定理 13，只讨论乘积级数按正方形顺序排列即可. 显然，$\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$S_{n^2}=A_nB_n.$$

从而，$$\lim_{n\to\infty}S_{n^2}=\lim_{n\to\infty}A_nB_n=AB.$$

已知部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛，且有一个子列 $\{S_{n^2}\}$ 收敛于 AB，则数列 $\{S_n\}$ 收敛于 AB，即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=AB.$$

于是，乘积级数 $\sum_{i,k=1}^{\infty}a_ib_k=AB$. □

定理 13 和定理 14 指出：绝对收敛级数满足交换律和分配律．换句话说，绝对收敛级数这种无限和具有与有限和类似的运算性质．

练 习 题 9.1(三)

1．证明：将收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 相邻的奇偶项交换位置得到的新级数也收敛，且有相同的和数．

2．交换条件收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 的各项，使交换项之后的新级数发散到正无穷大$(+\infty)$．（提示：应用练习题9．1(二)第 12 题的结果）

3．证明：$|q|<1$，有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n.$$

4．证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 自乘的柯西乘积收敛．

5．证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2.$$

（提示：应用练习题 2．2 第 19 题的结果，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=c,$$

其中 c 是尤拉常数）

* * * *

6．证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，将其项重排，使新级数中每一项的序号与该项在原级数中的序号之差的绝对值不超过 m（m 是固定的自然数），则新级数收敛，且其和与原级数的和相等．（第1题是它的特殊情况）

7. 证明：将级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 重排，首先依次有 p 个正项，其次依次有 q 个负项，以下如此循环，则新级数的和是

$$\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

(提示：见第 5 题的提示. 设

$$H_m=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}=\ln m+c+r_m,$$

其中 c 是尤拉常数，$r_m\to 0\ (m\to\infty)$. 而

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m}=\frac{1}{2}H_m,\quad 1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2m-1}=H_{2m}-\frac{1}{2}H_m).$$

§9.2. 函 数 级 数

一、函数级数的收敛域

设函数列 $\{u_n(x)\}$ 的每个函数都在数集 A 有定义，将它们依次用加号连结起来，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

就是数集 A 的**函数级数**. 函数级数(1)的前 n 项和

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$$

就是函数级数(1)的 n 项**部分和函数**，简称**部分和**.

$\forall\alpha\in A$，函数级数(1)在 α 对应一个数值级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\alpha)=u_1(\alpha)+u_2(\alpha)+\cdots+u_n(\alpha)+\cdots. \qquad (2)$$

它的敛散性可用§9.1 关于数值级数敛散性的判别法判别. 若级数(2)收敛，则称 α 是函数级数(1)的**收敛点**；若级数(2)发散，则称 α 是函数级数(1)的**发散点**.

定义 函数级数(1)的收敛点的集合，称为函数级数(1)的收

敛域．若收敛域是一个区间，则称此区间是函数级数（1）的收敛区间．

显然，函数级数(1)在收敛域的每个点都有和．于是，函数级数(1)的和是定义在收敛域的函数，设此函数是 $S(x)$，即

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x) \tag{3}$$

或

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots,$$

称 $S(x)$ 是函数级数(1)在收敛域的**和函数**．

函数级数(1) 的和函数 $S(x)$ 与它的 n 项部分和的差，表为 $R_n(x)$，即

$$R_n(x)=S(x)-S_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots,$$

称为函数级数(1)的第 n 项**余和**．由(3)式知，对收敛域任意 x，有

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}[S(x)-S_n(x)]=0.$$

例 1. 讨论函数级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 的收敛域．

解 函数级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 是几何级数，公比是 x．已知当 $|x|\geqslant 1$ 时，函数级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 发散；当 $|x|<1$ 时，函数级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 收敛，和函数 $S(x)=\dfrac{1}{1-x}$，即

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots.$$

于是，它的收敛域是收敛区间 $(-1,1)$．

例 2. 讨论函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n x}{n^2}$ 的收敛域．

解　$\forall x\in\mathbb{R}$，有

$$\left|\frac{\sin^n x}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2},$$

已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，根据§9.1比较判别法，$\forall x\in\mathbb{R}$，函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n x}{n^2}$都收敛．于是，它的收敛域是实数集 $\mathbb{R}$．

例 3． 讨论函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$的收敛域．

解　由§9.1 例 12 知，$x\neq 2k\pi$，$k\in\mathbb{Z}$，函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ 收敛；$x=2k\pi$，$k\in\mathbb{Z}$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散．于是，它的收敛域是 $\mathbb{R}-\{2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$．

二、一致收敛概念

设函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在收敛区间 I① 的和函数是 $S(x)$，即

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),\quad x\in I.$$

我们将通过函数级数的每一项所具有的连续性、可微性与可积性相应地讨论和函数的连续性、可微性与可积性．

一般来说，函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的每一项 $u_n(x)$ $(n\in\mathbb{N})$ 在区间 I 连续，它的和函数 $S(x)$在区间 I 可能不连续．例如，函数级数

① 区间 I 可以是开区间、闭区间、半开区间，有限区间或无限区间．

$$\frac{x}{1+x}+\frac{x}{(1+x)^2}+\cdots+\frac{x}{(1+x)^n}+\cdots$$

的每一项$\frac{x}{(1+x)^n}$($n\in\mathbb{N}$)在区间[0, 1]都连续，而它的和函数$S(x)$在区间[0, 1]却不连续.

事实上，函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^n}$是首项为$\frac{x}{1+x}$，公比是$\frac{1}{1+x}$的几何级数. $\forall x>0$，$\frac{1}{1+x}<1$，有

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^n}=\frac{\frac{x}{1+x}}{1-\frac{1}{1+x}}=1,$$

$x=0$，函数级数每项都是 0，有

$$S(0)=0.$$

显然，和函数

$$S(x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

在区间[0, 1]不连续.

一般来说，函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的每一项$u_n(x)$在区间[$a, b$]可积，其和函数$S(x)$在区间[$a, b$]不一定可积，即或和函数$S(x)$在区间[$a, b$]可积，而每项积分之和也不一定等于和函数的积分，即

$$\int_a^b S(x)dx\neq\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx.$$

对可导也有类似的情况. 那么，在什么条件之下，函数级数每一项所具有的分析性质，其和函数也具有同样的分析性质，且函数级数的每项积分（极限、导数）之和等于和函数的积分（极限、导数）

呢？为此引入一个新概念——一致收敛.

设函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间 I 收敛，和函数是 $S(x)$，即 $\forall x\in I$，有

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x).$$

如果 $\alpha\in I$，则数值级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\alpha)$收敛，有

$$S(\alpha)=u_1(\alpha)+u_2(\alpha)+\cdots+u_n(\alpha)+\cdots, \tag{4}$$

即 $\forall\varepsilon>0,\exists N_\alpha\in\mathbf{N}$（取最小者），$\forall n>N_\alpha$，有

$$|S(\alpha)-S_n(\alpha)|=|R_n(\alpha)|<\varepsilon. \tag{5}$$

如果 $\beta\in I$，且 $\beta\neq\alpha$，则数值级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\beta)$收敛，有

$$S(\beta)=u_1(\beta)+u_2(\beta)+\cdots+u_n(\beta)+\cdots, \tag{6}$$

即对上述同样的 $\varepsilon>0,\exists N_\beta\in\mathbf{N}$（取最小者），$\forall n>N_\beta$，有

$$|S(\beta)-S_n(\beta)|=|R_n(\beta)|<\varepsilon. \tag{7}$$

一般来说，数值级数(4)与(6)是不相同的，因此它们收敛的速度①不同，在 ε 相等的情况下，使不等式(5)与(7)成立的自然数 N也是不相等的. 使不等式(5)成立的 $N=N_\alpha$，使不等式(7)成立的 $N=N_\beta$. 由此可见，对任意给定的 $\varepsilon>0$，对区间 I 不同的点 x，各自存在相应的自然数 N_x（取最小者），$\forall n>N_x$，有

$$|S(x)-S_n(x)|=|R_n(x)|<\varepsilon. \tag{8}$$

区间 I 有无限多个点 x，因而对应着无限多个自然数 N_x（$\forall n>N_x$，有$|R_n(x)|<\varepsilon$），这无限多个自然数 N_x 中是否存在最大的呢？换

① N_α的大、小刻划了级数(4)收敛的速度，N_α愈小收敛的速度愈快；N_α愈大收敛的速度愈慢.

句话说，对区间 I 所有的点 x 是否存在一个"通用"的自然数 N ($\forall n>N, \forall x\in I$, 有 $|R_n(x)|<\varepsilon$)呢？事实上，有的函数级数在区间 I 存在着通用的自然数 N. 于是，有下面的一致收敛概念：

定义 设函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 收敛于和函数 $S(x)$. 若 $\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n>N$(通用), $\forall x\in I$, 有

$$|S(x)-S_n(x)|=|R_n(x)|<\varepsilon, \tag{9}$$

则称函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I **一致收敛或一致收敛于和函数 $S(x)$**.

不等式(9)可改写成

$$S(x)-\varepsilon<S_n(x)<S(x)+\varepsilon.$$

若和函数 $S(x)$ 在区间 I 的图象是一条连续曲线，则函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 一致收敛于和函数 $S(x)$ 的几何意义是，不论给定的以曲线 $S(x)+\varepsilon$ 与 $S(x)-\varepsilon$ 为边界的带形区域怎样窄，总存在自然数 N (通用的 N), $\forall n>N$, 任意一个部分和 $S_n(x)$ 的图象都位于这个带形区域之内（如图 9.1).

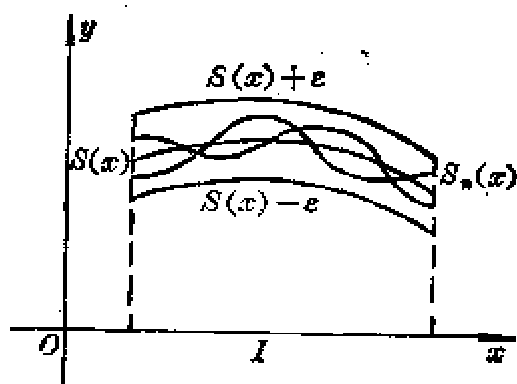


图 9.1

若函数级数在某个区间不存在通用 N, 就是非一致收敛. 现将一致收敛与非一致收敛列表对比如下：

例 4. 证明：函数级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, 1) 在 $[0, 1-\delta]$(其中 $0<\delta<1$)

函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$I$	
一致收敛于$S(x)$	$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N,\forall x\in I$,有$\lvert S(x)-S_n(x)\rvert<\varepsilon$
非一致收敛于$S(x)$	$\exists\varepsilon_0>0,\forall N\in\mathbf{N},\exists n_0>N,\exists x_0\in I$,有$\lvert S(x_0)-S_{n_0}(x_0)\rvert\geqslant\varepsilon_0$

一致收敛; 2) 在$(-1,1)$非一致收敛.

证明 $\forall x\in[0,1)$,有$\lvert S(x)-S_n(x)\rvert=\lvert R_n(x)\rvert$

$$=\lvert x^n+x^{n+1}+\cdots\rvert=\left|\frac{x^n}{1-x}\right|=\frac{x^n}{1-x}.$$

1) $\forall x\in[0,1-\delta],\forall\varepsilon>0$,要使不等式

$$\lvert S(x)-S_n(x)\rvert=\lvert R_n(x)\rvert=\frac{x^n}{1-x}\leqslant\frac{(1-\delta)^n}{\delta}<\varepsilon$$

成立. 从不等式$\frac{(1-\delta)^n}{\delta}<\varepsilon$, 解得$n>\frac{\ln\varepsilon\delta}{\ln(1-\delta)}$. 取

$N=\left[\frac{\ln\varepsilon\delta}{\ln(1-\delta)}\right]$. 于是,

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N=\left[\frac{\ln\varepsilon\delta}{\ln(1-\delta)}\right]\in\mathbf{N},\forall n>N,\forall x\in[0,1-\delta],\text{有}$$

$$\lvert S(x)-S_n(x)\rvert<\varepsilon,$$

即函数级数$\sum_{n=0}^{\infty}x^n$在$[0,1-\delta]$一致收敛.

2) $\exists\varepsilon_0=1,\forall N\in\mathbf{N},\exists n_0>N,\ \exists x_0=1-\frac{1}{n_0}\in(-1,1)$,有

$$\lvert S(x_0)-S_{n_0}(x_0)\rvert=\lvert R_{n_0}(x_0)\rvert=\frac{\left(1-\frac{1}{n_0}\right)^{n_0}}{\frac{1}{n_0}}=n_0\left(1-\frac{1}{n_0}\right)^{n_0}$$

$$\geqslant1,$$

$\left(\text{因为}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e},\text{所以}\exists n_0\in\mathbf{N},\text{使}\ n_0\left(1-\frac{1}{n_0}\right)^{n_0}\geqslant1\right)$. 即

函数级数$\sum_{n=0}^{\infty}x^n$在$(-1,1)$非一致收敛.

三、一致收敛判别法

讨论和函数的分析性质经常要判别函数级数的一致收敛性.如果函数级数的和函数或余和易于求得，判别它的一致收敛可应用上述的一致收敛定义. 有时虽然知道函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$I$收敛,但很难求得它的和函数或余和,这时要判别此函数级数在区间I的一致收敛性就需要根据函数级数自身的结构，找到判别一致收敛性的判别法.

定理 1. **(柯西一致收敛准则)** 函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$I$一致收敛$\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}, \forall n>N, \forall p\in\mathbf{N}, \forall x\in I$,有

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon.$$

证明 **必要性** $(\Rightarrow)$ 已知函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$I$一致收敛,设其和函数是$S(x)$,即

$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}, \forall n>N, \forall x\in I$,有

$$|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon.$$

也有
$$|S(x)-S_{n+p}(x)|<\varepsilon.$$

于是,
$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|$$
$$=|S_{n+p}(x)-S_n(x)|=|S_{n+p}(x)-S(x)+S(x)-S_n(x)|$$
$$\leqslant|S(x)-S_{n+p}(x)|+|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

充分性 $(\Leftarrow)$ 已知$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}, \forall n>N, \forall p\in\mathbf{N}, \forall x\in I$,有

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|=|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon.$$

从而，函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$I$收敛,设其和函数是$S(x)$. 因

为 p 是任意自然数，所以当 $p\to\infty$ 时，上述不等式，有

$$|S(x)-S_n(x)|\leqslant\varepsilon,$$

即函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 一致收敛. □

定理 2.（M 判别法） 有函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，$I$ 是区间.

若 $\forall n\in\mathbf{N}$，$\forall x\in I$，有 $|u_n(x)|\leqslant a_n$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 一致收敛.

证明 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，根据柯西收敛准则（§9.1. 定理 1），即

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbf{N},\ \forall n>N,\ \forall p\in\mathbf{N},\ 有$$
$$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}<\varepsilon.$$

由已知条件，$\forall x\in I$，有

$$\begin{aligned}&|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|\\&\leqslant|u_{n+1}(x)|+|u_{n+2}(x)|+\cdots+|u_{n+p}(x)|\\&\leqslant a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}<\varepsilon,\end{aligned}$$

即函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 一致收敛. □

例 5. 讨论函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$ 在区间 $[-1,1]$ 的一致收敛性.

解 应用定理 1. $\forall x\in[-1,1]$，即 $|x|\leqslant1$，$\forall\varepsilon>0$，要使不等

式

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|=\left|\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x^{n+2}}{n+2}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x^{n+2}}{n+2}-\frac{x^{n+3}}{n+3}\right)+\cdots+\left(\frac{x^{n+p}}{n+p}-\frac{x^{n+p+1}}{n+p+1}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x^{n+p+1}}{n+p+1}\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{n+1}+\frac{|x|^{n+p+1}}{n+p+1}$$

$$\leqslant\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+p+1}<\frac{2}{n+1}<\varepsilon$$

成立. 从不等式$\frac{2}{n+1}<\varepsilon$,解得 $n>\frac{2}{\varepsilon}-1$. 取$N=\left[\frac{2}{\varepsilon}-1\right]$. 于是,

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N=\left[\frac{2}{\varepsilon}-1\right]\in\mathbf{N}$, $\forall n>N$, $\forall p\in\mathbf{N}$, $\forall x\in[-1,1]$, 有

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon,$$

即函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$在区间$[-1,1]$一致收敛.

例6. 证明:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$在区间$[-a,a]$($a$是正数)一致收敛;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$在$R$一致收敛.

证明 1) $\forall x\in[-a,a]$, 即$|x|\leqslant a$, 有

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right|=\frac{|x|^n}{n!}\leqslant\frac{a^n}{n!}.$$

已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ 收敛, 根据定理2, 函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 在区间$[-a,a]$一致收敛.

2) $\forall x\in R$, 有

$$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right|=\left|\frac{2n^2x}{1+n^4x^2}\cdot\frac{1}{2n^2}\right|\leqslant\frac{1}{2n^2}.\text{①}$$

已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ 收敛. 根据定理 2, 函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$ 在 R 一致收敛.

注 定理 2(M 判别法)是判别函数级数一致收敛的很简便的判别法. 但是这个方法有很大的局限性, 凡能用 M 判别法判别函数级数是一致收敛, 此函数级数必然是绝对收敛; 如果函数级数是一致收敛, 而非绝对收敛, 即条件收敛, 那么就不能使用 M 判别法. 对于条件收敛的函数级数, 判别其一致收敛, 有下面的狄利克莱判别法与阿贝耳判别法.

首先给出下面几个概念:

定义 设函数列 $\{u_n(x)\}$ 的每个函数 $u_n(x)$ 都在数集 A 有定义.

1) 若 $\forall x\in A$, 数列 $\{u_n(x)\}$ 单调增加(单调减少), 则称函数列 $\{u_n(x)\}$ 在 A **单调增加(单调减少)**. 单调增加或单调减少, 统称为单调.

2) 若 $\exists M>0, \forall n\in\mathbf{N}, \forall x\in A$, 有 $|u_n(x)|\leqslant M$, 则称函数列 $\{u_n(x)\}$ 在 A **一致有界**.

3) 若 $\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}, \forall n>N, \forall x\in A$, 有 $|u_n(x)|<\varepsilon$, 则称函数列 $\{u_n(x)\}$ 在 A 一致收敛于 0.

有判别变号级数条件收敛的狄利克莱判别法和阿贝尔判别法, 完全类似地有判别函数级数一致收敛性的狄利克莱判别法和阿贝尔判别法:

定理 3. **(狄利克莱判别法)** 若函数列 $\{a_n(x)\}$ 在区间 I 单调

① 因为 $1-2n^2x+n^4x^2=(1-n^2x)^2\geqslant0$, 所以 $2n^2x\leqslant1+n^4x^2$, 即 $\frac{2n^2x}{1+n^4x^2}\leqslant1$.

减少一致收敛于 0，且函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 的部分和函数列 $\{B_n(x)\}$ 在区间 I 一致有界，则函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 一致收敛.

证明 已知函数列 $\{a_n(x)\}$ 一致收敛于 0，即

$$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}, \forall n>N, \forall x\in I, \text{有} |a_n(x)|<\varepsilon.$$

又已知函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 的部分和函数列 $\{B_n(x)\}$ 在区间 I 一致有界，即

$$\exists M>0, \forall n\in\mathbf{N}, \forall x\in I, \text{有} |B_n(x)|\leqslant M,$$

从而，有

$$|b_{n+1}(x)+b_{n+2}(x)+\cdots+b_{n+p}(x)|=|B_{n+p}(x)-B_n(x)|$$
$$\leqslant|B_{n+p}(x)|+|B_n(x)|\leqslant 2M.$$

根据阿贝尔变换（§9.1 引理），$\forall x\in I$，有

$$|a_{n+1}(x)b_{n+1}(x)+a_{n+2}(x)b_{n+2}(x)+\cdots+a_{n+p}(x)b_{n+p}(x)|$$
$$\leqslant 2M|a_{n+1}(x)|.$$

于是，$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}, \forall n>N, \forall p\in\mathbf{N}, \forall x\in I$，有

$$|a_{n+1}(x)b_{n+1}(x)+a_{n+2}(x)b_{n+2}(x)+\cdots+a_{n+p}(x)b_{n+p}(x)|$$
$$<2M\varepsilon,$$

即函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 一致收敛. □

定理 4.（阿贝尔判别法） 若函数列 $\{a_n(x)\}$ 在区间 I 单调一致有界，且函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在区间 I 一致收敛，则函数级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$在区间 I 一致收敛。

证明 不妨设函数列$\{a_n(x)\}$ 在区间 I 单调减少。已知它在区间 I 一致有界，即

$$\exists M>0, \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in I, \text{有} |a_n(x)| \leqslant M.$$

有 $\quad M \geqslant a_1(x) \geqslant a_2(x) \geqslant \cdots \geqslant a_n(x) \geqslant \cdots \geqslant -M.$

从而，$\forall x \in I$，有

$$a_1(x)+M \geqslant a_2(x)+M \geqslant \cdots \geqslant a_n(x)+M \geqslant \cdots \geqslant 0.$$

又已知函数级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$在区间 I 一致收敛，即

$\forall \varepsilon>0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n>N, \forall p \in \mathbf{N}, \forall x \in I$，有

$$|b_{n+1}(x)+b_{n+2}(x)+\cdots+b_{n+p}(x)|<\varepsilon.$$

由阿贝尔变换(§9.1 引理)，有

$$\begin{aligned}&|[a_{n+1}(x)+M]b_{n+1}(x)+[a_{n+2}(x)+M]b_{n+2}(x)+\cdots\\&\quad+[a_{n+p}(x)+M]b_{n+p}(x)| \leqslant [a_{n+1}(x)+M]\varepsilon \leqslant 2M\varepsilon,\end{aligned}$$

即函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}[a_n(x)+M]b_n(x)$在区间 I 一致收敛。

已知函数级数$\sum_{n=1}^{\infty} M b_n(x)$ 在区间 I 一致收敛(见练习题 9.2(一)第 4 题)；两个函数级数在区间 I 都一致收敛，它们的"差"在区间 I 也一致收敛(见练习题 9.2(一)第 5 题)。因此，函数级数

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}[a_n(x)b_n(x)+Mb_n(x)-Mb_n(x)]\\&=\sum_{n=1}^{\infty}[a_n(x)+M]b_n(x)-\sum_{n=1}^{\infty} M b_n(x)\end{aligned}$$

在区间 I 一致收敛。□

例 7. 证明：函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在区间 $[\delta, 2\pi-\delta](0<\delta<\pi)$ 一致收敛.

证明 $\forall x\in[\delta, 2\pi-\delta], \forall n\in\mathbf{N}$，有(见§9.1，例 12)

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|=\left|\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{1}{2}x\right|}\leqslant\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\delta}=M.$$

即函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的部分和函数列在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 一致有界，而数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 单调减少趋近于 0(当然在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 也是一致收敛于 0). 根据狄利克莱判别法，函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在区间 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 一致收敛.

例 8. 证明：若函数级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ (a_n 是常数)在 $x=r(>0)$ 收敛，则它在区间 $[0, r]$ 一致收敛.

证明 将函数级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 改写为

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n\left(\frac{x}{r}\right)^n.$$

已知级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n$ 收敛，从而它在区间 $[0, r]$ 也是一致收敛，且函数

列$\left\{\left(\frac{x}{r}\right)^n\right\}$在$[0,r]$单调减少，又一致有界，即存在$M=1$，$\forall n\in\mathbf{N}$，$\forall x\in[0,r]$，有

$$\left(\frac{x}{r}\right)^n\leqslant 1.$$

根据阿贝耳判别法，函数级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在区间$[0,r]$一致收敛.

四、函数列的一致收敛

如同数值级数与数列之间的关系一样，函数级数与函数列只是形式不同，没有本质的区别. 因为任意函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$都对应着它的部分和函数列$\{S_n(x)\}$. 反之，任意函数列$\{f_n(x)\}$，都对应着一个函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}[f_n(x)-f_{n-1}(x)]$ $(f_0(x)\equiv 0)$，此级数的部分和函数列恰是已知的函数列$\{f_n(x)\}$. 因此，关于函数级数的一致收敛概念可相应地转移到函数列上来.

设函数列$\{f_n(x)\}$的每个函数$f_n(x)$在区间I有定义. 若$\forall x\in I$，数列$\{f_n(x)\}$收敛，设它的极限是$f(x)$，即$\forall x\in I$，有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),$$

则称函数列$\{f_n(x)\}$在区间I**收敛于**$f(x)$，并称$f(x)$是函数列$\{f_n(x)\}$的**极限函数**.

定义 设函数列$\{f_n(x)\}$在区间I收敛于极限函数$f(x)$. 若$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，$\forall x\in I$，有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

则称函数列$\{f_n(x)\}$在区间I**一致收敛**或**一致收敛于极限函数**$f(x)$.

设$\forall x\in I$，$f(x)=0$，就是函数列$\{f_n(x)\}$在区间一致收敛于0.

函数列一致收敛与非一致收敛列表对比如下:

	函数列$\{f_n(x)\}$在区间 I
一致收敛于极限函数$f(x)$	$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N,\forall x\in I$,有$\lvert f_n(x)-f(x)\rvert<\varepsilon$
非一致收敛于极限函数$f(x)$	$\exists\varepsilon_0>0,\forall N\in\mathbf{N},\exists n_0>N,\exists x_0\in I$,有$\lvert f_{n_0}(x_0)-f(x_0)\rvert\geqslant\varepsilon_0$

例 9. 证明函数列$\{x^n\}$: 1) 在区间 $[0,\delta](0<\delta<1)$ 一致收敛; 2) 在区间$[0,1)$非一致收敛.

证明 $\forall x\in[0,1)$,有

$$\lim_{n\to\infty}x^n=0,$$

即函数列$\{x^n\}$在$[0,1)$的极限函数 $f(x)\equiv 0$.

1) $\forall x\in[0,\delta],\forall\varepsilon>0$,要使不等式

$$|f_n(x)-f(x)|=|x^n-0|=|x|^n\leqslant\delta^n<\varepsilon$$

成立,从不等式 $\delta^n<\varepsilon$,解得 $n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln\delta}$. 取 $N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln\delta}\right]$. 于是,

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln\delta}\right]\in\mathbf{N}.\ \forall n>N,\text{有}\ |x^n-0|<\varepsilon,$$

即函数列$\{x^n\}$在$[0,\delta]$一致收敛.

2) $\exists\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0,\forall N\in\mathbf{N},\exists n_0>N,\ \exists x_0=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n_0}}\in[0,1)$,有

$$|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n_0}}\right]^{n_0}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

即函数列$\{x^n\}$在$[0,1)$非一致收敛.

仿照函数级数的柯西一致收敛准则,不难平行地写出函数列的柯西一致收敛准则:

定理 1′(柯西一致收敛准则) 函数列$\{f_n(x)\}$在区间 I 一致收敛$\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N,\forall p\in\mathbf{N},\forall x\in I$,有

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon.$$

函数列的一致收敛判别法原则上与函数级数的一致收敛判别法是平行的. 由于二者形式上的区别，它们各有比较简便的一致收敛判别法.

一般来说，函数列$\{f_n(x)\}$在区间 I 收敛，它的极限函数较易求得. 因此判别函数列$\{f_n(x)\}$ 在区间 I 的一致收敛性经常使用如下的判别法:

定理 5. 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 一致收敛于极限函数 $f(x) \Longleftrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{x\in I}|f(x)-f_n(x)|\}=0.$$

证明 必要性($\Rightarrow$)已知函数列$\{f_n(x)\}$ 在区间 I 一致收敛于极限函数 $f(x)$，即

$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}, \forall n>N, \forall x\in I$, 有

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon,$$

从而，
$$\sup_{x\in I}|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{x\in I}|f(x)-f_n(x)|\}=0.$$

充分性 ($\Leftarrow$) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\{\sup\limits_{x\in I}|f(x)-f_n(x)|\}=0$, 即

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}, \forall n>N$, 有

$$\sup_{x\in I}|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon.$$

从而，$\forall x\in I$, 有 $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$.

即函数列$\{f_n(x)\}$在区间 I 一致收敛于极限函数 $f(x)$. □

例 10. 判别下列函数列在区间$[0,1]$的一致收敛性:

1) $\left\{\dfrac{nx}{1+n+x}\right\}$. 2) $\{nx(1-x)^n\}$.

解 1) $\forall x\in[0,1]$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n+x}=x,$$

即极限函数 $f(x)=x$.

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{nx}{1+n+x}-x\right|$$

$$=\sup_{x\in[0,1]}\frac{x(1+x)}{1+n+x}\leqslant\frac{2}{n}.$$

显然，$\lim\limits_{n\to\infty}\{\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|\}=0$，即函数列$\left\{\frac{nx}{1+n+x}\right\}$在[0, 1]一致收敛.

2) $\forall x\in[0,1]$，有

$$\lim_{n\to\infty}nx(1-x)^n=0,$$

即极限函数 $f(x)\equiv 0$. 设函数 $\varphi(x)=|f_n(x)-f(x)|=nx(1-x)^n$.

函数 $\varphi(x)$在闭区间[0, 1]连续，必取最大值.

$$\varphi'(x)=n(1-x)^{n-1}[1-(n+1)x].$$

令 $\varphi'(x)=0$，解得稳定点 1 与$\frac{1}{n+1}$.

$$\varphi(0)=\varphi(1)=0,\quad \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

于是，$\frac{1}{n+1}\in[0,1]$是函数 $\varphi(x)$ 的极大点，最大值（极大值）是$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|\}=\lim_{n\to\infty}\{\sup_{x\in[0,1]}\varphi(x)\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{1}{e}\neq 0,$$

即函数列$\{nx(1-x)^n\}$在[0, 1]非一致收敛.

练 习 题 9.2(一)

1. 判别下列函数级数在指定区间的一致收敛或非一致收敛：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$, ① 在$[0,1]$； ② 在$[0,\delta]$ （其中 $0<\delta<1$）。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$, 在$(0,+\infty)$.

$\left(提示：\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}=\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}.\right)$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$, 在$(0,+\infty)$.

2. 判别下列函数级数在指定区间的一致收敛或非一致收敛：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$, 在$\mathbf{R}$上.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$, 在$(-2,+\infty)$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$, 在$\mathbf{R}$上.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, 在$\mathbf{R}$上.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$, 在$(0,+\infty)$.

3. 证明：若函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ 在区间 I 一致收敛，则函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在区间 I 也一致收敛. 反之是否成立？考虑函数级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n,\quad x\in[0,1].$$

4. 证明：若函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$[a,b]$一致收敛，且函数 $\varphi(x)$在$[a,b]$有界，则函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(x)f_n(x)$在$[a,b]$也一致收敛.

5. 证明：若函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$与$\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$在区间$I$都一致收敛，则函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}[af_n(x)+bg_n(x)]$在区间$I$也一致收敛，其中$a$与$b$是常数。

6. 证明：若函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$与$\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$在区间$I$都一致收敛，且函数列$\{f_n(x)\}$与$\{g_n(x)\}$在区间$I$都一致有界，则函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)g_n(x)$在区间$I$一致收敛。

7. 证明：函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$在R一致收敛，但是$\forall x\in$R非绝对收敛。函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$，$\forall x\in$R都绝对收敛，但是在R非一致收敛。它说明了什么？

8. 证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛，则函数级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

在R一致收敛。

9. 证明：若函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$I$一致收敛，则函数列$\{u_n(x)\}$在区间$I$一致收敛于0. 反之是否成立？考虑函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$在区间$(0,1)$的情况。

10. 证明：若函数$f(x)$在(a,b)有连续导数$f'(x)$，且

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right],$$

则函数列$\{f_n(x)\}$在$[\alpha,\beta]\subset(a,b)$一致收敛于函数$f'(x)$。

11. 证明：若函数列$\{f_n(x)\}$在区间$I_i\ (i=1,2,\cdots,m)$都一致收敛，则函

数列$\{f_n(x)\}$在$\bigcup_{i=1}^{m} I_i$也一致收敛。

12. 证明：若$\forall n\in\mathbf{N}$，$\exists a_n>0$，$\forall x\in I$（区间），有

$$|f_{n+1}(x)-f_n(x)|\leqslant a_n,$$

且$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则函数列$\{f_n(x)\}$在区间I一致收敛。

13. 判别下列函数列在指定区间的一致收敛或非一致收敛：

(1) $f_n(x)=\frac{1}{x+n}$，在$(0,+\infty)$。 (2) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$，在$\mathbf{R}$上。

(3) $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$，在$\mathbf{R}$上。 (4) $f_n(x)=\sin\frac{x}{n}$，在$\mathbf{R}$上。

(5) $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$， ① 在$[0,1-\delta]$； ② 在$[1-\delta,1+\delta]$；

③ 在$[1+\delta,+\infty)$，其中$0<\delta<1$.

14. 描绘下列函数列$\{f_n(x)\}$的图象，并求其极限函数。证明函数列$\{f_n(x)\}$在$\mathbf{R}$非一致收敛：

$$f_n(x)=\begin{cases}-1, & x\leqslant -\frac{1}{n},\\ nx, & -\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n},\\ 1, & \frac{1}{n}\leqslant x.\end{cases}$$

15. 证明：若函数$f_0(x)$在$[0,a]$连续，$\forall n\in\mathbf{N}$，有$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt$，$0\leqslant x\leqslant a$，则函数列$\{f_n(x)\}$在$[0,a]$一致收敛于0.（提示：$\exists M>0$，$\forall x\in[0,a]$，有$|f_0(x)|\leqslant M$. $|f_1(x)|\leqslant\int_0^x|f_0(t)|dt\leqslant Mx$，又有$|f_2(x)|\leqslant M\frac{x^2}{2!}$，…）

* * * *

16. 证明：函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$在区间$[-a,a]$ $(a>0)$一致收敛，在$\mathbf{R}$非一致收敛.

17. 证明：若$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{k}{n}\right)$，其中函数$f(x)$在$\mathbf{R}$连续，则函

数列$\{f_n(x)\}$在任意区间$[a,b]$都一致收敛.

18. 证明：若函数列$\{f_n(x)\}$在区间I一致收敛于$f(x)$，而每个函数$f_n(x)$在区间I有界，则函数列$\{f_n(x)\}$在区间I一致有界

19. 证明：若$\forall n\in\mathbf{N}$，函数$\varphi_n(x)$在$[a,b]$单调，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(a)$与$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(b)$都绝对收敛，则函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$在$[a,b]$一致收敛.

20. 证明：若连续函数列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$一致收敛于$f(x)$，$\forall n\in\mathbf{N}$，$x_n\in[a,b]$，且$x_n\to x\ (n\to\infty)$，则

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x).$$

21. 证明：若$f_1(x)=f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$\forall n\in\mathbf{N}$，$f_{n+1}(x)=f[f_n(x)]$，则函数列$\{f_n(x)\}$在$\mathbf{R}$一致收敛于0.（提示：见练习题1.3第10题）.

五、和函数的分析性质

定理6. 若函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$I$一致收敛于和函数$S(x)$，且$\forall n\in\mathbf{N}$，$u_n(x)$在区间$I$连续，则和函数$S(x)$在区间$I$也连续.

证法　只须证明：和函数$S(x)$在$\forall x_0\in I$连续，即$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$（找到δ），$\forall x\in I$：$|x-x_0|<\delta$，有$|S(x)-S(x_0)|<\varepsilon$.

估算$|S(x)-S(x_0)|$要借助与和函数$S(x)$有密切联系的部分和函数$S_n(x)$.

证明　$\forall x_0\in I$. 已知函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$I$一致收敛于和函数$S(x)$，即$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，$\forall x\in I$，有

$$|S(x)-S_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

取定自然数$m>N$，$\forall x\in I$，有

$$|S(x)-S_m(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

从而，
$$|S(x_0)-S_m(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

已知部分和函数 $S_m(x)$ 在区间 I 连续，从而在 x_0 必连续，即对上述同样 $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall x\in I$: $|x-x_0|<\delta$, 有

$$|S_m(x)-S_m(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是，
$$\begin{aligned}|S(x)-S(x_0)| &= |S(x)-S_m(x)+S_m(x)-S_m(x_0)\\&\quad+S_m(x_0)-S(x_0)|\\&\leqslant|S(x)-S_m(x)|+|S_m(x)-S_m(x_0)|\\&\quad+|S_m(x_0)-S(x_0)|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\end{aligned}$$

即和函数 $S(x)$ 在 x_0 连续，从而和函数 $S(x)$ 在区间 I 连续. □

$\forall x_0\in I$, 定理 6 可写成

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\lim_{x\to x_0}S(x)=S(x_0)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}u_n(x).$$

定理 6 指出，在函数级数一致收敛的条件下，极限运算与无限和运算可以交换次序.

定理 7. 若函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 一致收敛于和函数 $S(x)$，且 $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则和函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，且

$$\int_a^b S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx.$$

简称逐项积分.

证法 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b u_k(x)dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right]dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx.$$

只须证明, $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}, \forall n>N$, 有

$$\left|\int_a^b S(x)dx-\int_a^b S_n(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|S(x)-S_n(x)|dx<\varepsilon.$$

估算 $\int_a^b|S(x)-S_n(x)|dx$ 要用到函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 一致收敛于和函数 $S(x)$.

证明 根据定理 6, 和函数 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 从而和函数 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 可积.

已知函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 一致收敛于和函数 $S(x)$, 即 $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}, \forall n>N, \forall x\in[a, b]$, 有

$$|S(x)-S_n(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

于是,

$$\left|\int_a^b S(x)dx-\int_a^b S_n(x)dx\right|=\left|\int_a^b[S(x)-S_n(x)]dx\right|$$

$$\leqslant\int_a^b|S(x)-S_n(x)|dx<\frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx=\varepsilon,$$

即

$$\int_a^b S(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx. \square$$

定理 7 可改写成

$$\int_a^b\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx.$$

定理 7 指出，在函数级数一致收敛的条件下，定积分运算与无限和运算可以交换次序.

定理 8. 若函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 满足下列条件:

1) 收敛于和函数 $S(x)$，即 $\forall x\in I$，有 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$;

2) $\forall n\in\mathbf{N}$，$u_n(x)$ 有连续导函数;

3) 导函数的函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$ 一致收敛，

则和函数 $S(x)$ 在区间 I 有连续导函数，且

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x).$$

简称逐项微分.

证法　设 $p(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$. 只须证明 $p(x)=S'(x)$.

应用逐项积分(定理 7)证明.

证明　已知函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$ 在区间 I 满足定理 6 的条件，于是它有和函数 $p(x)$，且 $\forall x\in I$，

$$p(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$$

在区间 I 连续. 任意取定 $a\in I$，$\forall x\in I$，根据定理 7，有

$$\int_a^x p(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u'_n(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\Big|_a^x$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x)-u_n(a)]=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)-\sum_{n=1}^{\infty}u_n(a)$$
$$=S(x)-S(a).$$

对上述等式的两端对 x 求导数，有

$$p(x)=S'(x),$$

即和函数 $S(x)$在区间 I 有连续导函数，且

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x).\quad \square$$

定理 8 可改写成

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}u_n(x).$$

定理 8 指出，在$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$一致收敛的条件下，求导运算与无限和运算可以交换次序.

例 11. 讨论(和)函数

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

的定义域，以及它在定义域的连续性与可微性.

解 函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$是广义调和级数，已知 $x>1$ 收敛；$\forall x\leqslant 1$，发散，即函数 $\zeta(x)$的定义域是区间$(1,+\infty)$.

$\forall y\in(1,+\infty)$，$\exists\delta>0$，有 $1+\delta\leqslant y<+\infty$. 已知 $\forall x\in[1+\delta,+\infty)$，有

$$\frac{1}{n^x}\leqslant\frac{1}{n^{1+\delta}}.$$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta}}$收敛，由 M 判别法，函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$在$[1+\delta,+\infty)$

一致收敛. $\forall n\in\mathbf{N}$, 函数$\frac{1}{n^x}$在$[1+\delta, +\infty)$连续. 根据定理 6, 函数 $\zeta(x)$在$[1+\delta, +\infty)$连续, 从而, 函数 $\zeta(x)$在 y 连续. 因为 y 是$(1, +\infty)$任意一点, 所以函数 $\zeta(x)$在其定义域$(1, +\infty)$连续.

对函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$的每项求导数, 得新级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^x}\right)'=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}.$$

$\forall y\in(1, +\infty)$, $\exists\delta>0$, 有 $1+\delta\leq y<+\infty$. 已知 $\forall x\in[1+\delta, +\infty)$, 有

$$\frac{\ln n}{n^x}\leq\frac{\ln n}{n^{1+\delta}}.$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{1+\delta}}\Big/\frac{1}{n^{1+\frac{\delta}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{\delta}{2}}}=0.$$

已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{\delta}{2}}}$收敛, 根据 § 9.1定理 6 的推论, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{1+\delta}}$也收敛, 由 M 判别法, 函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^x}\right)'$在$[1+\delta, +\infty)$一致收敛. 根据定理 8, 函数 $\zeta(x)$在$[1+\delta, +\infty)$有连续导函数. 从而函数 $\zeta(x)$在 y 有连续的导函数. 因为 y 是$(1, +\infty)$任意一点, 所以函数 $\zeta(x)$在定义域$(1, +\infty)$有连续导函数, 且

$$\zeta'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^x}\right)'=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}.$$

同法可证, 函数 $\zeta(x)$在其定义域$(1, +\infty)$存在任意阶连续导函数.

注 函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$在区间$(1, +\infty)$并非一致收敛, 可是我们

却得到它的和函数 $\zeta(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 连续. 这是因为证明函数在区间连续，只须证明函数在该区间每一点连续即可. 尽管函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 非一致收敛，但是，$\forall y\in(1, +\infty)$，$\exists\delta>0$，使 $y\in[1+\delta, +\infty)$. 不难证明，函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在区间 $[1+\delta, +\infty)$ 一致收敛. 从而 $\zeta(x)$ 在点 y 连续. 因为 y 是区间 $(1, +\infty)$ 任意一点，所以和函数 $\zeta(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 连续.

例 12. 讨论函数 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}r^n\cos nx(|r|<1)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 的积分.

解 $\forall x\in[0, 2\pi]$，有 $|r^n\cos nx|\leqslant|r|^n$. 已知级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|r|^n$ 收敛，由 M 判别法，函数级数 $\sum_{n=0}^{\infty}r^n\cos nx$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 一致收敛. $\forall n\in\mathbb{N}$，函数 $r^n\cos nx$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 连续. 根据定理 7，有

$$\int_0^{2\pi}S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}r^n\cos nx dx.$$

已知

$$\int_0^{2\pi}dx=2\pi, \quad \int_0^{2\pi}\cos nx dx=0 \quad (n=1, 2, \cdots),$$

有

$$\int_0^{2\pi}S(x)dx=\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}r^n\cos nx dx=2\pi.$$

函数列的极限函数的分析性质类似于函数级数的定理 6、定理 7 和定理 8. 将它们抄录如下，证明从略.

定理 6'. 若函数列$\{f_n(x)\}$在区间 I 一致收敛于极限函数 $f(x)$，且 $\forall n\in\mathbf{N}$，$f_n(x)$在区间 I 连续，则极限函数 $f(x)$在区间 I 连续.

$\forall x_0\in I$，定理 6' 可写成

$$\lim_{x\to x_0}[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]=\lim_{n\to\infty}[\lim_{x\to x_0}f_n(x)].$$

定理 7'. 若函数列$\{f_n(x)\}$在$[a, b]$一致收敛于极限函数 $f(x)$，且 $\forall n\in\mathbf{N}$，$f_n(x)$在$[a,b]$连续，则极限函数 $f(x)$在$[a,b]$可积，且

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

或
$$\int_a^b\Big[\lim_{n\to\infty}f_n(x)\Big]dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

简称**积分号下取极限**.

定理 8'. 若函数列$\{f_n(x)\}$在区间 I 满足下列条件：

1） 收敛于极限函数 $f(x)$，即 $\forall x\in I$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$；

2） $\forall n\in\mathbf{N}$，$f_n(x)$有连续导函数；

3） 导函数的函数列$\{f'_n(x)\}$一致收敛，

则极限函数$f(x)$在区间 I 有连续导函数，且

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty}f'_n(x)$$

或
$$\frac{d}{dx}\Big[\lim_{n\to\infty}f_n(x)\Big]=\lim_{n\to\infty}\Big[\frac{d}{dx}f_n(x)\Big].$$

简称**微分号下取极限**.

练 习 题 9.2(二)

1. **证明：** 函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{-\frac{x^2}{n^2}}$ 在$[0,+\infty)$连续.

2. 证明：函数 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 连续.

3. 设函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2$，求 $\lim_{x\to 1}f(x)$.

4. 设函数 $\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$，求 $\int_0^{\pi}\varphi(x)dx$.

5. 证明：函数列 $f_n(x)=\frac{nx}{nx+1}$ 在 $[0,1]$ 非一致收敛，却有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx.$$

这说明了什么？

6. 设 $f_n(x)=\frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2)$. 证明：函数列 $\{f_n'(x)\}$ 在 $[0,1]$ 非一致收敛，却有

$$\frac{d}{dx}[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{d}{dx}f_n(x)\right].$$

这说明了什么？

7. 设 $h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n^4x^2}$，求 $h'(x)$.

8. 证明：函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}$ 在 $\mathbf{R}$ 有连续二阶导函数，并求 $f''(x)$.

9. 证明：若函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $\mathbf{R}$ 一致收敛于极限函数 $f(x)$，且 $\forall n\in\mathbf{N}$，函数 $f_n(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 一致连续，则函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 也一致连续.

10. 证明：若函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在开区间 (a,b) 一致收敛于和函数 $S(x)$，且 $\forall n\in\mathbf{N}$，函数 $u_n(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，则和函数 $S(x)$ 在闭区间连续.

*　　*　　*　　*

11. 证明：若函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛于和函数 $S(x)$，且 $\forall n\in\mathbf{N}$，函数 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则和函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 也可积.

12 证明：若函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 满足定理 $8'$ 的条件，则函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛．

13．证明：若函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 有任意阶导函数，且函数列 $\{f^{(n)}(x)\}$ 在 $\mathbb{R}$ 一致收敛于极限函数 $\varphi(x)$，则

$$\varphi(x)=ce^x,$$

其中 c 是常数．

14．验证：

(1) $\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}-\mathbf{Q}.\end{cases}$

(2) $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^2 m!\pi x\cos^{2n}m!\pi x=\begin{cases}0, & x\in\mathbf{Q},\\ 1, & x\in\mathbb{R}-\mathbf{Q}.\end{cases}$

注 (1) 是狄利克莱函数 $D(x)$ 的解析式．

§9.3. 幂 级 数

在函数级数中有一类结构简单、应用广泛的特殊的函数级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(y-a)^n=a_0+a_1(y-a)+a_2(y-a)^2+\cdots+a_n(y-a)^n+\cdots,$$

称为**幂级数**，其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$ 都是常数，称为**幂级数的系数**．

如果令 $y-a=x$，上面的幂级数就化为最简形式的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots. \qquad (1)$$

为了书写简便，下面主要讨论幂级数(1)．

幂级数(1)的每一项都是非负整数幂的幂函数，这就是幂级数名称的来源．可以形象地把幂级数(1)看作是按自变数 x 升幂排列的"无穷次多项式"．由幂级数所定义的这类函数，它在许多方面几乎与多项式类似．虽然幂级数的和函数可能很复杂，但是总可用它的部分和—— n 次多项式函数近似代替其和函数，其误差

可达到任意精确程度.

本节讨论幂级数的两个问题：一是幂级数的和函数的分析性质；二是将函数"展成"幂级数的条件和展开公式.

一、幂级数的收敛域

显然，任意幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{1}$$

在 0 都收敛. 关于幂级数(1)的收敛有下面定理：

定理 1.（阿贝尔第一定理）

1) 若幂级数(1)在 $x_0 \neq 0$ 收敛，则幂级数(1)在 $\forall x: |x| < |x_0|$ 都绝对收敛.

2) 若幂级数(1)在 x_1 发散，则幂级数(1)在 $\forall x: |x| > |x_1|$ 都发散.

证明 1) 已知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛，由收敛的必要条件，有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$. 从而，数列 $\{a_n x_0^n\}$ 有界，即 $\exists M > 0, \forall n = 0, 1, 2, \cdots$，有

$$|a_n x_0^n| \leqslant M.$$

$\forall x: |x| < |x_0|$，即 $\left|\dfrac{x}{x_0}\right| < 1$，有

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| \leqslant M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

已知几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M\left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n \left(公比\left|\dfrac{x}{x_0}\right| < 1\right)$ 收敛. 于是，幂级数(1)在 $\forall x: |x| < |x_0|$ 都绝对收敛.

2) 用反证法 假设 $\exists \xi: |\xi| > |x_1|$，幂级数(1)在 ξ 收敛，由 1)，幂级数(1)在 x_1（绝对）收敛，与已知条件矛盾，即幂级数(1)在 $\forall x: |x| > |x_1|$ 都发散. □

定理 1 指出，幂级数(1)的收敛点与发散点在数轴上不能混杂交错出现．如图 9.2.



图 9.2

由此不难想到，若幂级数 (1) 既有非 0 的收敛点又有发散点，那么数轴上必存在关于原点 0 对称的两个点 $-r$ 与 $r(r>0)$，它们是幂级数(1)的收敛点集和发散点集的分界点．显然，这个正数 r 就是幂级数(1)收敛点集的上确界，即

$$r=\sup\{x \mid x \text{ 是幂级数(1)的收敛点}\}.$$

不难证明，幂级数(1)在 $\forall x:|x|<r$ 绝对收敛；在 $\forall x:|x|>r$ 发散．这个 r 称为幂级数(1)的**收敛半径**.

事实上，$\forall x:|x|<r$，由上确界定义，$\exists \eta:|x|<\eta<r$．已知幂级数(1)在 η 收敛，根据定理 1，$\forall x:|x|<r$ 幂级数(1)绝对收敛；$\forall x:|x|>r$，显然，幂级数(1)在 x 发散(否则，与收敛半径 r 的定义矛盾)．因此，$\forall x:|x|>r$ 幂级数(1)发散.

我们作如下的规定：若幂级数(1)仅在原点 0 收敛，则它的收敛半径 $r=0$；若幂级数(1)在 $\mathbf{R}$ 收敛，则它的收敛半径 $r=+\infty$．于是，任意幂级数都有唯一一个收敛半径 $r(0\leqslant r\leqslant+\infty)$.

设幂级数(1)的收敛半径是 $r(0<r<+\infty)$，那么 $\forall x\in(-r,r)$ 幂级数(1)都绝对收敛．在开区间$(-r,r)$的两个端点$-r$ 与 r，幂级数(1)可能收敛也可能发散，将由幂级数(1)本身确定．因此幂级数(1)的收敛域必是收敛区间，只能是四类区间：$(-r,r)$，$(-r,r]$，$[-r,r)$，$[-r,r]$之一.

幂级数(1)，即$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，由它的系数数列$\{a_n\}$所确定．因此幂

级数(1)的收敛半径 r 也必由它的系数数列$\{a_n\}$唯一确定. 怎样求幂级数(1)的收敛半径呢？有下面定理：

定理 2. 有幂级数(1)，即$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，若

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l \quad (\text{或}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l),$$

则幂级数(1)的收敛半径

$$r=\begin{cases}\dfrac{1}{l}, & 0<l<+\infty,\\ +\infty, & l=0,\\ 0, & l=+\infty.\end{cases}$$

证明 讨论正项级数$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$. 根据§9.1达朗倍尔判别法(或柯西判别法)，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| = l|x|.$$

1) $0<l<+\infty$，当 $l|x|<1$ 或$|x|<\frac{1}{l}$，幂级数(1)绝对收敛；当 $l|x|>1$ 或$|x|>\frac{1}{l}$，幂级数(1)发散. 于是，收敛半径 $r=\frac{1}{l}$.

2) $l=0$，$\forall x\in\mathbf{R}$，有 $l|x|=0<1$，即 $\forall x\in\mathbf{R}$，幂级数(1)绝对收敛. 于是，收敛半径 $r=+\infty$.

3) $l=+\infty$，$\forall x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq 0$，有 $l|x|=+\infty$，即 $\forall x\in\mathbf{R}$，$x\neq 0$，幂级数(1)发散. 于是，收敛半径 $r=0$. □

例 1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n$ 的收敛半径，并讨论收敛区间.

解 已知 $a_n=\frac{2^n}{n}$， $a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{n+1}$.

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{n+1}\Big/\frac{2^n}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2.$$

于是，收敛半径 $r=\frac{1}{2}$.

幂级数在区间$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$端点的敛散性须分别讨论：

$x=\frac{1}{2}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

$x=-\frac{1}{2}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛.

于是，幂级数的收敛区间是$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

例 2. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ 的收敛半径.

解 已知 $a_n=\frac{1}{n!}$， $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$.

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)!}\Big/\frac{1}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

于是，收敛半径 $r=+\infty$，即收敛域是 R.

例 3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n^nx^n$ 的收敛半径.

解 已知 $a_n=n^n$， $a_{n+1}=(n+1)^{n+1}$.

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=+\infty.$$

于是，收敛半径 $r=0$，即仅在 0 收敛，收敛域是$\{0\}$.

例 4. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(x-2)^n$ 的收敛半径，并讨论收敛区间.

解 设 $x-2=y$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(x-2)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}y^n$.

已知 $a_n=\frac{1}{n^2}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}$.

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)^2}\Big/\frac{1}{n^2}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=1,$$

即幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}y^n$ 的收敛半径是 1. $y=\pm1$, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}y^n$ 都收敛. 因此幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}y^n$ 的收敛区间是$[-1, 1]$. 于是, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(x-2)^n$ 的收敛区间是$[1,3]$.

二、幂级数和函数的分析性质

设幂级数(1), 即 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $r>0$. 幂级数(1)在收敛区间确定了一个和函数 $S(x)$, 即

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

为了讨论和函数 $S(x)$的分析性质, 首先要讨论幂级数(1)的一致收敛性. 一般来说, 幂级数在其收敛区间不一定一致收敛. 例如, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 在收敛区间$(-1,1)$并不一致收敛(见§9.2 例 4), 但是却有下面的定理:

定理 3. (**阿贝尔第二定理**)若幂级数(1)的收敛半径 $r>0$, 则幂级数(1)在任意闭区间$[-a,a]\subset(-r,r)$都一致收敛.

证明 $\forall x\in[-a,a]$, 即 $|x|\leqslant a$ $(0<a<r)$, 有

$$|a_nx^n|\leqslant|a_n|a^n.$$

已知级数$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|a^n$收敛．根据$M$判别法，幂级数(1)在闭区间$[-a,a]$一致收敛．□

由此可见，虽然幂级数在其收敛区间不一定一致收敛，但是它在收敛区间内的任意闭区间都一致收敛．幂级数的这个性质称为**内闭一致收敛**．

定理 4． 若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$与$\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$的收敛半径分别是正数$r_1$与$r_2$，则$r_1=r_2$.

证法 首先证明$r_1\leqslant r_2$，即往证，若x_0是$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛点，则$x_0$也是$\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'$的收敛点．其次证明$r_1\geqslant r_2$．于是$r_1=r_2$.

证明 证明$r_1\leqslant r_2$．$\forall x_0:0<|x_0|<r_1$，$\exists x_1:|x_0|<|x_1|<r_1$．已知级数$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx_1^n|$收敛．$\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$|na_nx_0^{n-1}|=\frac{n}{|x_0|}\left|\frac{x_0}{x_1}\right|^n|a_nx_1^n|.$$

已知极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{|x_0|}\left|\frac{x_0}{x_1}\right|^n=0$①，从而数列$\left\{\frac{n}{|x_0|}\left|\frac{x_0}{x_1}\right|^n\right\}$有界，即

$$\exists M>0,\ \forall n\in\mathbf{N},\ 有\frac{n}{|x_0|}\left|\frac{x_0}{x_1}\right|^n\leqslant M.$$

---

① 已知$\left|\frac{x_0}{x_1}\right|<1$，根据达朗倍尔判别法，不难判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}n\left|\frac{x_0}{x_1}\right|^n$收敛．由级数收敛的必要条件，有$\lim\limits_{n\to\infty}n\left|\frac{x_0}{x_1}\right|^n=0$.

于是，
$$|na_nx_0^{n-1}|\leqslant M|a_nx_1^n|.$$

根据比较判别法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx_0^{n-1}$绝对收敛，即 $r_1\leqslant r_2$.

同法证明，$r_1\geqslant r_2$. $\forall x_0: 0<|x_0|<r_2$，$\exists x_1: |x_0|<|x_1|<r_2$. 已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}|na_nx_1^{n-1}|$收敛. $\forall n\in\mathbf{N}$，有
$$|a_nx_0^n|=\frac{|x_0|}{n}\left|\frac{x_0}{x_1}\right|^{n-1}|na_nx_1^{n-1}|.$$

已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x_0|}{n}\left|\frac{x_0}{x_1}\right|^{n-1}=0$，从而数列$\left\{\frac{|x_0|}{n}\left|\frac{x_0}{x_1}\right|^{n-1}\right\}$有界，即
$$\exists M>0, \forall n\in\mathbf{N}, 有\quad \frac{|x_0|}{n}\left|\frac{x_0}{x_1}\right|^{n-1}\leqslant M.$$

于是，
$$|a_nx_0^n|\leqslant M|na_nx_1^{n-1}|.$$

根据比较判别法，级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$绝对收敛，即 $r_1\geqslant r_2$.

综上所证，$r_1=r_2$. □

推论 若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$与$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$的收敛半径分别是 r_1 与 r_2，则 $r_1=r_2$.

证明 因为$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，根据定理 4，所以
$$r_1=r_2. \quad □$$

注 虽然幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'$，$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^n dt$ 的收敛半径相等，但是它的收敛域，即收敛区间可能不相同. 例如，幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$，　　收敛半径$r=1$，收敛区间是$[-1,1]$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n^2}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}\qquad 收敛半径 r=1,收敛区间是[-1,1).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n^2}\right)''=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n}x^{n-2}\quad 收敛半径 r=1,收敛区间是(-1,1)$$

定理 5. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $r>0$，则它的和函数 $S(x)$在区间$(-r,r)$连续.

证明 $\forall x\in(-r,r),\exists\eta>0$,使 $x\in[-\eta,\eta]\subset(-r,r)$. 已知幂级数内闭一致收敛,根据§9.2定理6，和函数 $S(x)$在 x 连续,从而,和函数 $S(x)$在区间$(-r,r)$连续.

推论 若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $r>0$,且在 $r(-r)$收敛,则和函数 $S(x)$在 $r(-r)$左连续(右连续),且

$$\lim_{x\to r^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n\quad\left(\lim_{x\to -r^+}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-r)^n\right).$$

证明 由§9.2例8,幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在区间$[0,r]$一致收敛.根据§9.2定理6,和函数 $S(x)$在 r 左连续,且

$$\lim_{x\to r^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\lim_{x\to r^-}x^n)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n=S(r).$$

同法可证在$-r$ 的情况. □

定理 6. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $r>0$,则 $\forall x\in(-r,r)$,它的和函数 $S(x)$由 0 到 x 可积,且可逐项积分,即

$$\int_0^x S(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^n\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

证明 $\forall x\in(-r,r)$, $\exists\eta>0$, 使 $x\in[-\eta,\eta]\subset(-r,r)$. 已知幂级数内闭一致收敛. 根据 §9.2 定理 7, 和函数 $S(x)$ 由 0 到 x 可积, 且可逐项积分, 即

$$\int_0^x S(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

根据定理 4, 此幂级数的收敛半径也是 r. □

定理 7. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $r>0$, 则它的和函数 $S(x)$在区间$(-r,r)$可导, 且可逐项微分, 即 $\forall x\in(-r,r)$, 有

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}.$$

证明 根据定理 4, 幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$的收敛半径也是 r. $\forall x\in(-r,r)$, $\exists\eta>0$, 使 $x\in[-\eta,\eta]\subset(-r,r)$. 已知幂级数内闭一致收敛. 根据 §9.2 定理 8, 和函数 $S(x)$在 x 可导, 从而和函数 $S(x)$在区间$(-r,r)$可导, 且可逐项微分, 即 $\forall x\in(-r,r)$, 有

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}.\quad \square$$

逐次应用定理 7 与定理 4, 有

推论 若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $r>0$, 则它的和函数 $S(x)$在区间$(-r,r)$存在任意阶导数, 且 $\forall x\in(-r,r)$, $\forall k\in\mathbb{N}$, 有

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)^{(k)}=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k},$$

此幂级数的收敛半径也是 r.

由定理 1～7 看到，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$（收敛半径 $r>0$）具有以下性质：

1. 收敛域是以原点为心的区间（可能是开区间、闭区间、半开区间，特殊情况可能是 $\mathbb{R}$ 或退化为原点）。

2. 在区间 $(-r,r)$ 内闭一致收敛。

3. 和函数在区间 $(-r,r)$ 连续。

4. 和函数在任意闭区间 $[a,b]\subset(-r,r)$ 可积，且可逐项积分，特别是，$\forall x\in(-r,r)$，由 0 到 x 可逐项积分，逐项积分得到的幂级数的收敛半径也是 r。

5. 和函数在区间 $(-r,r)$ 存在任意阶导函数，且可逐项微分。逐项微分得到的幂级数的收敛半径也是 r。

例 5. 求下列幂级数的和函数：

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}. \qquad 2)\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

解 1) 不难计算它的收敛半径是 1.

设它的和函数是 $f(x)$，即 $\forall x\in(-1,1)$，有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots.$$

根据定理 7，逐项微分，有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=1-x+x^2-x^3+\cdots=\frac{1}{1+x}.$$

$\forall x\in(-1,1)$，对上式等号两端从 0 到 x 积分，有

$$\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\frac{dt}{1+t} \quad 或 \quad f(x)-f(0)=\ln(1+x).$$

已知 $f(0)=0$. 于是，$f(x)=\ln(1+x)$，即 $\forall x\in(-1,1)$，有

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots.$$

根据定理 5 的推论．当 $x=1$ 时，有

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots.$$

2) 不难计算它的收敛半径也是 1.

设它的和函数是 $f(x)$，即 $\forall x\in(-1,1)$，有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots.$$

根据定理 6，$\forall x\in(-1,1)$，从 0 到 x 逐项积分，有

$$\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\int_0^x t^n dt=\int_0^x dt+2\int_0^x t dt+3\int_0^x t^2 dt+\cdots$$

$$=x+x^2+x^3+x^4+\cdots=\frac{x}{1-x}.$$

对上式等号两端求导数，有

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2},$$

即
$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots.$$

例 6. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ 的和函数.

解 不难计算幂级数的收敛半径是 1，

设它的和函数是 $f(x)$，即 $\forall x\in(-1,1)$，有 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$. 为了逐项积分，将它改写为

$$\frac{f(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2(\lim_{x\to 0}x^{n-1})=1.$$

将函数$\frac{f(x)}{x}$在 0 作连续开拓$\left(x=0,\ 定义\frac{f(x)}{x}=1\right)$.

$\forall x\in(-1,1)$，从 0 到 x 逐项积分，有

$$\int_0^x\frac{f(t)}{t}dt=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\int_0^x t^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

$$=x(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots).$$

由例 5，2)，有

$$\int_0^x\frac{f(t)}{t}dt=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

对上式等号两端求导数，有

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{(1-x)^2+x\cdot 2(1-x)}{(1-x)^4}=\frac{1+x}{(1-x)^3},$$

于是，
$$f(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

三、泰勒级数

以上是在给定幂级数的情况下，讨论幂级数的收敛域以及和函数的分析性质. 但是也常常遇到相反的问题，即将给定的函数“展成”幂级数，这对我们进一步定性地和定量地认识这些函数有着重要意义.

如果函数能展成幂级数，那么幂级数的系数与这个函数有什么关系呢？有下面的定理：

定理 8. 若函数 $f(x)$在区间 $(a-r,a+r)$ 能展成幂级数，即 $\forall x\in(a-r,a+r)$，有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n,\tag{2}$$

则函数 $f(x)$ 在区间 $(a-r, a+r)$ 存在任意阶导数，且 $a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$.

证明 根据定理 7 的推论，函数 $f(x)$ 在区间 $(a-r, a+r)$ 存在任意阶导数，且

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k}$$

$$=k!a_k+(k+1)k\cdots 2a_{k+1}(x-a)+\cdots.$$

令 $x=a$，$f^{(k)}(a)=k!a_k$，即

$$a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}. \quad \square$$

推论 若函数 $f(x)$ 在区间 $(a-r, a+r)$ 能展成幂级数(2)，则其幂级数展开式是唯一的，即若 $\forall x\in(a-r, a+r)$，有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \quad 与 \quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n,$$

则 $a_n=b_n$，$n=0,1,2,\cdots$.

证明 根据定理 8，$a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$，$b_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$，有

$$a_n=b_n, \qquad n=0,1,2,\cdots. \quad \square$$

定理 8 指出，若函数 $f(x)$ 在 a 的邻域能展成幂级数，则 $f(x)$ 在此邻域必存在任意阶导数，并且幂级数的系数 a_k 由函数 $f(x)$ 的 k 阶导数在 a 的值唯一确定，即

$$a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

注意，这是在“能展成”，即(2)式成立的前提下得到的. 反之，如果函数 $g(x)$ 在 a 存在任意阶导数，我们总能形式地写出相应的幂级数：

$$g(a)+\frac{g'(a)}{1!}(x-a)+\frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$

$$+\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots,$$

称为函数 $g(x)$在 a 的**泰勒级数**，表为

$$g(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \tag{3}$$

其中符号"～"表示(3)式右端的泰勒级数是函数 $g(x)$ 生成的.

特别是，函数 $g(x)$在 0 的泰勒级数，即

$$g(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

称为函数 $g(x)$的**马克劳林级数**.

如果泰勒级数(3)在区间$(a-r,a+r)$收敛，那么它的和函数是否就是函数$g(x)$呢？回答是否定的（因此(3)式才用符号"～"，而不用等号"＝"）. 例如，函数

$$g(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

（见练习题 5.5 第 10 题）函数 $g(x)$ 在 0 存在任意阶导数，且 $\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$g^{(n)}(0)=0.$$

于是，函数 $g(x)$的马克劳林级数是：

$$g(x)\sim g(0)+\frac{g'(0)}{1!}x+\frac{g''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{g^{(n)}(0)}{n!}+\cdots. \tag{4}$$

显然，级数(4)在 $\mathbf{R}$ 收敛于 0. 但是 $\forall x\neq 0, g(x)\neq 0$，即

$$g(x)\neq g(0)+\frac{g'(0)}{1!}x+\frac{g''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots.$$

由此可见，若函数 $g(x)$在 a 存在任意阶导数，我们总能写出幂级数（3），一般来说幂级数（3）在区间（$a-r,a+r$）不一定收敛于函数 $g(x)$. 那么在什么条件下幂级数(3)收敛于函数 $g(x)$呢？

定理 9. 若函数 $f(x)$ 在区间 $(a-r, a+r)$ 存在任意阶导数，且 $\forall x\in(a-r, a+r)$，泰勒公式的余项 $R_n(x)\to 0\ (n\to\infty)$，则 $\forall x\in(a-r, a+r)$，有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

证明 由 §6.3 泰勒公式，$\forall x\in(a-r, a+r)$，有

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=R_n(x)\to 0 \quad (n\to\infty),$$

即
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \ \square$$

应用定理 9 判别函数可展成泰勒级数并不方便，下面再给一个比较简便的函数可展成泰勒级数的充分条件：

定理 10. 若函数 $f(x)$ 在区间 $(a-r, a+r)$ 存在任意阶导数，且 $\exists M>0, \forall x\in(a-r, a+r), \forall n=0,1,2,\cdots$，有

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant M,①$$

则
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad x\in(a-r, a+r). \tag{5}$$

证明 由 §6.3，带有拉格朗日余项的泰勒公式，有

$$|R_{n-1}(x)|=\left|\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}[a+\theta(x-a)]\right| \qquad (0<\theta<1)$$

$$=\frac{|x-a|^n}{n!}|f^{(n)}[a+\theta(x-a)]|\leqslant\frac{r^n}{n!}M.$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r^n}{n!}=0$，② 有 $\lim\limits_{n\to\infty}R_{n-1}(x)=0$. 根据定理 9，(5)式成立. $\square$

---

① 即函数列 $\{f^{(n)}(x)\}$ 在区间 $(a-r, a+r)$ 一致有界.

② 见 §2.2. 例5. 另法，因为级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}$ 收敛，所以 $\frac{r^n}{n!}\to 0\ (n\to\infty)$.

四、基本初等函数的幂级数展开

下面给出几个常用的基本初等函数的幂级数展开式:

1. $f(x)=\sin x,\quad g(x)=\cos x.$

由 § 5.5 例 3，有

$$f^{(n)}(x)=(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

$\forall x\in\mathbf{R}$, $\forall n=0,1,2,\cdots$, 有

$$|f^{(n)}(x)|=\left|\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right|\leqslant 1.$$

根据定理 10，函数 $\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 可展成幂级数. 当 $x=0$，有

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=-1,\cdots,$$

于是,

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\quad x\in\mathbf{R}.$$

用同样方法，可把函数 $\cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 展成幂级数

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\quad x\in\mathbf{R}.$$

2. $f(x)=e^x.$

已知 $\forall n=0,1,2,\cdots$, 有 $f^{(n)}(x)=(e^x)^{(n)}=e^x$.

$$f^{(n)}(0)=e^0=1.$$

$$\forall r>0,\ x\in(-r,r),\ \forall n=0,1,2,\cdots,\text{有}$$

$$|f^{(n)}(x)|=|e^x|\leqslant e^r.$$

根据定理 10，函数 e^x 在 $(-r,r)$ 可展成幂级数. 因为 r 是任意的，所以函数 e^x 在 $\mathbf{R}$ 可展成幂级数，即

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\quad x\in\mathbf{R}.$$

特别是，当 $x=1$ 时，有

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots.$$

3. $f(x)=\ln(1+x)$.

已知 $$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots.$$

不难计算，这个幂级数的收敛半径是1. 根据定理6，$\forall x\in(-1,1)$，从0到x逐项积分，有

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t}=\int_0^x dt-\int_0^x t\,dt+\int_0^x t^2\,dt-\int_0^x t^3\,dt+\cdots,$$

即 $$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,\ |x|<1.$$

例5已证，当$x=1$时，有

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots.$$

4. $f(x)=(1+x)^\alpha$，α是常数.

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\ f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},\ \cdots,$$
$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\ \cdots.$$

有 $$f(0)=1,\quad f'(0)=\alpha,\quad f''(0)=\alpha(\alpha-1),\ \cdots,$$
$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1),\ \cdots.$$

从而，函数$(1+x)^\alpha$的马克劳林级数是

$$1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots. \tag{6}$$

当$\alpha=n\in\mathbf{N}$时，已知$\forall k>n$，有$f^{(k)}(x)\equiv 0$. 这时，函数$(1+x)^n$的马克劳林级数就是我们熟知的牛顿二项式公式，即

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{n!}{n!}x^n$$
$$=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n.$$

当$\alpha\neq n\in\mathbf{N}$时，有极限

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|=1.$$

即幂级数(6)的收敛半径是1. 下面证明马克劳林级数(6)在区间$(-1, 1)$收敛于函数$(1+x)^{\alpha}$. 这里选用柯西余项，直接用定理9证明. 函数$(1+x)^{\alpha}$的马克劳林公式的柯西余项(见§6.3定理2)是

$$R_n(x)=\frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}$$

$$=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n(1+\theta x)^{\alpha-1}, \quad (7)$$

其中$0<\theta<1$. 不难证明，(7)式中的因式$\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$与$(1+\theta x)^{\alpha-1}$有界.

事实上，$\forall x>-1$，有$0<1-\theta<1+\theta x$或$0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1$，从而$\forall x\in(-1, 1)$，$\forall n\in\mathbf{N}$，有$0<\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n<1$.

因为$\forall x$: $0\leqslant x<1$，有$1\leqslant 1+\theta x<1+x$，

$\forall x$: $-1<x\leqslant 0$，有$1+x<1+\theta x\leqslant 1$，

所以$\forall x\in(-1, 1)$，有$|(1+\theta x)^{\alpha-1}|\leqslant\max\{1, (1+x)^{\alpha-1}\}$(与$n$无关).

又已知，$\forall x\in(-1, 1)$，有极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}=0①$$

于是，由(7)式，$\forall x\in(-1, 1)$，有

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

根据定理9，函数$(1+x)^{\alpha}$在区间$(-1, 1)$可展成幂级数(6)，

---

① 因为$\forall x\in(-1, 1)$，级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}$收敛，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}=0.$$

即

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$$

称为二项式展开公式.

下面是二项式展开公式的几个特殊情况($|x|<1$):

$\alpha=-1$,是 $\quad \dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$.

$\alpha=-k$,是

$$\frac{1}{(1+x)^k}=1-\frac{k}{1!}x+\frac{k(k+1)}{2!}x^2-\frac{k(k+1)(k+2)}{3!}x^3+\cdots.$$

将其中 x 换为 $-x$,是

$$\frac{1}{(1-x)^k}=1+\frac{k}{1!}x+\frac{k(k+1)}{2!}x^2+\frac{k(k+1)(k+2)}{3!}x^3+\cdots.$$

$\alpha=\dfrac{1}{2}$,是

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4+\cdots.$$

$\alpha=-\dfrac{1}{2}$,是

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4-\cdots.$$

5. $f(x)=\arcsin x$.

已知 $\quad (\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. 由二项式展开公式,有

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}+\cdots,\quad |x|<1.$$

$\forall x\in(-1,1)$,从 0 到 x 逐项积分,有

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int_0^x dt+\frac{1}{2}\int_0^x t^2 dt+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_0^x t^{2n}dt+\cdots,$$

即 $$\arcsin x=x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}+\cdots, |x|<1.$$

用同样方法，可把函数 arctg$x$ 在$(-1,1)$展成幂级数.

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,\quad |x|<1.$$

五、幂级数的应用

1. 数 π 的近似计算

数 π 是一个很重要的常数，它在数学和物理中应用的频率很高. 近似计算数 π，幂级数是一个理想的工具.

已知函数 arctg$x$ 的马克劳林级数是

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,\quad -1<x\leqslant 1.$$

令 $x=1$，有

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\cdots$$

或 $$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\cdots\right).$$

这是人们最早发现的数 π 的既有规律又很简明的级数形式. 可惜此级数收敛甚慢，没有实用价值. 为了提高收敛速度，在函数 arctg$x$ 的马克劳林级数中，令 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}\in(-1,1]$，有

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3(\sqrt{3})^3}+\frac{1}{5(\sqrt{3})^5}-\cdots$$
$$+(-1)^n\frac{1}{2n+1}\frac{1}{(\sqrt{3})^{2n+1}}+\cdots$$

或 $$\pi=2\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 3^n}+\cdots\right).$$

如果取前 8 项部分和，即

$$\pi\approx 2\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{9}+\frac{1}{45}-\frac{1}{189}+\frac{1}{729}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2673}+\frac{1}{9477}-\frac{1}{32805}\right).$$

根据 § 9.1 定理 9，其误差不超过第 9 项的绝对值，即

$$2\sqrt{3}\frac{1}{17\times 3^8}=\frac{2\sqrt{3}}{111537}<\frac{3.5}{100000}=0.000035.$$

2. 数 e 的近似计算

数 e 也是一个重要常数．它是我们熟知的自然对数的底．表示数 e 有多种不同的方法，级数是表示数 e 的理想工具．

已知函数 e^x 的马克劳林级数是

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\quad x\in\mathbf{R}.$$

令 $x=1$，有

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots.$$

这就是数 e 的级数表示．用它的部分和 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n!}$(这是 $n+1$ 项的和)近似代替数 e，则误差不超过 $\frac{1}{n!\,n}$，即

$$e-S_n=e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<\frac{1}{n!\,n}. \tag{8}$$

事实上，$\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$e-S_n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\cdots$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right)$$

$$<\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!n}.$$

例如，取 $n=10$，即用 S_{10} 近似代替数 e，即

$$e\approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{10!},$$

其误差不超过$\frac{1}{10!10}=\frac{1}{36288000}<\frac{1}{36\times 10^6}$.

应用不等式(8)很容易证明：数 e 是无理数。

用反证法．假设数 e 是有理数$\frac{p}{q}$，其中 p，$q\in\mathbf{N}$．设部分和

$S_q=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}$．一方面，由不等式(8)，有

$$0<q!(e-S_q)<q!\frac{1}{q!q}=\frac{1}{q}\leqslant 1,$$

即 $q!(e-S_q)$ 是 0 与 1 之间的小数；另一方面，又有

$$q!(e-S_q)=q!\left[\frac{p}{q}-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}\right)\right]$$

是正整数，矛盾．于是，数 e 是无理数．

3. 对数的近似计算

已知对数函数 $\ln(1+x)$ 的马克劳林级数是

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\qquad -1<x\leqslant 1.\qquad (9)$$

应用幂级数(9)计算自然对数的近似值有两个缺点：一是 x 的变化范围太小；二是收敛的速度太慢．因此它没有实用价值．为此，在幂级数(9)的基础上构造一个新的级数，既扩大 x 的变化范围，又

提高收敛速度. 具体作法如下(有很高的技巧):

在幂级数(9)中,以 $-x$ 代替 $x(|x|<1)$, 有

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots. \tag{10}$$

将幂级数(9)与(10)的等号两端分别相减,有

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right)$$

或

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right),\quad |x|<1. \tag{11}$$

令 $x=\frac{1}{2n+1}$, $\forall n\in\mathbf{N}$, $\frac{1}{2n+1}\in(-1,1)$, 有

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}=\frac{n+1}{n}.$$

将 $x=\frac{1}{2n+1}$代入幂级数(11)之中,有

$$\ln\frac{n+1}{n}=2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right)$$

或 $$\ln(n+1)=\ln n+2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right). \tag{12}$$

由级数(12)看到: 一方面,应用递推方法,能求出任意自然数 n 的自然对数 $\ln n$;另一方面,提高了级数的收敛速度,即取很少几项的部分和就能达到较高的精度.

例如,$n=1$,已知 $\ln1=0$,由级数(12),有

$$\ln2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot3^3}+\frac{1}{5\cdot3^5}+\frac{1}{7\cdot3^7}+\cdots\right).$$

只计算括号内写出来的四项部分和,即

$$\ln2\approx2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot3^3}+\frac{1}{5\cdot3^5}+\frac{1}{7\cdot3^7}\right)\approx0.69313,$$

其误差不超过

$$2\left(\frac{1}{9\cdot 3^9}+\frac{1}{11\cdot 3^{11}}+\cdots\right)<2\left(\frac{1}{9\cdot 3^9}+\frac{1}{9\cdot 3^{11}}+\cdots\right)<7\times 10^{-5}.$$

由于级数(12)能计算任意自然数 n 的自然对数 $\ln n$，它的收敛速度又较快．因此它是造自然对数表的理想公式．

4．用幂级数表示非初等函数

我们已知，虽然区间上的连续函数存在原函数，但是其原函数却不一定是初等函数．例如，在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 e^{-x^2}，其原函数 $\varphi(x)$ 就不是初等函数，即非初等函数．这个非初等函数 $\varphi(x)$ 可用积分上限函数表示，即

$$\varphi(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt,\quad x\in\mathbf{R}.$$

在此基础上尚可将函数 $\varphi(x)$ 化为幂级数．

事实上，已知函数 e^x 的马克劳林级数是

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ \ x\in\mathbf{R}.$$

令 $x=-t^2$，有

$$e^{-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}=1-\frac{t^2}{1!}+\frac{t^4}{2!}-\cdots,\quad t\in\mathbf{R}.$$

由于幂级数在收敛区间内可逐项积分，$\forall x\in\mathbf{R}$，有

$$\varphi(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}\right)dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^x t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot n!}x^{2n+1}$$

$$=x-\frac{x^3}{3\cdot 1!}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\frac{x^9}{9\cdot 4!}-\cdots,\quad x\in\mathbf{R}.$$

这就是非初等函数 $\varphi(x)$ 的幂级数表示．显然，应用这个幂级数讨论函数 $\varphi(x)$ 的性质，特别是计算或近似计算它的函数值更为

方便.

再如，有些常微分方程的解不是初等函数，即非初等函数，其解却可用幂级数表示. 例如，常微分方程

$$xy''+y'+xy=0$$

有幂级数解 $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$. 见练习题 9.3 第 6 题.

幂级数 $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$ 的收敛域是 R，它在 R 的和函数是 0 阶贝塞尔①函数，是非初等函数. 由此可见，幂级数这个工具在数学中占有重要地位.

5. 指数函数的分析定义

在数学分析中，用分析的方法给出指数函数与三角函数的定义，对深刻地认识这些函数是很有意义的. 幂级数就是定义指数函数和三角函数的一个分析工具. 本书只给出指数函数 e^x 与三角函数 $\sin x$，$\cos x$ 的分析定义.

定义 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的和函数 $E(x)$，即

$$E(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

称为**指数函数**.

下面讨论指数函数 $E(x)$ 的性质和运算公式：

1) 指数函数 $E(x)$ 的定义域是 R.

2) 指数函数 $E(x)$ 在定义域 R 连续.

3) $E(0)=1$.

4) $\forall x, y\in\mathbf{R}$，有 $E(x)\cdot E(y)=E(x+y)$.

---

① 贝塞尔(Bessel 1784～1846)德国数学家.

事实上，

$$E(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots. \tag{13}$$

$$E(y)=1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\cdots+\frac{y^n}{n!}+\cdots. \tag{14}$$

幂级数(13)与(14)在 R 都绝对收敛. 根据 § 9.1 定理 14，幂级数(13)与(14)的乘积级数也在 R 绝对收敛，并与项的次序无关. 在乘积级数中，x 的次数与 y 的次数之和是 n 的共有 $n+1$ 项，即

$$1\cdot\frac{y^n}{n!}+\frac{x}{1!}\cdot\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^2}{2!}\cdot\frac{y^{n-2}}{(n-2)!}+\cdots$$

$$+\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\cdot\frac{y^k}{k!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\cdot 1$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}x^k y^{n-k}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k y^{n-k}=\frac{(x+y)^n}{n!}.$$

于是，

$$E(x)\cdot E(y)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}x^k y^{n-k}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}=E(x+y).$$

5) $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $\quad E(x)\cdot E(-x)=1.$

事实上，$E(x)\cdot E(-x)=E(x-x)=E(0)=1.$

6) $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $E(x)\neq 0$，且 $E(-x)=[E(x)]^{-1}$.

事实上，由 5) 立刻就得到此结果.

7) $E'(x)=E(x)$.

事实上，幂级数(13)在 R 可逐项微分，即

$$E'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right)'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=E(x). \qquad (15)$$

关于指数函数 $E(x)$ 的其它性质和公式，不再列证．不难证明，指数函数 $E(x)$ 就是我们熟知的函数 e^x.

事实上，$\forall x\in\mathbb{R}$，$E(x)\neq 0$，由(15)式，有

$$\frac{E'(x)}{E(x)}=1.$$

$\forall x\in\mathbb{R}$，从 0 到 x 积分，有

$$\int_0^x\frac{E'(t)}{E(t)}dt=\int_0^x dt \quad 或 \quad \ln E(x)=x,$$

即

$$E(x)=e^x.$$

6. 三角函数的分析定义

定义 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 的和函数分别是 $C(x)$ 与 $S(x)$，即

$$C(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

与

$$S(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

称 $C(x)$ 是**余弦函数**，$S(x)$ 是**正弦函数**.

下面给出余弦函数与正弦函数的性质和运算公式(除 9) 外证明从略)：

1) 余弦函数 $C(x)$ 与正弦函数 $S(x)$ 的定义域都是 R.

2) 余弦函数 $C(x)$ 与正弦函数 $S(x)$ 在定义域 R 都连续.

3) $C(0)=1$. $S(0)=0$.

4) $\forall x, y\in\mathbf{R}$，有

$$C(x+y)=C(x)\cdot C(y)-S(x)\cdot S(y), \tag{16}$$

$$S(x+y)=S(x)\cdot C(y)+C(x)\cdot S(y). \tag{17}$$

5) 余弦函数 $C(x)$是偶函数，正弦函数 $S(x)$是奇函数.

6) $[C(x)]^2+[S(x)]^2=1$.

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{S(x)}{x}=1$ 与 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-C(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

8) $[C(x)]'=-S(x)$ 与 $[S(x)]'=C(x)$.

9) 存在数 $\pi\left(0<\dfrac{\pi}{2}<2\right)$，使 $C\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ 与 $S\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

事实上，由余弦函数 $C(x)$的马克劳林公式，取拉格朗日余项，有

$$C(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}C(\theta x),\quad 0<\theta<1.$$

由 6)，$[C(\theta x)]^2+[S(\theta x)]^2=1$，有$|C(\theta x)|\leqslant 1$. $x=2$，有

$$C(2)=-1+\frac{2}{3}C(2\theta)\leqslant -1+\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}<0.$$

又已知，$C(0)=1>0$. 从而，连续函数 $C(x)$在区间$(0,2)$至少有一个零点.

因为 $\forall x\in(0,2)$，有

$$S(x)=x\left(1-\frac{x^2}{2\cdot 3}\right)+\frac{x^5}{5!}\left(1-\frac{x^2}{6\cdot 7}\right)+\cdots>0,$$

所以$[C(x)]'=-S(x)<0$，即余弦函数 $C(x)$在区间$(0,2)$严格减少. 从而，余弦函数 $C(x)$在区间$(0,2)$只有唯一零点. 将此零点表为$\dfrac{\pi}{2}$，即

$$C\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

于是，存在数 π，它是余弦函数 $C(x)$ 最小正的零点 $\frac{\pi}{2}$ 的 2 倍. 由 6)，又有

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

由(16)式与(17)式，$x=y=\frac{\pi}{2}$，有

$$C(\pi)=C\left(\frac{\pi}{2}\right)C\left(\frac{\pi}{2}\right)-S\left(\frac{\pi}{2}\right)S\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1.$$

$$S(\pi)=S\left(\frac{\pi}{2}\right)C\left(\frac{\pi}{2}\right)+C\left(\frac{\pi}{2}\right)S\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

10) 余弦函数 $C(x)$ 与正弦函数 $S(x)$ 都是以 2π 为周期的周期函数.

能够证明，余弦函数 $C(x)$ 与正弦函数 $S(x)$ 分别就是我们熟知的三角函数 $\cos x$ 与 $\sin x$. 这个证明涉及二阶常微分方程求解，从略.

练习题 9.3

1. 求下列幂级数的收敛半径和收敛区间:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$，　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，　(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{2n+1}x^{2n}$，

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$，　(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(x-1)^n$，

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$.

2. 求下列函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 与定积分 $\int_0^x f(t)dt$，并给出收敛区间:

(1) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{3^n}x^{2n}$，　(2) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(2x)^n$，

(3) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n^2}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n$, $a>0, b>0$.

3. 求下列级数的和函数：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, (3) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$,

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

4. 将下列函数展成马克劳林级数(可用已知的展开公式)：

(1) a^x $(a>0)$, (2) $\frac{1}{2-x}$, (3) $\sqrt[3]{1-x}$,

(4) $\sin^2 x$ $\left(提示: \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\right)$,

(5) $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, (6) $\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$,

(7) $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$, (8) $\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}dt$.

5. 应用级数乘积，将下列函数展成马克劳林级数：

(1) $(1+x)e^{-x}$, (2) $[\ln(1-x)]^2$,

(3) $e^x\sin x$.

6. 证明：幂级数 $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$ 满足微分方程

$$xy''+y'+xy=0.$$

7. 证明：$\forall x, y\in \mathbf{R}$，有

1) $S(x+y)=S(x)C(y)+C(x)S(y)$.

2) $\lim_{x\to 0}\frac{S(x)}{x}=1$.

8. 证明：等式 $(1-x)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 的等号两端平方是

$$(1-x)^{-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

9. 证明：若函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 是偶函数(或奇函数)，当 n 是奇数(或偶数)时，则 $a_n=0$.

10. 证明：若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径是 r，且在区间 $(-r,r)$ 一致收敛，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在区间 $[-r,r]$ 一致收敛.

*　　　*　　　*　　　*

11. 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$，　$0\leqslant x\leqslant 1$. 证明，$\forall x\in(0,1)$，有

(1) $f(x)+f(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x)=C$(常数).

(2) $C=f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

12. 证明：若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$|x|<r$，且 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$ 收敛，则

$$\int_0^r f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}.$$

13. 证明：若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$a_n\geqslant 0$，收敛半径 $r=1$，且 $\lim_{x\to 1^-}f(x)=s$，则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛，且 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=s$.

14. 证明：若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径是 R，存在某个数列 $\{x_n\}$，$x_n\in(-R,R)$，使 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$，且 $f(x_n)=0$，$n=1,2,\cdots$，则 $a_n=0$，$n=0,1,2,\cdots$.

(提示：首先证明 $a_0=f(0)=0$，再证 $a_1=f'(0)=0,\cdots$)

§9.4. 傅立叶[①]级数

自然界中周期现象的数学描述就是周期函数. 最简单的周期现象,如单摆的摆动、音叉的振动等, 都可用正弦函数 $y=a\sin\omega t$ 或余弦函数 $y=a\cos\omega t$ 表示. 但是,复杂的周期现象, 如热传导、电磁波以及机械振动等, 就不能仅用一个正弦函数或余弦函数表示,需要用很多个甚至无限多个正弦函数和余弦函数的叠加表示. 本节就是讨论将周期函数表为(展成)无限多个正弦函数与余弦函数之和,即傅立叶级数.

一、傅立叶级数

函数列

$$1,\ \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots, \tag{1}$$

称为**三角函数系**. 2π 是三角函数系(1)中每个函数的周期. 因此,讨论三角函数系(1) 只须在长是 2π 的一个区间上即可. 通常选取区间$[-\pi,\pi]$. 由练习题 8.4 第 6 题知, 三角函数系具有下列性质: m 与 n 是任意非负整数,有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n\neq 0,\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx dx=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n\neq 0,\end{cases}$$

即三角函数系(1) 中任意两个不同函数之积在$[-\pi,\pi]$ 的定积分是 0,而每个函数的平方在$[-\pi,\pi]$的定积分不是 0. 因为函数之积的积分可以视为有限维空间中内积概念的推广, 所以三角函数系(1)的这个性质称为**正交性**. 三角函数系(1)的正交性是三角函数系优越性的源泉. 以三角函数系 (1) 为基础所作成的函数

---

① 傅立叶(Fourier, 1768—1830)法国数学家.

级数

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\cdots$$
$$+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\cdots$$

简写为
$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{2}$$

称为**三角级数**，其中 $a_0, a_n, b_n(n=1,2,\cdots)$ 都是常数.

如果函数 $f(x)$ 在区间$[-\pi,\pi]$能展成三角级数(2)，或三角级数(2)在区间$[-\pi,\pi]$收敛于函数 $f(x)$，即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{3}$$

那么级数(3)的系数 $a_0, a_n, b_n(n=1,2,\cdots)$ 与其和函数$f(x)$有什么关系呢？为了讨论这个问题，不妨假设级数(3)在区间$[-\pi,\pi]$可逐项积分，并且乘以 $\sin mx$ 或 $\cos mx$ 之后仍是可逐项积分.

首先，求 a_0.

对(3)式等号左右两端在区间$[-\pi,\pi]$积分，并将右端逐项积分. 由三角函数系(1)的正交性，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right)$$
$$=a_0\pi,$$

或
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx.$$

其次，求 $a_k(k\neq 0)$.

将(3)式等号左右两端乘以 $\cos kx$，左右两端在区间$[-\pi,\pi]$积分，并将右端逐项积分. 由三角函数系(1)的正交性，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos kxdx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\,dx\right)$$

$$=a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx=a_k\pi,$$

或

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx\text{①}.$$

再次，求 b_k.

将(3)式等号左右两端乘以 $\sin kx$，左右两端在区间$[-\pi,\pi]$积分，并将右端逐项积分. 由三角函数系(1)的正交性，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\sin kx\,dx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin kx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin kx\,dx\right)$$

$$=b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,dx=b_k\pi,$$

或

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx.$$

由此可见，如果函数 $f(x)$在区间$[-\pi,\pi]$能展成三角级数(3)，其系数 $a_0, a_k, b_k(k=1,2,\cdots)$将由函数 $f(x)$确定.

定义 若函数 $f(x)$在区间$[-\pi,\pi]$可积②，则称

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \qquad (n=0,1,2,\cdots), \tag{4}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \qquad (n=1,2,3,\cdots), \tag{5}$$

是函数 $f(x)$ 的**傅立叶系数**.

---

① 当 $k=0$ 时，$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$. 因此三角级数(3) 的常数项取为$\frac{a_0}{2}$.

② 由 § 8.3 定理 4，函数 $f(x)\sin nx$ 与 $f(x)\cos nx$ 在$[-\pi,\pi]$都可积.

以函数 $f(x)$ 的傅立叶系数为系数的三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

称为函数 $f(x)$ 的**傅立叶级数**，表为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{6}$$

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 可积，我们总能够形式地写出函数 $f(x)$ 的傅立叶级数(6)．于是，产生了两个问题：

1) 函数 $f(x)$ 的傅立叶级数(6)在 $[-\pi,\pi]$ 是否收敛？

2) 如果函数 $f(x)$ 的傅立叶级数(6)在 $[-\pi,\pi]$ 收敛，那么它的和函数是否就是函数 $f(x)$？

这两个问题的答案都是否定的，即函数 $f(x)$ 的傅立叶级数(6)在 $[-\pi,\pi]$ 可能发散，即使傅立叶级数(6)在 $[-\pi,\pi]$ 收敛，它的和函数也不一定就是函数 $f(x)$．那么，函数 $f(x)$ 在什么条件下，它的傅立叶级数(6)在 $[-\pi,\pi]$ 收敛，其和函数就是函数 $f(x)$ 呢？这就是下面将要讨论的傅立叶级数的收敛定理．

二、两个引理

在证明傅立叶级数的收敛定理之前，先证两个引理．

设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的傅立叶级数是

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

为书写简单，将它的 $2n+1$ 项的部分和表为 $S_n(x)$，即

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \tag{7}$$

称为**三角多项式**．将要证明的收敛定理是：在一定条件下，函数 $f(x)$ 的傅立叶级数的部分和 $S_n(x)$ 收敛于函数 $f(x)$，即需要证明：

$|f(x)-S_n(x)|\to 0(n\to\infty)$. 为此，一方面，要将函数 $f(x)$ 与 $S_n(x)$ 化为相同的数学形式(这里是化为积分形式)，从而能够进行差的运算；另一方面，将差 $|f(x)-S_n(x)|$ 化为积分形式之后，要有相应定理，使其极限为 $0(n\to\infty)$. 这就是下面的引理 1 及其推论和引理 2.

设 $D_n(x)=\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx$.

由 § 9.1 例 12，不难得到

$$D_n(x)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.\text{①}$$

引理 1. 若函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，在 $[-\pi,\pi]$ 可积，则(7)式的部分和 $S_n(x)$ 可表为

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]D_n(t)dt, \tag{8}$$

其中 $D_n(t)=\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\cdots+\cos nt=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$.

证明 将傅立叶系数 a_n 与 b_n 用(4)式与(5)式表示出来，有

$$\begin{aligned}S_n(x)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)du+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos kx\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\cos ku\,du\right.\\&\qquad\left.+\sin kx\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\sin ku\,du\right]\end{aligned}$$

---

① 这种写法 $D_n(x)$ 在 $x=0$ 没有定义，但是 $\lim\limits_{x\to 0}D_n(x)=n+\frac{1}{2}$. 在 0 作连续开拓，它与上述 $D_n(x)$ 和式的写法只是形式的区别.

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kx\cos ku\right.$$

$$\left.+\sin kx\sin ku)\right]du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(u-x)\right]du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(u-x)}{2\sin\frac{1}{2}(u-x)}du.$$

设 $u-x=t, du=dt$，有

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\cdot\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)D_n(t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt \text{①}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x+t)D_n(t)dt+\int_{0}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt\right].$$

在上式等号右端第一个积分中，将 t 换成 $-t$，有

$$\int_{-\pi}^{0} f(x+t)D_n(t)dt=\int_{0}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt.$$

于是 $$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]D_n(t)dt. \ \square$$

当 $f(x)\equiv 1$ 时，由(8)式，有

推论 $$1=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)dt.$$

---

① 已知被积函数 $f(x+t)D_n(t)$ 是以 2π 为周期的函数．由§8.4例14知，在长度为 2π 的任意区间的定积分皆相等．

根据此推论，可将可积函数 $f(x)$ 改写为积分形式，即

$$f(x)\cdot 1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)D_n(t)dt.$$

引理 2.（黎曼引理） 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，$\forall p>0$，则

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos pxdx=0 \quad 与 \quad \lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin pxdx=0.$$

证明 两个极限证法相同，只给出 $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin pxdx=0$ 的证明.

对任意有界区间 $[\alpha,\beta]$，有

$$\left|\int_\alpha^\beta \sin pxdx\right|=\left|\frac{\cos p\beta-\cos p\alpha}{p}\right|\leqslant\frac{2}{p}.$$

已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界，即 $\exists A>0$，$\forall x\in[a,b]$，有 $|f(x)|\leqslant A$. 根据 § 8.2 定理 1′，$\forall\varepsilon>0$，存在 $[a,b]$ 的分法 T，即

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

使 $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon/2$，其中 ω_k 是函数 $f(x)$ 在 $[x_{k-1},x_k]$ 的振幅. 将自然数 n 暂时固定. 于是，

$$\left|\int_a^b f(x)\sin pxdx\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x_k)+f(x)-f(x_k)]\sin pxdx\right|$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x_k)\sin pxdx+\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x)-f(x_k)]\sin pxdx\right\}\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left\{|f(x_k)|\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}\sin pxdx\right|+\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(x)-f(x_k)||\sin px|dx\right\}$$

$$\leqslant A\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}\sin pxdx\right|+\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\omega_k dx$$

$$\leqslant\frac{2An}{p}+\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\frac{2An}{p}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

当 $p>\frac{4An}{\varepsilon}$ 或 $\frac{2An}{p}<\frac{\varepsilon}{2}$，有

$$\left|\int_a^b f(x)\sin px dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即
$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin px dx=0.\ \square$$

三、收敛定理

定义 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 除有有限个第一类间断点外皆连续，则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ **逐段连续**. 若函数 $f(x)$ 与它的导函数 $f'(x)$ 都逐段连续，则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ **逐段光滑**.

显然，逐段光滑的函数是可积的.

定理 1. 若 $f(x)$ 在 R 是以 2π 为周期的在 $[-\pi,\pi]$ 逐段光滑的函数，则函数 $f(x)$ 的傅立叶级数(6) 在 R 收敛，其和函数是 $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$，即 $\forall x\in[-\pi,\pi]$，有

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \quad (9)$$

注 若 x 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点，则函数 $f(x)$ 的傅立叶级数 (9) 收敛于函数 $f(x)$ 在点 x 的左、右极限的平均值，即 $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$. 若 x 是函数 $f(x)$ 的连续点，有 $f(x+0)=f(x-0)=f(x)$，则函数 $f(x)$ 的傅立叶级数(9)收敛于 $f(x)$.

证法 因为函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期，所以只须证明，$\forall x\in[-\pi,\pi]$，有

$$\lim_{n\to\infty}\left\{S_n(x)-\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]\right\}=0.$$

为此，根据引理 1，将 $S_n(x)$ 改写成积分形式，即

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]D_n(t)dt.$$

再根据引理 1 的推论，将 $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ 也改写成积分形式，即

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]\cdot 1\\
&=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}D_n(t)dt\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+0)+f(x-0)]D_n(t)dt.
\end{aligned}$$

于是，

$$\begin{aligned}
&S_n(x)-\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]D_n(t)dt\\
&\qquad-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+0)+f(x-0)]D_n(t)dt\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)]D_n(t)dt\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)-f(x+0)]D_n(t)dt\\
&\qquad+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x-t)-f(x-0)]D_n(t)dt.
\end{aligned}$$

因此，只须证明上述等式右端的每个积分的极限都是 $0(n\to\infty)$.

证明 $\forall x\in[-\pi,\pi]$，由引理 1 及其推论，有

$$\begin{aligned}
&S_n(x)-\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]\\
&=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}[f(x+t)-f(x+0)]D_n(t)dt\right.\\
&\qquad\left.+\int_0^{\pi}[f(x-t)-f(x-0)]D_n(t)dt\right].
\end{aligned}$$

分别讨论上式等号右端的每个积分.

$$\int_0^{\pi}[f(x+t)-f(x+0)]D_n(t)dt$$

$$=\int_0^{\pi}[f(x+t)-f(x+0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt.$$

设 $F(t)=\dfrac{f(x+t)-f(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t}$, $0<t\leqslant\pi$. 有

$$\lim_{t\to 0^+}F(t)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}=f'(x+0).$$

令 $F(0)=f'(x+0)$, 则函数 $F(t)$ 在 $[0,\pi]$ 逐段连续. 于是, 函数 $\dfrac{f(x+t)-f(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t}$ 在 $[0,\ \pi]$ 是 t 的可积函数. 根据引理 2 $\left(p=n+\frac{1}{2}\right)$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}[f(x+t)-f(x+0)]D_n(t)dt$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt=0.$$

同理可证 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}[f(x-t)-f(x-0)]D_n(t)dt=0.$

于是 $$\lim_{n\to\infty}\left\{ S_n(x)-\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]\right\}=0,$$

即 $\forall x\in[-\pi,\pi]$，有

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \quad \square$$

定理 1 给出了函数 $f(x)$ 可展成傅立叶级数的充分条件. 显然，可展成傅立叶级数的函数（逐段光滑）要比可展成幂级数的函数（存在任意阶导数）要广泛得多.

以下三例的函数都是在长为 2π 的半开区间上给出的，不难将它们在 $\mathbb{R}$ 上开拓为以 2π 为周期的周期函数. 显然，它们在区间 $[-\pi,\pi]$ 满足定理1 的条件. 这里侧重于将函数展成傅立叶级数.

例 1. 将函数 $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi<x\leqslant 0,\\ 0, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$ 展成傅立叶级数.

解 首先求傅立叶系数.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}xdx=-\frac{\pi}{2}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}=\frac{1}{\pi n^2}(1-\cos n\pi)$$

$$=\frac{1}{\pi n^2}[1-(-1)^n]=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi n^2}, & n\text{是奇数}.\\ 0, & n\text{是偶数}.\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}=-\frac{\cos n\pi}{n}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

将上述系数代入(9)式，有

$$f(x)=-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\pi n^2}[1-(-1)^n]\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right\}$$

$$= -\frac{\pi}{4} + \left(\frac{2}{\pi}\cos x + \sin x\right) - \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$+ \left(\frac{2}{\pi 3^2}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x\right) - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots, \quad |x| < \pi.$$

当 $x = \pm\pi$ 时，傅立叶级数收敛于

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{-\pi+0}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

傅立叶级数的和函数是以 2π 为周期的周期函数，它的图象是图 9.3.

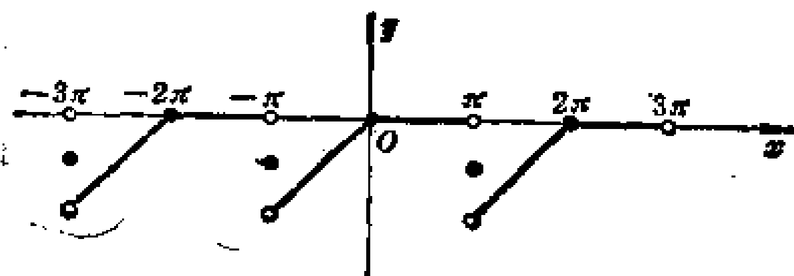


图 9.3

例 2. 将函数 $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leqslant 0, \\ 1, & 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$ 展成傅立叶级数.

解 $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx = 1.$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nx dx = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi n}(-\cos nx)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n}[1-(-1)^n]$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\pi n}, & n \text{ 是奇数}, \\ 0, & n \text{ 是偶数}. \end{cases}$$

将上面傅立叶系数代入(9)式，有

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left[\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots+\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}+\cdots\right],$$

$$0<|x|<\pi.$$

当 $x=0$ 时，傅立叶级数收敛于

$$\frac{\varphi(0+0)+\varphi(0-0)}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}.$$

当 $x=\pm\pi$ 时，傅立叶级数收敛于

$$\frac{\varphi(-\pi+0)+\varphi(\pi-0)}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}.$$

傅立叶级数的和函数是以 2π 为周期的周期函数，它的图象是图 9.4.

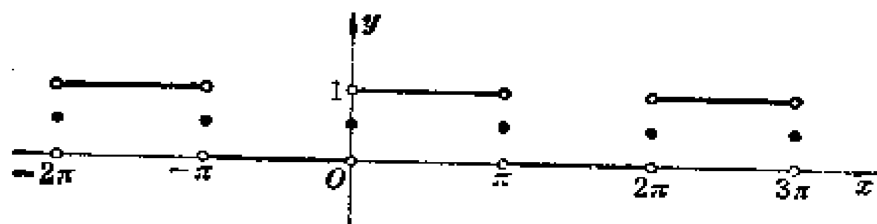


图 9.4

例 3. 将函数 $f(x)=x^2$ 在 $(0,2\pi]$①展成傅立叶级数.

解 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{8}{3}\pi^2.$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nx dx$$

$$=\frac{-2}{\pi n}\int_0^{2\pi}x\sin nx dx=\frac{4}{n^2}.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nx dx$$

$$=-\frac{4\pi}{n}+\frac{2}{\pi n}\int_0^{2\pi}x\cos nx dx=-\frac{4\pi}{n}.$$

于是，

① 周期函数在长度为周期长的任意区间上的积分相等.

$$x^2=\frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{\pi\sin nx}{n}\right),\quad 0<x<2\pi.$$

傅立叶级数的和函数是以 2π 为周期的周期函数，它的图象是图 9.5.

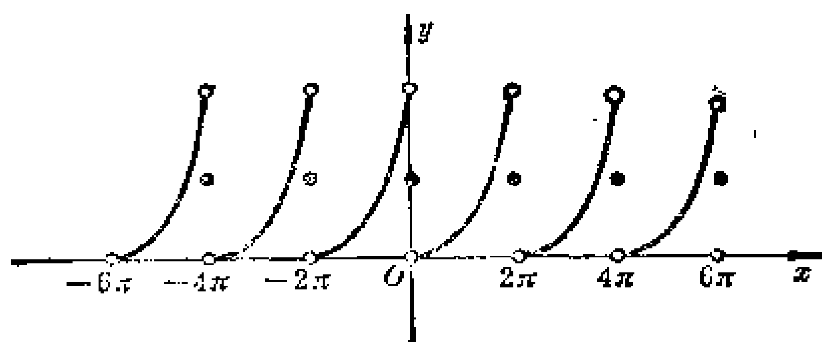


图 9.5

四、奇偶函数的傅立叶级数

如果 $f(x)$是以 2π 为周期的偶函数，则 $f(x)\cos nx$ 也是偶函数，而 $f(x)\sin nx$ 是奇函数①. 于是，函数 $f(x)$的傅立叶系数②

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=0,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

显然，偶函数的傅立叶级数只含有余弦函数的项，亦称**余弦级数**.

如果 $f(x)$是以 2π 为周期的奇函数，则 $f(x)\cos nx$ 也是奇函数，而 $f(x)\sin nx$ 是偶函数. 于是，函数 $f(x)$的傅立叶系数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=0,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

---

① 已知 $\cos nx$ 是偶函数，$\sin nx$ 是奇函数，而两个偶函数之积仍是偶函数；偶函数与奇函数之积是奇函数.

② 若 $\varphi(x)$是偶函数，则 $\int_{-a}^{a}\varphi(x)dx=2\int_{0}^{a}\varphi(x)dx$.
若 $\varphi(x)$是奇函数，则 $\int_{-a}^{a}\varphi(x)dx=0$.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

显然，奇函数的傅立叶级数只含有正弦函数的项，亦称**正弦级数**.

例 4. 将函数 $F(x)=|x|$ 在 $[-\pi,\pi]$① 展成傅立叶级数.

解 函数 $F(x)=|x|$ 在 $[-\pi,\pi]$ 是偶函数，有

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x dx=\pi.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{4}{\pi n^2}, & n\text{是奇数},\\ 0, & n\text{是偶数}.\end{cases}$$

$$b_n=0.$$

于是，
$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right),\ |x|\leqslant\pi.$$

特别是，当 $x=\pi$ 时，有

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots.$$

例 5. 将函数 $f(x)=x^2$ 在 $[-\pi,\pi]$ 展成傅立叶级数.

解 函数 $f(x)=x^2$ 在 $[-\pi,\pi]$ 是偶函数，有

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2 dx=\frac{2}{3}\pi^2.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx dx=\frac{4}{\pi n^2}(\pi\cos n\pi)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{n^2}, & n\text{是偶数},\\ -\dfrac{4}{n^2}, & n\text{是奇数}.\end{cases}$$

---

① 因为 $F(\pi)=F(-\pi)$，所以这里可以为闭区间 $[-\pi,\pi]$. 下同.

$b_n=0.$

于是， $x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\cdots\right),\quad |x|\leqslant\pi.$

特别是，当 $x=\pi$，$x=0$ 时，分别有

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots.$$

$$\frac{\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots.$$

例 6. 将函数 $f(x)=x$ 在 $(-\pi,\pi]$ 展成傅立叶级数.

解 函数 $f(x)=x$ 在 $(-\pi,\pi)$ 是奇函数，有

$$a_n=0.$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

于是 $$x=2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots\right),\quad |x|<\pi.$$

特别是，当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，有

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

例 7. 将函数 $g(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\leqslant 0,\\ 1, & 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$ 展成傅立叶级数.

解 函数 $g(x)$ 在 $(-\pi,\pi)-\{0\}$ 是奇函数，有

$$a_n=0.$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi n}(1-\cos n\pi)=\frac{2}{\pi n}[1-(-1)^n]$$

$$=\begin{cases}0, & n\text{ 是偶数},\\ \dfrac{4}{\pi n}, & n\text{ 是奇数}.\end{cases}$$

于是，　$g(x)=\dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\sin x}{1}+\dfrac{\sin 3x}{3}+\dfrac{\sin 5x}{5}+\cdots\right),\quad 0<|x|<\pi.$

例 7 的傅立叶级数的几何意义是，当 $n\to\infty$ 时，它的部分和 $S_n(x)$ 的图象无限趋近函数 $g(x)$ 的图象，即 $S_n(x)$ 图象的极限状态就是 $g(x)$ 的图象，如图 9.6，并且在 $x=0$，傅立叶级数收敛于

$$\frac{g(0+0)+g(0-0)}{2}=\frac{1-1}{2}=0.$$

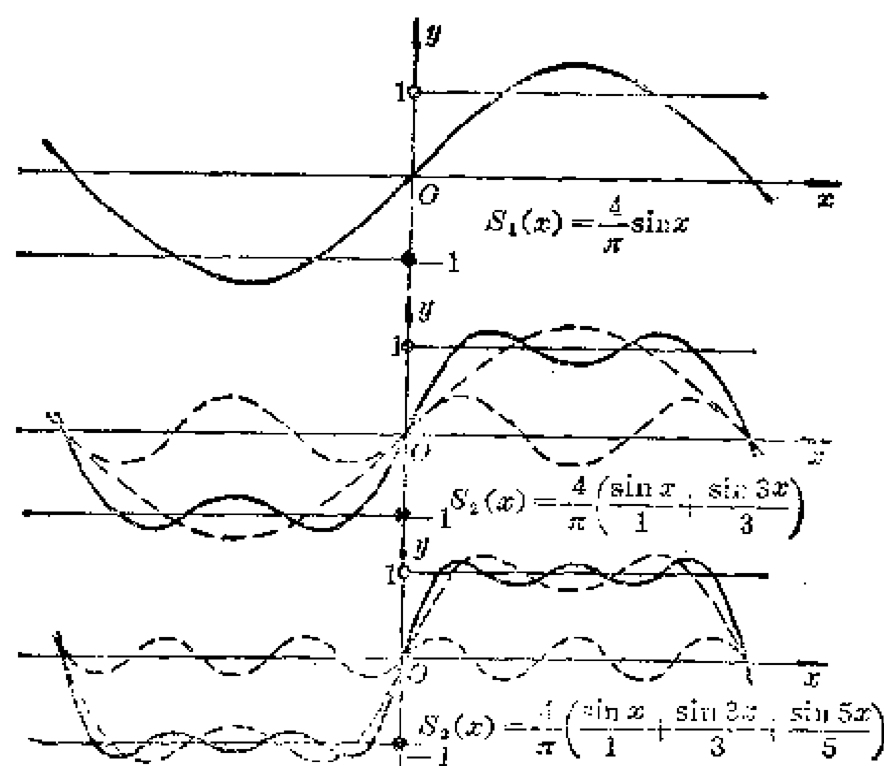


图 9.6

有时需要将函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 展成傅立叶级数. 为了便于计算傅立叶系数，将函数 $f(x)$ 开拓到 $(-\pi,0)$，使其开拓的函数在区间 $(-\pi,\pi)$ 是偶函数（这时，$b_n=0$，如图 9.7）或奇函数①（这时，

① 当 $f(0)\neq 0$ 时，作奇开拓，令 $f(0)=0$.

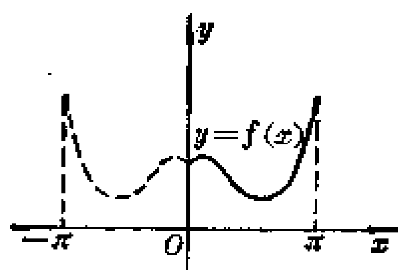


图 9.7

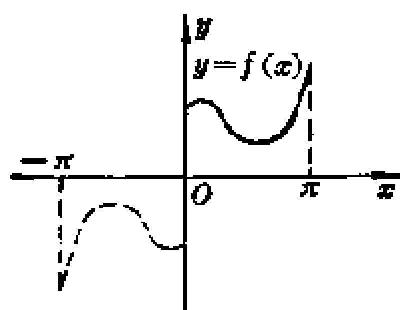


图 9.8

$a_n=0$，如图 9.8)，即所谓函数 $f(x)$ 的偶开拓或奇开拓，亦称函数 $f(x)$ 的偶式展开或奇式展开. 由傅立叶系数公式，有

1. 偶式展开

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx.$$

$$b_n=0.$$

2. 奇式展开

$$a_n=0.$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

例 8. 将函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0,\pi]$ 展成傅立叶级数.

解 按偶式展开，开拓的函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\pi,\pi)$ 是偶函数(如图 9.9). 它的傅立叶级数是例 5 的结果，即

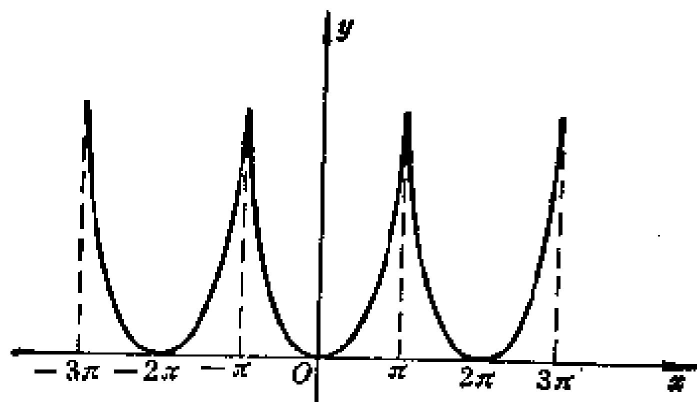


图 9.9

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\cdots\right),\quad 0\leqslant x\leqslant\pi.$$

按奇式展开，开拓的函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant\pi, \\ -x^2, & -\pi\leqslant x<0. \end{cases}$

在$(-\pi,\pi)$是奇函数(如图 9.10)，它的傅立叶系数是

$$a_n=0.$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin nx dx=\frac{2(-1)^{n+1}\pi}{n}+\frac{4[(-1)^n-1]}{\pi n^3}.$$

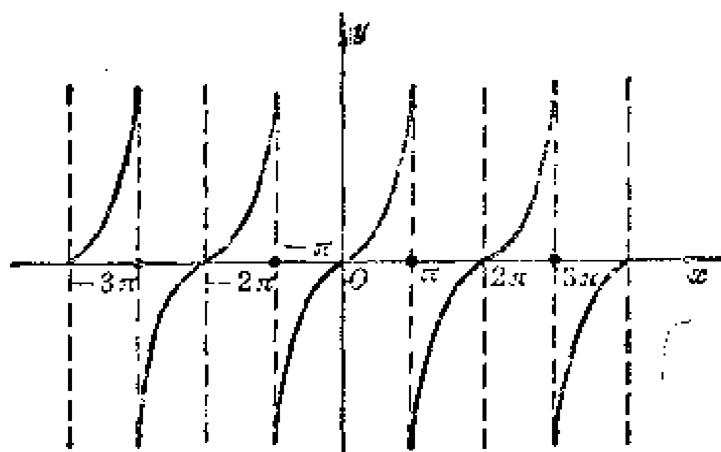


图 9.10

于是，
$$x^2=\left(\frac{2\pi}{1}-\frac{8}{\pi}\right)\sin x-\frac{2\pi}{2}\sin 2x+\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{\pi 3^3}\right)\sin 3x$$
$$-\frac{2\pi}{4}\sin 4x+\cdots,\quad 0\leqslant x<\pi.$$

当 $x=\pi$ 时，傅立叶级数收敛于

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{-\pi^2+\pi^2}{2}=0.$$

五、以 $2l$ 为周期的函数的傅立叶级数

如果函数 $f(x)$是以 $2l$ 为周期，只在长为 $2l$ 的区间$[-l, l]$将函数 $f(x)$展成傅立叶级数即可．作变量替换，将函数 $f(x)$以$2l$为周期换成新函数 $\varphi(x)$ 以 2π 为周期，再按已知的公式展开．

设 $x=\frac{l}{\pi}y$，即 $y=\frac{\pi}{l}x$. 代入 $f(x)$之中，令

$$f(x)=f\left(\frac{l}{\pi}y\right)=\varphi(y),$$

则 $\varphi(y)$是以 2π 为周期的周期函数.

事实上，$\varphi(y+2\pi)=f\left[\frac{l}{\pi}(y+2\pi)\right]=f\left(\frac{l}{\pi}y+2l\right)$

$$=f\left(\frac{l}{\pi}y\right)=\varphi(y).$$

已知 $\varphi(y)$在$[-\pi,\pi]$的傅立叶级数是

$$\varphi(y)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos ny+b_n\sin ny),$$

其中 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(y)\cos ny dy,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(y)\sin ny dy.$

于是，再将 $y=\frac{\pi}{l}x$代入上式，就得到函数$f(x)$在$[-l,l]$的傅立叶级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),\tag{10}$$

其中 $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\quad n=0,1,2,\cdots$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\quad n=1,2,\cdots$$

例 9. 将函数 $f(x)=\begin{cases}0, & -2<x<0,\\ p, & 0\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$ （p是不为 0 的常数）展成傅立叶级数.

解 $l=2$. 傅立叶系数是

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}pdx=p.$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2 p\cos\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$=\frac{p}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2=0.$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2 p\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$=-\frac{p}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2=\frac{p}{n\pi}[1-(-1)^n].$$

于是，由(10)式，

$$f(x)=\frac{p}{2}+\frac{2p}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2}+\cdots\right),$$

$$0<|x|<2.$$

例 10. 将函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant\frac{a}{2},\\ -1, & \frac{a}{2}<x\leqslant a,\end{cases}$ $(a>0)$展成余弦函数(即偶式展开)的傅立叶级数。

解 按偶式展开，有 $b_n=0$.

$$a_0=\frac{2}{a}\left[\int_0^{\frac{a}{2}}dx+\int_{\frac{a}{2}}^{a}(-1)dx\right]=0.$$

$$a_n=\frac{2}{a}\left[\int_0^{\frac{a}{2}}\cos\frac{n\pi x}{a}dx+\int_{\frac{a}{2}}^{a}(-1)\cos\frac{n\pi x}{a}dx\right]$$

$$=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{a}\Big|_0^{\frac{a}{2}}-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{a}\Big|_{\frac{a}{2}}^{a}=\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

$$a_1=\frac{4}{\pi},\ a_3=-\frac{4}{3\pi},\ a_5=\frac{4}{5\pi},\ a_7=-\frac{4}{7\pi},\ \cdots,$$

$$a_{2k}=0,\quad k=1,2,\cdots.$$

于是，由(10)式，有

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\cos\frac{\pi x}{a}-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{a}+\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi x}{a}-\cdots\right),$$

$$0<\left|x-\frac{a}{2}\right|<\frac{a}{2}.$$

当 $x=\frac{a}{2}$ 时，傅立叶级数收敛于（如图 9.11）

$$\frac{f\left(\frac{a}{2}+0\right)+f\left(\frac{a}{2}-0\right)}{2}=\frac{-1+1}{2}=0.$$

傅立叶级数的和函数是以 $2a$ 为周期的周期函数，它的图象是图 9.11.

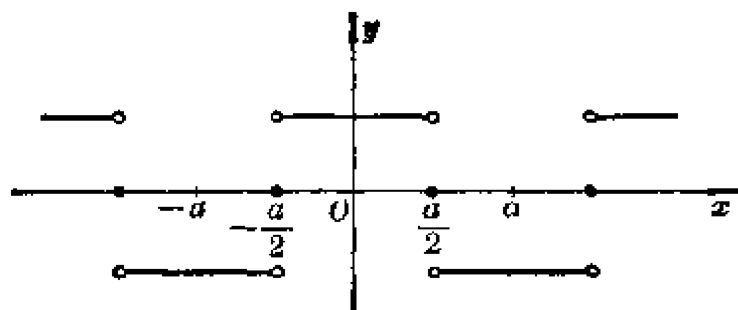


图 9.11

练 习 题 9.4

1. 将下列函数在指定的区间展成傅立叶级数，并画出和函数图象.

(1) $f(x)=\begin{cases}a, & -\pi<x\leqslant 0,\\ b, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$ （a 与 b 是常数）

(2) $f(x)=\begin{cases}\pi+x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ \pi-x, & 0<x<\pi.\end{cases}$

(3) $f(x)=x^3-x^2,\quad -\pi<x\leqslant\pi.$

(4) $f(x)=|\cos x|,\quad 0\leqslant x<2\pi.$

2. 将下列函数按偶式与奇式展成傅立叶级数，并画出和函数图象.

(1) $f(x)=x,\ 0\leqslant x\leqslant\pi.$　　(2) $f(x)=\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant x\leqslant\pi.$

3. 将下列函数在指定的区间上展成傅立叶级数，并画出和函数图象.

(1) $f(x)=|x|,\ -l<x\leqslant l$. (2) $f(x)=\begin{cases}A, & 0\leqslant x\leqslant l,\\ 0, & l<x<2l.\end{cases}$

(3) $f(x)=x^2,\ -l\leqslant x<l$.

4. 证明：三角多项式 $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 的傅立叶级数就是三角多项式 $P_n(x)$.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 光滑. 证明：

(1) 若 $f(-x)=f(x)$ 与 $f(\pi-x)=-f(x)$，则函数 $f(x)$ 的傅立叶级数是

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}\cos(2n-1)x.$$

(2) 若 $f(-x)=-f(x)$ 与 $f(\pi-x)=f(x)$，则函数 $f(x)$ 的傅立叶级数是

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}\sin(2n-1)x.$$

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 可积. 证明：

(1) 若 $\forall x\in[-\pi,\pi]$，有 $f(x+\pi)=f(x)$，则 $a_{2k-1}=b_{2k-1}=0$;

(2) 若 $\forall x\in[-\pi,\pi]$，有 $f(x+\pi)=-f(x)$，则 $a_{2k}=b_{2k}=0$.

其中 a_k,b_k 都是函数 $f(x)$ 的傅立叶系数.

* * * *

7. 证明：若函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 可积，且 a_k,b_k 是函数 $f(x)$ 的傅立叶系数，则 $\forall n\in\mathbb{N}$，有不等式

(1) $\dfrac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx$.

(2) $\dfrac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx$.

后者称为**贝塞尔**[①]**不等式**. (提示：证明(1)，讨论积分 $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2dx$. 参见练习题8.4第6题的(4))

---

① 贝塞尔(Bessel, 1784—1846)德国数学家.

8. 证明：若函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$连续，

$$T_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx),$$

则当$A_0, A_k, B_k(k=1,2,\cdots;n)$是函数$f(x)$的傅立叶系数时，才能使

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2dx$$

取最小值.

9. 证明：若函数$f(x)$的傅立叶级数在区间$[-\pi,\pi]$一致收敛于有界函数$f(x)$，则有帕塞法耳①等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx.$$

10. 设$S_n(x)=\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx,\ \ S_0(x)=\dfrac{1}{2}.$

$$\sigma_n(x)=\frac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_n(x)}{n+1},$$

证明 (1) $\sigma_n(x)=\dfrac{1}{2(n+1)}\left(\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\right)^2.$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n(x)dx=\pi.$

① 帕塞法耳(Parseval 1861—1942)德国数学家.

第十章　多元函数微分学

一元函数微分学的多数概念和定理都能相应地推广到多元函数(两个或两个以上自变量的函数)上来，并且有些概念和定理尚可得到进一步的发展. 这种推广，从数学角度来看，不仅是可能的,从实际应用来说,也是必需的. 尽管多元函数的微分学与一元函数的微分学有许多共同点,但是二者之间也有一些差异之处.这些差异主要是由多元函数是“多元”这一特殊性产生的. 因此，读者学习多元函数的微分学,经常要将所学的概念、定理以及处理问题的方法与一元函数的微分学中的相应概念、定理以及处理问题的方法进行分析和对比. 这样，一方面有助于理解和掌握多元函数微分学的概念、定理和计算方法;另一方面也有助于复习和巩固已学过的一元函数微分学中相应的知识.

本章名曰多元函数微分学，但在叙述上却主要是二元函数的微分学. 这是因为,由一元函数到二元函数,单与多的差异已能充分显露出来. 而二元、三元以至一般的 n 元函数之间,只有形式上的不同,没有本质上的区别. 突出二元函数既能使书写简便、形象直观,又能反映出“多元”的特点.

§10.1.　多 元 函 数

一、平面点集

将有序实数对(x,y)的集合,即

$$\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\},$$

称为**二维空间**,表为$\mathbf{R}\times\mathbb{R}$ 或$\mathbf{R}^2$. 任意一个有序实数对(a,b)都对应着坐标平面上一个点$P(a,b)$；反之，坐标平面上任意一个点$P(a,b)$都对应着一个有序的实数对(a,b)，即二维空间 $\mathbf{R}^2$与坐标

平面的所有点一一对应．因此，我们对二维空间 $\mathbf{R}^2$ 的有序实数对与坐标平面的点不加区别．例如，将二维空间 $\mathbf{R}^2$ 的子集说成是'平面点集"．

定义 设 $P_1(x_1,y_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的任意二点，非负数

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

称为点 P_1 与 P_2 的距离，表为 $|P_1-P_2|$．

不难证明，对 $\mathbf{R}^2$ 的任意三点 P_1,P_2,P_3，它们之间的距离满足三角不等式，即

$$|P_1-P_2|\leqslant|P_1-P_3|+|P_3-P_2|.$$

一元函数的定义域是实数集 R 的子集，一般情况是区间．区间分为开区间与闭区间．虽然开区间与闭区间仅相差两个端点，但是它对讨论函数性质有很大影响，因此这种区分是十分必要的．同样，对多元函数也有类似的问题．为了讨论多元函数的性质，有必要把数直线上的"开"，"闭"概念推广到平面点集上来．

不难看到，对开区间 (a,b) 或闭区间 $[a,b]$ 内（两个端点 a 与 b 除外）任意一点 x，总存在某个 r（x 越靠近 a 或 b，r 越小）邻域 $(x-r,x+r)$，使 $(x-r,x+r)\subset(a,b)$．连接开区间 (a,b) 或闭区间 $[a,b]$ 内任意二点的线段都属于开区间 (a,b) 或闭区间 $[a,b]$．开区间 (a,b) 或闭区间 $[a,b]$ 的两个端点 a 与 b 的任意邻域 $(a-r,a+r)$ 与 $(b-r,b+r)$ 中总有点属于开区间 (a,b)，也总有点不属于闭区间 $[a,b]$．

定义 以点 $P(a,b)$ 为心以任意 $r>0$ 为半径的圆内的所有点 (x,y)，即

$$\{(x,y)\mid\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<r\},$$

称为点 $P(a,b)$ 的 r（圆形）邻域，表为 $U(P,r)$．以点 $P(a,b)$ 为心以 $2r$ 为边长的正方形内的所有点 (x,y)，即

$$\{(x,y)\mid|x-a|<r,\ |y-b|<r\},$$

称为点 $P(a\ b)$的 r(**方形**)**邻域**,也表为$U(P,r)$.

这两种邻域只是形式的不同,没有本质的区别. 这是因为以点 P为心的圆形邻域内总存在以点 P为心的方形邻域;反之亦然(如图 10.1). 以后所说的 "点P的 r邻域", 可以是圆形邻域,也可以是方形邻域.

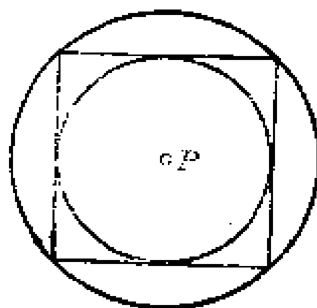


图 10.1

在点 $P(a,b)$的 r 邻域 $U(P,r)$中去掉点 P,即点集

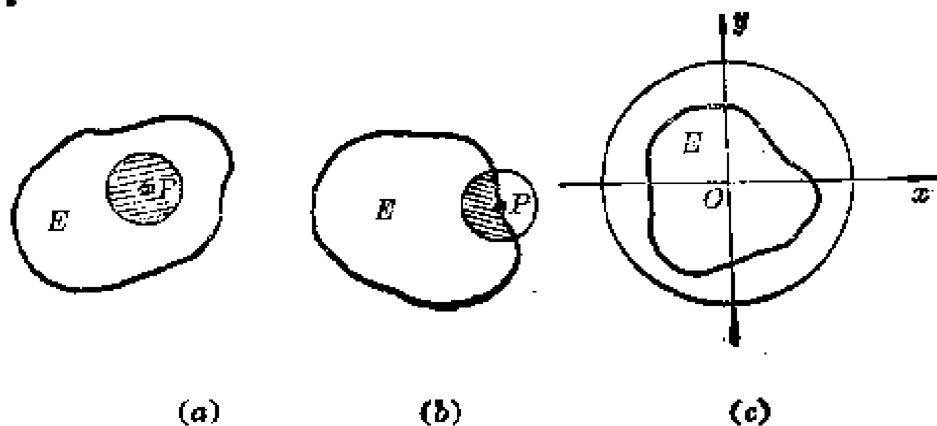
$$\{(x,y)\mid 0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<r\}$$

或
$$\{(x,y)\mid |x-a|<r,|y-b|<r,(x,y)\neq(a,b)\}$$

就是点P的 r **去心邻域**,表为$\mathring{U}(P,\ r)$. 当不需要明确指出邻域半径 r 时,简称点P的**去心邻域**,表为$\mathring{U}(P)$.

定义 设E是坐标平面点集,P是平面上一点.

1. 若$\exists r>0$,有 $U(P,r)\subset E$, 则称P是E的**内点**(如图 10.2.(a)).



(a) (b) (c)

图 10.2

2. 若 $\forall r>0$,邻域 $U(P,r)$内既有点属于 E,又有点不属于E,则称点P是E的**界点**(如图 10.2(b)). E的所有界点,即界点集合,称为E的**边界**.

3. 若 $\exists l>0$，有 $E\subset U(O, l)$，则称 E 是**有界集**（如图 10.2(c)），其中 O 是坐标原点．反之，称 E 是**无界集**．

例如：

1) $E=\{(x, y)\mid x^2+y^2<1\}$，即 E 是以原点为心的单位圆内部的所有点．E 的任意点都是 E 的内点．单位圆周 $x^2+y^2=1$ 上的点都是 E 的界点．单位圆周 $x^2+y^2=1$ 是 E 的边界．显然，E 是有界集．

2) $F=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 1\}$，即 F 是以原点为心的单位圆和单位圆周外部的所有点．单位圆外部任意点都是 F 的内点．单位圆周 $x^2+y^2=1$ 上的点都是 F 的界点．单位圆周 $x^2+y^2=1$ 是 F 的边界．显然，F 是无界集．

3) $G=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$，即 G 是以原点为心半径分别是 1 与 2 的圆周和这两个圆周之间的圆环内部所有点．环内部的任意点都是 G 的内点．圆周 $x^2+y^2=1$ 与 $x^2+y^2=4$ 是 G 的边界．显然，G 是有界集．

4) $H=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R}, y>0\}$，即 H 是不包含 x 轴的上半平面的所有点．上半平面中任意点都是 H 的内点．x 轴是 H 的边界．显然，H 是无界集．

由此可见，一个点集的内点必属于它．一个点集的界点可能属于它(如 2)和 3))，也可能不属于它(如 1)和 4))．

定义 设 E 是坐标平面点集．

1. 若 E 的任意点都是它的内点，并且 E 内任意两点都能用属于 E 的折线连接起来(即 E 是连通的)，则称点集 E 是**开区域**．

2. 若 E 是开区域添加它的边界，则称 E 是**闭区域**．

如上述的 1)与 4)都是开区域，2)和 3)都是闭区域．

由此可见，坐标平面上的开区域与闭区域是数直线上开区间与闭区间的推广．今后，如果不需要指明区域的开闭性或区域的

开闭性比较明显，就简称为**区域**.

定义 设 E 是有界区域. 正数

$$\sup\{|P_1-P_2|\,|\,P_1,P_2\in E\}$$

称为区域 E 的**直径**，表为 $d(E)$，即

$$d(E)=\sup\{|P_1-P_2|\,|\,P_1,P_2\in E\}.$$

例如，圆域的直径就是圆的直径. 矩形域的直径是它的对角线的长.

以上关于坐标平面点集的一些概念不难推广到一般情况. 将 n 个有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体，即

$$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_k\in\mathbf{R},\quad k=1,2,\cdots,n\},$$

称为 **n 维空间**，表为 $\mathbf{R}^n$. 任意一个 n 个有序实数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 也称为 n 维空间的一个点 P，表为 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其中 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$ 称为点 P 的第 k 个**坐标**.

$\mathbf{R}^n$ 中任意两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $Q(y_1, y_2,\cdots, y_n)$ 之间的距离表为 $|P-Q|$，定义

$$|P-Q|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}.$$

可以证明，$\mathbf{R}^n$ 中的距离具有下列性质：

1) $|P-Q|\geqslant 0$， $|P-Q|=0\Longleftrightarrow P=Q$， 即

$$x_k=y_k,\ k=1,2,\cdots,n.$$

2) $|P-Q|=|Q-P|$.

3) $\mathbf{R}^n$ 中任意三点 P_1,P_2,P_3，有三角不等式

$$|P_1-P_2|\leqslant|P_1-P_3|+|P_3-P_2|.$$

有了 $\mathbf{R}^n$ 中的距离，可定义点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的 r 邻域 $U(P, r)$，即

$$U(P,r)=\{Q\,|\,|P-Q|<r,\ Q\in\mathbf{R}^n\}.$$

有了邻域可定义内点、界点、边界，从而可定义 $\mathbf{R}^n$ 中的开区域与闭区域和有界区域. 我们常将三维空间中的区域称为体.

二、坐标平面的连续性

为了建立一元函数极限与连续的理论基础，我们曾用几个形式上不同的等价定理描述了 R 或数直线的连续性. 如闭区间套定理，确界定理，有限覆盖定理与聚点定理等. 同样，为了讨论二元函数的极限与连续，需要将数直线的连续性推广到二维空间 $\mathbf{R}^2$ 或坐标平面上来.

定理 1.（闭矩形套定理） 设坐标平面上有闭矩形区域列 $\{D_n\}$，其中 $\forall n\in\mathbf{N}$，

$$D_n=\{(x,y)\mid a_n\leqslant x\leqslant b_n,\ c_n\leqslant y\leqslant d_n\}.$$

若闭矩形列 $\{D_n\}$ 满足下列条件:

1） $D_1\supset D_2\supset\cdots\supset D_n\supset\cdots$;

2） $\lim\limits_{n\to\infty}d(D_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{(b_n-a_n)^2+(d_n-c_n)^2}=0$，

则坐标平面上存在唯一一点 P_0 属于任意一个闭矩形区域 D_n（如图 10.3).

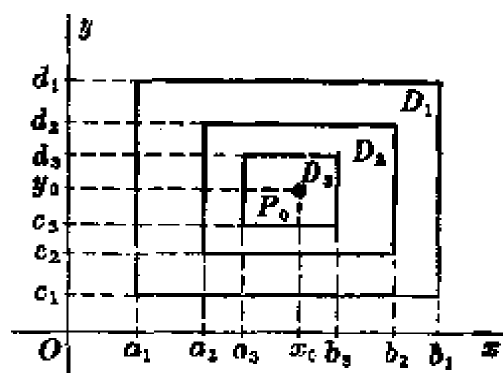


图 10.3

证明 由条件 1)，$\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}].$$

由条件 2)，有

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0,$$

根据 §4.1 闭区间套定理，存在唯一一个 x_0，$\forall n\in\mathbf{N}$，有 $x_0\in[a_n,b_n]$.

同理可证，存在唯一一个 y_0，$\forall n\in\mathbf{N}$，有 $y_0\in[c_n,d_n]$. 因此，在坐标平面上存在唯一一点 $P_0(x_0,y_0)$ 属于任意一个闭矩形区域 D_n. □

定义 设坐标平面上有点集E和区域集合$\{S\}$. 若$\forall P\in E$, $\{S\}$中至少存在一个区域G, 使$P\in G$, 称区域集合$\{S\}$**覆盖**点集E.

定理 2.（有限覆盖定理） 若坐标平面上开区域集合$\{S\}$覆盖有界闭区域D, 则$\{S\}$中存在有限个开区域也覆盖D.

证法 用反证法 假设有界闭区域D不能用$\{S\}$中任意有限个开区域所覆盖, 就说D"没有有限覆盖". 因为D有界, 所以存在一个闭正方形R_1, 使$D\subset R_1$. 通过R_1的中点将闭正方形R_1分成四个相等的正方形, 其中至少有一个闭正方形所包含的D的子集D_1没有有限覆盖. 如此继续进行下去, 应用闭区域套定理, 将得到矛盾.

证明 用反证法 假设有界闭区域D没有有限覆盖. 因为D有界, 所以存在一个闭正方形R_1, 使$D\subset R_1$. 设闭正方形R_1的一边长是l, R_1的直径$d(R_1)=\sqrt{2}\,l$. 通过闭正方形R_1的中点将R_1分成四个相等的正方形, 其中至少有一个闭正方形R_2所包含D的(非空)子集D_1没有有限覆盖, $d(R_2)=\frac{\sqrt{2}}{2}l$. 再通过闭正方形$R_2$的中点将$R_2$分成四个相等的正方形, 其中至少有一个闭正方形$R_3$所包含$D$的(非空)子集$D_2$没有有限覆盖. 如此无限进行下去, 得到闭正方形区域列$\{R_n\}$, 它满足下列条件:

$$1)\ R_1\supset R_2\supset\cdots\supset R_n\supset\cdots;\quad 2)\ \lim_{n\to\infty}d(R_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}l=0.$$

每个R_n中所包含D的(非空)子集D_{n-1}没有有限覆盖. 根据定理1(闭矩形套定理), 存在唯一一点$P\in R_n(n=1,2,\cdots)$.

下面证明$P\in D$. 用反证法. 假设$P\notin D$. 因为D是闭区域, 所以P既不是D的内点也不是D的界点, 即$\exists r>0$, 邻域$U(P,r)$不包含D的点. 由2), 当n充分大时, 有$d(R_n)<r$. 已知$P\in R_n$,

从而$R_n\subset U(P,r)$. 这表明 R_n 不包含 D 的点，这与 R_n 包含 D 的(非空)子集 D_{n-1} 矛盾. 于是,$P\in D$.

由于 $P\in D$,由已知条件,$\{S\}$中至少存在一个开区域 G,使 $P\in G$,即 P 是 G 的内点,也就是 $\exists\delta>0$,使 $U(P,\delta)\subset G$. 由 2)，当 n 充分大时，有 $R_n\subset U(P,\delta)\subset G$. 一方面，已知 R_n 中包含有 D 的(非空)子集 D_{n-1} 没有有限覆盖；另一方面，D_{n-1} 被$\{S\}$中一个开区域 G 所覆盖. 矛盾. □

定义 设 E 是坐标平面点集，P 是一个点(点 P 可以属于 E，也可以不属于 E). 若 $\forall r>0$，邻域 $U(P,r)$都含有 E 的无限多个点,则称 P 是点集 E 的**聚点**.

不难证明，P 是点集 E 的聚点$\Longleftrightarrow\forall r>0$，$\mathring{U}(P,r)\cap E\neq\varnothing$.

定理 3.（聚点定理） 坐标平面上有界无限点集 E 至少有一个聚点.

证明 已知 E 有界,则存在有界闭区域 D,使 $E\subset D$.

用反证法 假设 E 没有聚点,即 $\forall P\in D$,P 不是 E 的聚点，从而$\exists r_P>0$,邻域 $U(P,r_P)$至多含有 E 的一个点(若 $P\in E$,则 $U(P,r_P)$只含有点 P；若 $P\notin E$，则 $U(P,r_P)$不含 E 的点). 于是,开区域集

$$\{U(P,r_P)\mid P\in D\}$$

覆盖有界闭区域 D. 根据有限覆盖定理,存在有限个开区域

$$\{U(P_k,r_{P_k})\mid k=1,2,\cdots,n\}$$

也覆盖有界闭区域 D，从而也覆盖 E. 因此点集 E 至多有 n（有限)个点,与已知条件矛盾. □

定义 设坐标平面上有点列$\{P_n\}$. 若 $\exists P_0\in\mathbb{R}^2$, $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$, $\forall n>N$,有

$$|P_n-P_0|<\varepsilon,$$

则称点列$\{P_n\}$**存在极限或收敛,极限是**P_0,表为

$$\lim_{n\to\infty}P_n=P_0 \quad 或 \quad P_n\to P_0(n\to\infty).$$

点列极限也可用坐标表示. 设有点列$\{P_n(a_n,b_n)\}$与点$P_0(a_0,b_0)$.

引理 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(a_n,b_n)=P_0(a_0,b_0)\Longleftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a_0$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b_0$

证明 已知$\forall n\in\mathbf{N}$,

$$|P_n-P_0|=\sqrt{(a_n-a_0)^2+(b_n-b_0)^2}.$$

于是,

$$|a_n-a_0|\leqslant|P_n-P_0|\leqslant|a_n-a_0|+|b_n-b_0|,$$

$$|b_n-b_0|\leqslant|P_n-P_0|\leqslant|a_n-a_0|+|b_n-b_0|.$$

由这两个不等式,引理得证. □

因为点列收敛等价于点列的每个同名坐标数列收敛, 所以点列收敛也有相应的柯西收敛准则:

定理 4. (柯西收敛准则) 点列$\{P_n\}$收敛$\Longleftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall n,m>N$,有 $|P_n-P_m|<\varepsilon$.

证明留作练习.

定义 若坐标平面点集$\{P_n|n\in\mathbf{N}\}$有界,则称点列$\{P_n\}$**有界**.

定义 设坐标平面上有点列$\{P_n\}$, $\{n_k\}$ 是自然数集$\mathbf{N}$的无限子集,且$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$, 则称点列$\{P_{n_k}\}$是点列$\{P_n\}$的**子点列**,也简称**子列**.

定理 5. (致密性定理) 有界点列$\{P_n\}$存在收敛的子点列.

证明 设$\{P_n(a_n,b_n)\}$是有界点列. 显然, $\{a_n\}$与$\{b_n\}$都是有界数列. 根据§4.1 定理 5, 数列$\{a_n\}$存在收敛的子列$\{a_{n_k}\}$, 设$\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=a_0$. 相应的$\{b_{n_k}\}$也是有界数列. 再根据§4.1 定理 5, $\{b_{n_k}\}$也存在收敛的子数列$\{b_{n_{k_i}}\}$,设$\lim\limits_{i\to\infty}b_{n_{k_i}}=b_0$. 于是,有界点列$\{P_n\}$存在收敛的子点列$\{P_{n_{k_i}}\}$. □

以上定理 1、2、3、4、5 都是描述二维空间 $\mathbb{R}^2$ 或坐标平面的连

续性. 描述实数集 R 的连续性还有确界定理和单调有界数列存在极限定理. 因为这两个定理的共同基础是实数集的有序性, 而二维空间 R^2 没有定义有序实数对集合的序, 所以在二维空间 R^2 中没有与这两个定理相应的定理.

三、多元函数概念

一元函数仅是一个变量与实数之间的对应关系. 多元函数是描述了多个变量与实数之间的对应关系. 例如:

例 1. 物体运动的动能 W 与物体的质量 m 和运动的速度 v 两个量联系着. 对任意有序对 (m, v) 都对应着唯一一个动能 W. 已知它们之间的对应关系是

$$W=\frac{1}{2}mv^2.$$

例 2. 长方体的体积 V 与长方体的长 x, 宽 y 及高 z 三个量联系着. 对任意有序数组 (x, y, z) $(x>0, y>0, z>0)$ 都对应着唯一一个长方体的体积 V. 已知它们之间的对应关系是

$$V=xyz.$$

例 3. 教室内一点 P 的温度 T 与点 P 在三维空间的坐标 (x, y, z), 以及时间 t 联系着. 对任意有序四数组 (x, y, z, t) 都对应着唯一一个温度 T. 设它们之间的对应关系是

$$T=T(x, y, z, t).$$

上述三例都是多元函数的实例. 抽去它们的物理和几何意义, 仅保留它们的数量关系, 则它们有一个共性, 这就是多元函数的概念.

定义 设 A 是 n 维空间 R^n 的非空子集, 若存在对应关系 f, 对 A 中任意点 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 按照对应关系 f, 对应唯一一个 $y\in R$, 则称对应关系 f 是定义在 A 上的 **n 元函数**, 表为

$$f: A\to R.$$

点 P 对应的数 y，称为函数 f 在点 P 的函数值，表为

$$y=f(P) \quad 或 \quad y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

数集 A 称为函数 f 的**定义域**. 函数值的集合称为函数 f 的**值域**，表为

$$f(A)=\{y\mid y=f(P),P\in A\}\subset\mathbf{R}.$$

注 n 元函数有 n 个自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，它们彼此无关. 给定一个函数，没有特别指明它的定义域，就认为它的定义域是使该函数有意义的点的集合，一般可由函数解析式确定.

与一元函数相同，我们约定将 n 元函数 $f:A\to\mathbf{R}$，表为

$$y=f(P) \quad 或 \quad y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

根据多元函数概念，不难看到，上述的例 1、例 2 和例 3 分别是二元函数、三元函数和四元函数. 二元和二元以上的函数统称为**多元函数**.

注 函数 $y=f(P),P\in\mathbf{R}^n$，也称为**点 P 的函数**，简称**点函数**. 点函数的表示与一元函数的形式一致，且与点 P 所在空间的维数无关. 因此点函数形式简单，又具有一般性. 对点函数 $y=f(P)$ 得到的论断，对 P 在任意维空间都成立. 有时为了书写简单，将多元函数也写成点函数的形式.

例 4. 求函数 $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$ 的定义域.

解 因为函数值是实数，分母不能为 0，所以 x,y,z 必须满足不等式

$$1-x^2-y^2-z^2>0 \quad 或 \quad x^2+y^2+z^2<1,$$

即函数的定义域是原点为心的单位球内的所有点.

例 5. 求函数 $f(x,y)=\ln(x^2+y^2-1)+\sqrt{2-x^2-y^2}$ 的定义域.

解 函数 $\ln(x^2+y^2-1)$ 的定义域是

$$x^2+y^2-1>0 \quad 或 \quad 1<x^2+y^2.$$

函数$\sqrt{2-x^2-y^2}$的定义域是

$$2-x^2-y^2\geqslant 0 \quad 或 \quad x^2+y^2\leqslant 2.$$

它们的公共部分是 $1<x^2+y^2\leqslant 2$，即函数 $f(x,y)$ 的定义域是以原点为心，半径分别是 1 与$\sqrt{2}$的环形区域 G，圆周 $x^2+y^2=1$ 不属于区域 G，圆周 $x^2+y^2=2$ 属于区域 G.

二元函数在三维空间的几何图象.

设二元函数 $z=f(x, y)$ 定义域是区域D. $\forall(x, y)\in D$ 对应唯一一个 $z=f(x, y)$，从而在三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中确定唯一一点 $P[x,y,f(x,y)]$. 点集

$$\{P(x,y,z)\mid(x,y)\in D, z=f(x,y)\}$$

称为函数 $z=f(x,y)$的图象. 我们经常遇到的二元函数 $z=f(x,y)$ 的图象绝大多数都是三维空间的曲面. 例如，由空间解析几何知：$z=ax+by+c$ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 的平面；$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$是定义在单位圆 $x^2+y^2\leqslant 1$ 的上半球面，如图 10.4；$z=x^2+y^2$ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 以原点为顶点开口向上的旋转抛物面，如图 10.5.

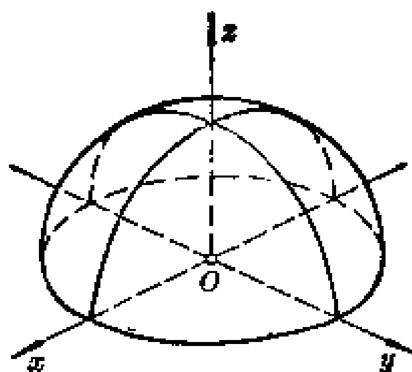


图 10.4

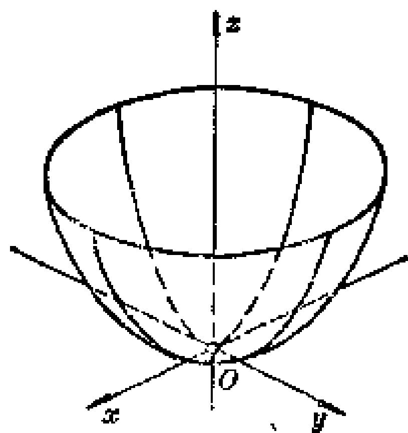


图 10.5

如果三维空间有一曲面S，平行 z 轴的直线至多与 S 交于一点，则曲面 S 确定了一个二元函数 $z=f(x,y)$. 曲面 S 在 xy平面的

投影区域就是该函数的定义域.

当函数的自变量个数 $n>2$ 时，n 元函数没有直观的几何图象. 习惯上也把三维空间的几何语言应用到 n 维空间. 例如,

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\leqslant R^2$$

是 $\mathbb{R}^3$ 中以点(a,b,c)为心以 R 为半径的闭球体,也称

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-a_k)^2\leqslant R^2$$

是 $\mathbb{R}^n$ 中以点$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$为心以 R 为半径的闭球体.

再例如,

$$ax+by+cz=d\quad(a,b,c,d\text{ 是常数})$$

是 $\mathbb{R}^3$ 中的平面,也称

$$\sum_{k=1}^{n}a_kx_k=b\quad(a_1,a_2,\cdots,a_n,b\text{ 是常数})$$

是 $\mathbb{R}^n$ 中的平面.

练 习 题 10.1

1. 描绘下列平面区域，并指出它是开区域、闭区域、有界区域、无界区域:

(1) $\{(x,y)\mid x^2>y\}$,　　(2) $\{(x,y)\mid x^2-y^2\leqslant 1\}$,

(3) $\{(x,y)\mid |xy|\leqslant 1\}$,　　(4) $\{(x,y)\mid |x+y|<1\}$,

(5) $\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$,　　(6) $\{(x,y)\mid |x|+y\leqslant 1\}$.

2. 描绘空间区域(体)的图象,并指出它是开区域还是闭区域:

(1) $V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 4\}$,

(2) $V=\{(x,y,z)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1\}$,

(3) $V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant a^2,\ |z|\leqslant h\}$,

(4) $V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2<z,\ z<2\}$,

(5) $V=\{(x,y,z)\mid |x|+|y|+|z|\leqslant 1\}$.

3. 证明：点 P 的圆形邻域内部必存在点 P 的方形邻域. 反之，在点 P

的方形邻域内部必存在点P的圆形邻域.

4. 证明：区域D有界$\Longleftrightarrow$区域D的直径

$$d(D)=\sup\{|P-Q|\mid P\in D, Q\in D\}$$

是有限数.

5. 指出下列各平面点集E的所有聚点所成的集合E'：

(1) $E=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$,

(2) $E=\{(r_1,r_2)\mid 0<r_1<1, 0<r_2<1, r_1$ 与 r_2 是有理数$\}$.

(3) $E=\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\middle| n\in\mathbb{N}\right\}$.

(4) $E=\{(m,n)\mid m,n$ 为整数$\}$.

6. 证明：点P是集合E的聚点$\Longleftrightarrow\forall r>0$, $\mathring{U}(P,r)\cap E\neq\varnothing$.

7. 证明：若点P是集合E的聚点，但不是集合E的内点，则点P是集合E的界点.

8. 证明：若点P是区域D的聚点，则$\exists\{P_n\}$，$\forall n\in\mathbb{N}$，$P_n\in D$，有$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P$.

9. 求下列函数的定义域：

(1) $z=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$,　　(2) $z=\ln(4-xy)$,

(3) $z=x+\arccos y$,　　(4) $z=\dfrac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$,

(5) $z=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2}$,　　(6) $z=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$,

(7) 三角形三边长分别是x, y, z，已知$x+y+z=2p$，则三角形面积

$$A=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}.$$

10. 求下列函数在指定点的函数值：

(1) 若$f(x,y)=xy+\dfrac{x}{y}$，求$f\left(\dfrac{1}{2},3\right)$ 与 $f(1,-1)$.

(2) 若$f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$，求$f(y,x)$，$f(-x,-y)$，$f\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}\right)$，$\dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$.

11. 若$f\left(x+y, \dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，求$f(x,y)$.

12. 描绘下列函数的图象:

(1) $z=1-x-y$,　　(2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$,

(3) $z=1-x^2-y^2$,　　(4) $z=xy$,

(5) $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.

*　　*　　*　　*

13. 在定理2中，将有界闭区域D换成有界开区域D或无界闭区域D，定理2都不成立,举例说明. 将开区域集合$\{S\}$换成闭区域集合$\{S\}$，定理2也不成立,举例说明.

14. 应用闭矩形套定理证明聚点定理.

15. 证明定理4(柯西收敛准则).

§ 10.2. 二元函数的极限与连续

一、二元函数的极限

与一元函数极限类似,可定义多元函数$f(P)$的极限.

定义　设函数$f(P)$在区域D有定义,P_0是D的聚点. 若$\exists A\in\mathbb{R}$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall P\in D$: $0<|P-P_0|<\delta$ (或 $P\in\mathring{U}(P_0,\delta)$), 有

$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

则称函数$f(P)$(关于区域D)在点P_0**存在极限,极限是**A,表为

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A$$

如果$f(P)$是二元函数,并用坐标表示,即$P(x,y)$, $P_0(x_0,y_0)$，那么二元函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的极限是A就是(用方形去心邻域):

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall(x,y)\in D$: $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$, 且$(x,y)\neq(x_0,y_0)$, 有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

也表为　$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A$　或　$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A.$

注　"$|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$, 且$(x,y)\neq(x_0,y_0)$" 表示点

$P_0(x_0, y_0)$的方形去心邻域．一般来说，验证二元函数的极限应用方形的去心邻域比较方便．当然这里也可用点 $P_0(x_0, y_0)$ 的圆形去心邻域：$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$．"去心"表明，函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$的极限与函数 $f(x, y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$的情况无关．

例 1. 证明：$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}(3x^2+2y)=14$.

证明 限定 $|x-2|<1$ 与 $|y-1|<1$(取 $\delta=1$)，有

$$|x+2|=|x-2+4|\leqslant|x-2|+4<5.$$

$$|(3x^2+2y)-14|=|3x^2-12+2y-2|$$

$$\leqslant 3|x+2||x-2|+2|y-1|<15|x-2|+2|y-1|$$

$$<15(|x-2|+|y-1|).$$

$\forall\varepsilon>0$，要使不等式

$$|(3x^2+2y)-14|<15(|x-2|+|y-1|)<\varepsilon$$

成立．取 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{30}, 1\right\}$．于是，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{30}, 1\right\}>0$，$\forall(x,y)$：$|x-2|<\delta$，$|y-1|<\delta$，且$(x, y)\neq(2, 1)$，有

$$|(3x^2+2y)-14|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}(3x^2+2y)=14.$$

例 2. 证明：函数

$$f(x, y)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0.\end{cases}\quad (x, y)\neq(0, 0)$$

在原点(0, 0)的极限是 0.

证明

$$|f(x, y)-0|=\begin{cases}\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0.\end{cases}$$

下面分两种情况讨论：$\forall\varepsilon>0$.

1) $xy=0$, $(x,y)\neq(0,0)$. 显然，$\forall\delta>0,\forall(x,y)$: $|x|<\delta$ 与 $|y|<\delta$，有

$$|f(x,y)-0|=0<\varepsilon.$$

2) $xy\neq0$. $\exists\delta=\frac{\varepsilon}{2}>0,\forall(x,y)$: $|x|<\delta$ 与 $|y|<\delta$，有

$$\begin{aligned}|f(x,y)-0|&=\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|\\&\leqslant|x|\cdot\left|\sin\frac{1}{y}\right|+|y|\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right|\\&\leqslant|x|+|y|<2\delta=\varepsilon.\end{aligned}$$

于是，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\frac{\varepsilon}{2}>0,\forall(x,y)$: $|x|<\delta$与$|y|<\delta$，且

$(x,y)\neq(0,0)$，有

$$|f(x,y)-0|<\varepsilon,$$

即函数 $f(x,y)$在原点$(0,0)$的极限是 0.

注 在例 2 中，原点$(0,0)$并不属于函数 $f(x,y)$的定义域，但是它在原点$(0,0)$仍然存在极限.

设函数 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$的去心邻域 $\mathring{U}(P_0)$ 有定义. 根据二元函数的极限定义，不难看到，若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 存在极限，设

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A,$$

则动点 $P(x,y)$沿任意（注意“任意”二字）一条曲线（或点列）无限趋近于点$P_0(x_0,y_0)$，二元函数$f(x,y)$都存在极限，并且极限都是A. 反之，动点 $P(x,y)$沿着某两条不同的曲线（或点列）无限趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$，二元函数 $f(x,y)$有不同的“极限”，则二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$不存在极限.

例 3. 证明：函数 $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}((x,y)\neq(0,0))$ 在原点 $(0,0)$ 不存在极限.

证明 当动点 $P(x,y)$ 沿着 x 轴 $(y=0)$ 和 y 轴 $(x=0)$ 无限趋近于原点 $(0,0)$ 时，极限都是 0，即

$$\lim_{x\to 0}f(x,0)=0 \quad 与 \quad \lim_{y\to 0}f(0,y)=0.$$

当动点 $P(x,y)$ 沿着通过原点 $(0,0)$ 的抛物线 $y=x^2$ 无限趋近于原点 $(0,0)$ 时，有（将 y 换成 x^2）

$$\lim_{x\to 0}f(x,x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x^2}{x^4+(x^2)^2}=\frac{1}{2}.$$

于是，函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 不存在极限.

一元函数 $f(x)$ 有自变量 x 趋于无穷 $(+\infty,-\infty,\infty)$ 的极限和无穷大. 类似地，二元函数 $f(x,y)$ 也有各种类型点 (x,y) 趋于无穷的极限和无穷大. 我们可仿照一元函数自变量趋于无穷的极限和无穷大的定义，写出下列符号的定义：

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to y_0}}f(x,y)=A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists B>0$ 与 $\delta>0,\ \forall(x,y)$：$x>B$ 与 $|y-y_0|<\delta$，有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

$\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ y\to+\infty}}f(x,y)=-\infty \Longleftrightarrow \forall C>0,\ \exists B>0,\ \forall(x,y)$：$x<-B$ 与 $y>B$，有

$$f(x,y)<-C.$$

等等. 与一元函数极限类似，二元函数极限也有局部有界性，极限保序性，四则运算，柯西收敛准则等. 证明方法与一元函数极限证法相同，从略.

上述的二元函数极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$ 是两个自变量 x 与 y 分别独

立的任意方式无限趋近于 x_0 与 y_0. 这样的极限称为**二重极限**. 多元函数还有一种极限:

定义 若当 $x\to a$ 时(y 看作常数), 函数 $f(x,y)$ 存在极限, 设

$$\lim_{x\to a}f(x,y)=\varphi(y).$$

当 $y\to b$ 时, $\varphi(y)$ 也存在极限, 设

$$\lim_{y\to b}\varphi(y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x,y)=B,$$

则称 B 是函数 $f(x,y)$ 在点 $P(a,b)$ 的**累次极限**. 同样, 可定义另一个次序的累次极限, 即

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b}f(x,y)=C.$$

那么二重极限与累次极限之间有什么关系呢? 一般来说, 它们之间没有蕴涵关系. 例如:

1. 两个累次极限都存在, 且相等, 但是二重极限可能不存在. 如上述的例 3.

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=0,$$

而

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}\text{不存在.}$$

2. 二重极限存在, 但是两个累次极限都可能不存在. 如上述的例 2.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)=0,$$

而

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$$

与

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$$

都不存在. 因为当 $x\to 0$ 时 (y 看作常数), $\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在极限; 当

$y\to 0$ 时（x 看作常数），$\sin\frac{1}{y}$不存在极限，所以这两个累次极限都不存在.

由此可见，一般来说当累次极限存在时，不能用累次极限计算二重极限. 但是，累次极限是连续两次一元函数的极限，而一元函数的极限又是我们所熟悉的. 为此，希望将计算二重极限化成累次极限，即

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

或

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

那么在什么条件下这两个等式成立呢？有下面的定理：

定理 1. 若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$的二重极限与累次极限（首先 $y\to y_0$，其次 $x\to x_0$）都存在，则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

证明 设$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ 与$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=B$. 只须证明 $A=B$，即 $\forall \varepsilon>0$，有$|B-A|\leqslant\varepsilon$.

由二重极限的定义，$\forall \varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall (x,y)$：$|x-x_0|<\delta$ 与 $|y-y_0|<\delta$，且$(x,y)\neq(x_0,y_0)$，有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon. \tag{1}$$

由累次极限知，$\forall x$：$0<|x-x_0|<\delta$，极限$\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$存在，设

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x).$$

从而，有

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=B.$$

对不等式(1)取极限($y\to y_0$)，有

$$\lim_{y\to y_0}|f(x,y)-A|\leqslant\varepsilon,\quad 即\quad |\varphi(x)-A|\leqslant\varepsilon.$$

再取极限 $\lim\limits_{x\to x_0}|\varphi(x)-A|\leqslant\varepsilon$，即$|B-A|\leqslant\varepsilon$. □

二、二元函数的连续性

定义 设函数 $f(P)$ 在区域 D 有定义，且 $P_0\in D$. 若

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0),$$

即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall P\in D$: $|P-P_0|<\delta$(或 $P\in U(P_0,\delta)$)，有

$$|f(P)-f(P_0)|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(P)$ 在 P_0 连续.

若函数 $f(P)$ 在 P_0 不连续，则称 P_0 是函数 $f(P)$ 的间断点.

定义 若函数 $f(P)$ 在区域 D 任意点都连续，则称函数 $f(P)$ 在区域 D 连续.

若 $f(P)$ 是二元函数，并用坐标表示，即 $P(x,y)$，$P_0(x_0,y_0)$，那么二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续是 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，即(用方形邻域)

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall(x,y)\in D:|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta,\text{ 有}$$
$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

例如，函数 $f(x,y)=3x^2+2y$ 在 $(2,1)$ 连续(见例1). 事实上，

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}(3x^2+2y)=14=f(2,1).$$

多元连续函数的运算法则与一元连续函数类似. 有

定理 2. 若函数 $f(P)$ 与 $g(P)$ 在点 P_0 连续，则函数

$$f(P)\pm g(P),\quad f(P)g(P),\quad \frac{f(P)}{g(P)}\quad (g(P_0)\neq 0)$$

在点 P_0 都连续.

证明从略.

定理 3. 若函数 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续，并且函数 $f(u,v)$ 在点 $(u_0,v_0)=[\varphi(x_0,y_0),\psi(x_0,y_0)]$ 连续，则复合函数 $f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

证明 已知函数 $f(u,v)$ 在点 (u_0,v_0) 连续，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\eta>0$，

$\forall(u,v)$: $|u-u_0|<\eta$ 与 $|v-v_0|<\eta$，有

$$|f(u,v)-f(u_0,v_0)|<\varepsilon.$$

又已知函数 $u=\varphi(x,y)$ 与 $v=\psi(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续，即对上述的 $\eta>0$，$\exists\delta>0$，$\forall(x,y)$: $|x-x_0|<\delta$ 与 $|y-y_0|<\delta$，同时有

$$|u-u_0|=|\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)|<\eta$$

与

$$|v-v_0|=|\psi(x,y)-\psi(x_0,y_0)|<\eta.$$

于是，$\forall(x,y)$: $|x-x_0|<\delta$ 与 $|y-y_0|<\delta$，有

$$|f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]-f[\varphi(x_0,y_0),\psi(x_0,y_0)]|$$
$$=|f(u,v)-f(u_0,v_0)|<\varepsilon,$$

即复合函数 $f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续. □

定理 4.（保号性）若函数 $f(P)$ 在点 $P_0\in D$ 连续，且 $f(P_0)>0$，则 $\exists\delta>0$，$\forall P\in U(P_0,\delta)\cap D$，有 $f(P)>0$.

证明 已知 $f(P)$ 在 P_0 连续，即 $\exists\varepsilon_0=f(P_0)>0$，$\exists\delta>0$，$\forall P\in D$: $|P-P_0|<\delta$ 或 $\forall P\in U(P_0,\delta)\cap D$，有

$$|f(P)-f(P_0)|<\varepsilon_0=f(P_0),$$

即

$$f(P)>f(P_0)-f(P_0)=0. \quad □$$

注 一元函数 $\varphi(x)$，$\psi(y)$ 可看作是特殊的二元函数. 例如，$\varphi(x)$ 可看作是 $\forall y\in\mathbb{R}$，有 $\varphi(x)=F(x,y)$. 从而，一元函数 $\varphi(x)$ 在 x_0 连续，也就是二元函数 $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续（$\forall y_0\in\mathbb{R}$），即

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}F(x,y)=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)=F(x_0,y_0).$$

因此，凡是连续的一元函数也都是连续的二元函数. 例如，二元函数

$$f(x,y)=\frac{\sin x+x^3e^y+3}{\sin(x^2+y^2)}.$$

因为一元函数 $\sin x$，x^2，y^2，x^3，e^y 等在 $\mathbb{R}$ 都是连续函数，所以它们都

是二元连续函数．根据定理 2 和定理 3，二元函数 $f(x,y)$ 在使分母 $\sin(x^2+y^2)\neq 0$ 的点 (x,y) 都连续．

闭区间上连续函数有四个重要性质，这些性质也可推广到有界闭区域的多元连续函数上来．

定理 5．（有界性） 若函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 连续，则函数 $f(P)$ 在 D 有界，即 $\exists M>0, \forall P\in D$，有 $|f(P)|\leqslant M$．

证明 已知函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 连续，根据连续定义，$\forall P\in D, \exists \varepsilon_0=1, \exists \delta_P>0, \forall Q\in U(P,\delta_P)\cap D$，有

$$|f(Q)-f(P)|<1 \quad 或 \quad |f(Q)|\leqslant|f(P)|+1,$$

即函数 $f(P)$ 在 $U(P,\delta_P)\cap D$ 有界．开区域集

$$\{U(P,\delta_P)\,|\,P\in D\}$$

覆盖有界闭区域 D．根据有限覆盖定理，则开区域集（即邻域集）$\{U(P,\delta_P)\,|\,P\in D\}$ 中存在有限个开区域 $\{U(P_k,\delta_{P_k})\,|\,k=1,2,\cdots,n\}$ 也覆盖有界闭区域 D，并且

$$\forall Q\in U(P_k,\delta_{P_k})\cap D，有\ |f(Q)|\leqslant|f(P_k)|+1,$$
$$k=1,2,\cdots,n.$$

令 $\qquad M=\max\{|f(P_1)|,|f(P_2)|,\cdots,|f(P_n)|\}+1.$

于是，$\forall Q\in D$，有

$$|f(Q)|\leqslant M.$$

事实上，$\forall Q\in D$，存在某个 $U(P_k,\delta_{P_k})$，使 $Q\in U(P_k,\delta_{P_k})$，有

$$|f(Q)|\leqslant|f(P_k)|+1\leqslant M.\ \square$$

定理 6．（最值性） 若函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 连续，则函数 $f(P)$ 在 D 取到最小值 m 与最大值 M，即 $\exists P_1\in D, P_2\in D$，使 $f(P_1)=m, f(P_2)=M$，且 $\forall P\in D$，有

$$m\leqslant f(P)\leqslant M.$$

证明 只给出取到最大值的证明．根据定理 5，函数 $f(P)$ 在

D 有界．设 $\sup\{f(P)\mid P\in D\}=M$．只须证明 $\exists P_2\in D$，使 $f(P_2)=M$．

用反证法．假设 $\forall P\in D$，有 $f(P)<M$．显然，函数 $M-f(P)$ 在 D 连续，且 $M-f(P)>0$．于是，函数

$$\frac{1}{M-f(P)}$$

在 D 也连续．根据定理 5，$\exists C>0$，$\forall P\in D$，有

$$\frac{1}{M-f(P)}<C \quad \text{或} \quad f(P)<M-\frac{1}{C},$$

即 M 不是数集 $\{f(P)\mid P\in D\}$ 的上确界，矛盾．于是，必存在 $P_2\in D$，使 $f(P_2)=M$． □

定理 7．（介值性） 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 连续，且 m 与 M 分别是函数 $f(x,y)$ 在 D 的最小值与最大值，η 是 m 与 M 之间的任意数 $(m\leqslant\eta\leqslant M)$，则 $\exists P_0(x_0,y_0)\in D$，有

$$f(x_0,y_0)=\eta.$$

证明 根据定理 6，闭区域 D 存在两点 $P_1(x_1,y_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2)$，使

$$f(x_1,y_1)=m \text{ 与 } f(x_2,y_2)=M.$$

若 $m=M$，则 $\eta=m$（或 $\eta=M$），即 $\eta=f(x_1,y_1)$（或 $\eta=f(x_2,y_2)$），定理成立．若 $m<M$，分以下三种情况：

1) 如果 $P_1(x_1,y_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2)$ 都是 D 的内点．由区域的定义，P_1 与 P_2 可用属于区域 D 的一条折线 l 连接起来．设折线 l 的参数方程是

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

且 $(x_1,y_1)=(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))$，$(x_2,y_2)=(\varphi(\beta),\psi(\beta))$．根据定理3，函数 $f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 连续，且 $f[\varphi(\alpha),\psi(\alpha)]<\eta<f[\varphi(\beta),\psi(\beta)]$．根据§3.2定理 6，至少存在一个 t_0，$\alpha<t_0<\beta$，

使 $f[\varphi(t_0),\psi(t_0)]=\eta$. 令 $\varphi(t_0)=x_0,\psi(t_0)=y_0$, 则 $\exists P_0(x_0,y_0)=(\varphi(t_0),\psi(t_0))\in D$, 有

$$f(x_0,y_0)=\eta.$$

2) 如果 $P_1(x_1, y_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2)$ 有一个是有界闭区域 D 的界点. 设 P_1 是 D 的界点①, 且 $f(x_1, y_1)<\eta<f(x_2,y_2)$. 由连续函数保号性(定理 4), 则存在 D 的内点 $P_1'(x_1',y_1')$, 使 $f(x_1',y_1')<\eta$. 于是, P_1' 与 P_2 都是 D 的内点, 由 1), $\exists P_0(x_0, y_0)\in D$, 有

$$f(x_0,y_0)=\eta.$$

3) 如果 $P_1(x_1,y_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2)$ 都是有界闭区域 D 的界点, 同样可用 2)的证法证明. □

定义 设 $f(P)$ 在区域 D 有定义. 若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall P_1,P_2\in D$: $|P_1-P_2|<\delta$, 有

$$|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(P)$ 在 D **一致连续**.

定理 8.（一致连续性） 若函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 连续, 则函数 $f(P)$ 在 D 一致连续.

证明 $\forall Q\in D$, 已知 $f(P)$ 在点 Q 连续, 即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_Q>0,\forall P\in U(Q,\delta_Q)\cap D$, 有

$$|f(P)-f(Q)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

$\forall P_1,P_2\in D$: $P_1\in U(Q,\delta_Q)$ 与 $P_2\in(Q,\delta_Q)$, 分别有

$$|f(P_1)-f(Q)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad 与 \quad |f(P_2)-f(Q)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是,

$$|f(P_1)-f(P_2)|\leqslant|f(P_1)-f(Q)|+|f(Q)-f(P_2)|<\varepsilon,\quad(2)$$

---

① 由开区域的定义知, 开区域 D 的任意二点可用一条属于 D 的折线连接起来. 开区域加上它的边界是闭区域, 从闭区域的定义, 直接得不到闭区域 D 的一个界点和一个内点可用属于 D 的折线连接起来.

即 $\forall P_1, P_2 \in U(Q, \delta_Q) \cap D$，有

$$|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon.$$

邻域集合$\left\{U\left(Q, \frac{\delta_Q}{2}\right) \middle| Q\in D\right\}$覆盖有界闭区域 D. 根据有限覆盖定理，存在有限个邻域$\left\{U\left(Q_k, \frac{\delta_{Q_k}}{2}\right) \middle| k=1,2,\cdots,n\right\}$也覆盖 D.

令 $\delta=\min\left\{\frac{\delta_{Q_1}}{2}, \frac{\delta_{Q_2}}{2}, \cdots, \frac{\delta_{Q_n}}{2}\right\}$. 下面证明，这个 δ 就满足一致连续的要求.

若 $\forall P_1, P_2\in D$，且 $|P_1-P_2|<\delta$. 点P_1 必属于这 n 个邻域中的某一个，设 $P_1\in U\left(Q_k, \frac{\delta_{Q_k}}{2}\right)$，即 $|P_1-Q_k|<\frac{\delta_{Q_k}}{2}$. 由三角不等式，有

$$|P_2-Q_k|\leqslant|P_2-P_1|+|P_1-Q_k|<\delta+\frac{\delta_{Q_k}}{2}<\delta_{Q_k},$$

即 $P_2\in U(Q_k, \delta_{Q_k})$. 于是，由(2)式，有

$$|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon. \quad \square$$

练 习 题 10.2

1. 用极限定义证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}(4x^2+3y)=19$，　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0$，

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$. (提示：应用$\left|\frac{2xy}{x^2+y^2}\right|\leqslant 1$.)

2. 证明：若 $f(x, y)=\frac{x-y}{x+y}$，　$(x+y\neq 0)$，则

$$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0}f(x,y)]=1 \quad 与 \quad \lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0}f(x,y)]=-1.$$

3. 设函数 $f(x,y)=\frac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}$，证明：当点$(x,y)$沿通过原点的任意直线$(y=mx)$趋于$(0,0)$时，函数 $f(x,y)$存在极限，且极限相等. 但是，此函数

在原点不存在极限．（提示：在抛物线 $y=x^2$ 上讨论．）

4．若将函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 限制在区域 $D=\{(x,y)\mid |y|<x^2\}$，则函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 存在极限（关于 D）．

5．证明：$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A$（设 $x=x_0+r\cos\theta$，$y=y_0+r\sin\theta$）$\Longleftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall r$：$0<r<\delta,\forall\theta$：$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，有

$$|f(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)-A|<\varepsilon.$$

6．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\y\to 2}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$，　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 4}}\dfrac{\sin xy}{x}$，

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x+y)\ln(x^2+y^2)$　（提示：设 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$），

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{\sqrt{(1+4x^2)(1+6y^2)}-1}{2x^2+3y^2}$．

7．写出下列符号的定义：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}} f(x,y)=A$，　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\y\to b}} f(x,y)=\infty$，

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\y\to+\infty}} f(x,y)=+\infty$，　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\y\to b}} f(x,y)=B$．

并证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{1}{x^2+3y^2}=+\infty$．

8．证明：若 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=0$，且在 (x_0,y_0) 的邻域，有

$|f(x,y)-\varphi(y)|\leqslant\psi(x)$，　则　$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A$．

9．证明：若 $\forall Q\in U(P,r)$，有 $f(Q)\leqslant g(Q)$，且极限 $\lim\limits_{Q\to P}f(Q)$ 与 $\lim\limits_{Q\to P}g(Q)$ 存在，则 $\lim\limits_{Q\to P}f(Q)\leqslant\lim\limits_{Q\to P}g(Q)$．

10．求下列函数间断点集：

(1) $\ln(x^2+y^2)$，　　(2) $\dfrac{e^{x+y}}{x+y}$，　　(3) $\dfrac{1}{\cos(x^2+y^2)}$，

(4) $\dfrac{1}{\sin x\sin y}$．

11．证明：函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

在原点(0,0)分别对每个自变量 x 或 y (另一个看作常数)都连续，但是二元函数在原点(0,0)却不连续。

12. 证明：定理2中的乘积函数 $f(P)g(P)$ 在点 P_0 连续。

13. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续可导，定义

$$g(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y},\quad (x,y)\in D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant y\leqslant b\}, x\neq y.$$

问当 $x=y$ 时，$g(x,y)$ 取何值，可使 $g(x,y)$ 连续。

14. 应用致密性定理证明定理5。

15. 证明：若在开区域 G 函数 $f(x,y)$ 对变量 x 连续，对变数 y 满足李普希茨条件，即 $\forall(x,y_1),(x,y_2)\in G$，有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|,$$

其中 L 是常数，则函数 $f(x,y)$ 在 G 连续。

16. 证明：若函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}f(x,y)=A$，则函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 一致连续。

17. 应用致密性定理证明定理8。

* * * *

18. 证明：极限 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$ 存在 $\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall P_1,P_2$: $0<|P_1-P_0|<\delta$ 与 $0<|P_2-P_0|<\delta$，有 $|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon$。(柯西收敛准则)。

19. 证明：若函数 $f(x,y)$ 分别对每个变量 x 与 y 都连续，并对 x 又是单调的，则函数 $f(x,y)$ 连续。

20. 证明：若函数 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant A, b\leqslant y\leqslant B\}$ 连续，函数列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[a,A]$ 一致收敛，且 $b\leqslant\varphi_n\leqslant B$，则函数列

$$F_n(x)=f[x,\varphi_n(x)],\qquad n=1,2,\cdots,$$

在 $[a,A]$ 一致收敛。

§10.3. 多元函数微分法

一、偏导数

我们已经看到，一元函数的导数(或导函数)是研究函数性质

的极为重要的工具. 同样, 研究多元函数的性质也需要类似于一元函数导数这样的概念. 由于多元函数的自变量不止一个, 情况比较复杂. 不难想到, 可讨论多元函数分别关于每一个自变量(其余的自变量暂时看作常数)的导数. 这就是本段的偏导数.

定义 设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 有定义. $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点. 若 $y=y_0$(常数), 一元函数 $f(x,y_0)$ 在 x_0 可导, 即极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\qquad((x_0+\Delta x,y_0)\in D)$$

存在, 则称此极限是函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 关于 x 的**偏导数**, 表为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\ \text{或}\ z'_x(x_0,y_0),\ f'_x(x_0,y_0).$$

类似地有, 若 $x=x_0$(常数), 一元函数 $f(x_0,y)$ 在 y_0 可导, 即极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}\qquad((x_0,y_0+\Delta y)\in D)$$

存在, 则称此极限是函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 关于 y 的**偏导数**, 表为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\ \text{或}\ z'_y(x_0,y_0),\ f'_y(x_0,y_0).$$

若函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 任意 (x,y) 都存在关于 x(关于 y)的偏导数, 则称函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 存在关于 x(关于 y)的**偏导函数**, 也简称**偏导数**, 表为

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x}\ \text{或}\ z'_x(x,y),\ f'_x(x,y).$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y}\ \text{或}\ z'_y(x,y),\ f'_y(x,y).\right)$$

一般情况, n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在点 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$\in \mathbf{R}^n$ 关于 $x_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 的偏导数 $\left.\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|_Q$ 是极限

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|_Q=\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{f(x_1,\cdots,x_k+\Delta x_k,\cdots,x_n)-f(x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_n)}{\Delta x_k}.$$

由此可见，多元函数的偏导数就是多元函数分别关于每一个自变量的导数. 因此，求多元函数偏导数可按照一元函数的求导法则和求导公式进行.

例 1. 设 $u=x^y$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1}$ （y 看作常数）.

$\frac{\partial u}{\partial y}=x^y\ln x$ （x 看作常数）.

例 2. 设 $u=\frac{1}{r}$，$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$.

解 由复合函数的求导法则，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{2(x-a)}{2\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

$$=-\frac{x-a}{r^3}.$$

同法可得，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y-b}{r^3}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z-c}{r^3}$.

例 3. 理想气态方程是 $PV=RT$（R 是不为 0 的常数），证明

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-1.$$

证明 $P=\frac{RT}{V}$，有 $\frac{\partial P}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2}$. （$T$ 看作常数）

$V=\frac{RT}{P}$，有 $\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{P}$. （$P$ 看作常数）

$$T=\frac{PV}{R}，有\quad \frac{\partial T}{\partial P}=\frac{V}{R}.\quad (V\text{ 看作常数})$$

于是，

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{P}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{RT}{PV}=-1.$$

二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的两个偏导数有明显的几何意义：在空间直角坐标系中，设二元函数 $z=f(x,y)$ 的图象是一个曲面 S. 函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 关于 x 的偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$，就是一元函数 $z=f(x, y_0)$ 在 x_0 的导数. 由已知的一元函数导数的几何意义，偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 就是平面 $y=y_0$ 上曲线

$$C_1:\ \begin{cases}z=f(x,y),\\ y=y_0.\end{cases}$$

在点 $Q(x_0,y_0,z_0)(z_0=f(x_0,y_0))$ 的切线斜率 $\operatorname{tg}\alpha$（如图 10.6）

同样，偏导数 $f'_y(x_0,y_0)$ 是平面 $x=x_0$ 上曲线

$$C_2:\ \begin{cases}z=f(x,y),\\ x=x_0.\end{cases}$$

在点 $Q(x_0,y_0,z_0)(z_0=f(x_0,y_0))$ 的切线斜率 $\operatorname{tg}\beta$（如图 10.6）.

我们知道，若一元函数 $y=f(x)$ 在 x_0 可导，则 $y=f(x)$ 在 x_0 连续. 但是，二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 存在关于 x 和 y 的

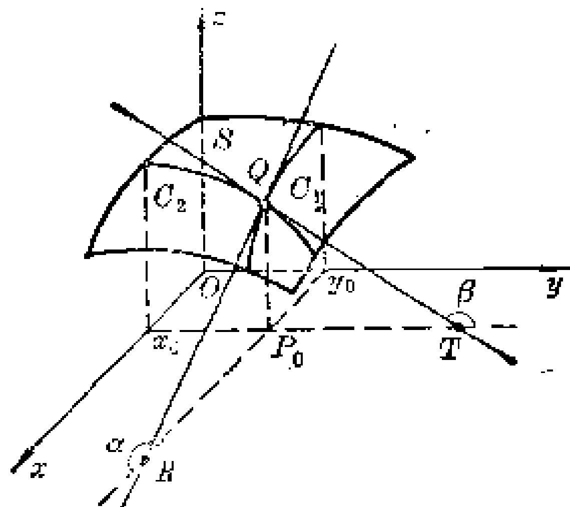


图 10.6

偏导数，$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$却不一定连续．这是因为$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$存在关于x的偏导数$f'_x(x_0,y_0)$，只能得到一元函数$z=f(x,y_0)$(即图10.6中的曲线C_1)在x_0连续．同样，由$f'_y(x_0,y_0)$存在，只能得到一元函数$z=f(x_0,y)$(即图10.6中的曲线C_2)在y_0连续．由此可见，两个偏导数$f'_x(x_0,y_0)$与$f'_y(x_0,y_0)$只是过点$P_0(x_0,y_0)$平行x轴与平行y轴两个特殊路线的变化率．而二元函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$连续是与它在点$P_0(x_0,y_0)$邻域有关的概念，即不仅与过点P_0的平行x轴与平行y轴的线段上点的函数值变化有关，而且也与点P_0邻域内其它点上函数值的变化有关．例如，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2, & xy=0,\\ 1, & xy\neq 0.\end{cases}$$

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0.$$

同样，$f'_y(0,0)=0$．于是，函数$f(x,y)$在点$(0,\ 0)$存在两个偏导数．但是，

沿着直线$y=0$，有$\lim\limits_{x\to 0}f(x,0)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，

沿着直线$y=x(x\neq 0)$，有$\lim\limits_{x\to 0}f(x,x)=\lim\limits_{x\to 0}1=1$，

即函数$f(x,y)$在点$(0,\ 0)$不存在极限．当然，函数$f(x,y)$在点$(0,0)$不连续．

二、全微分

我们已知，一元函数$y=f(x)$在x_0可微，有

$$dy=f'(x_0)\Delta x,\ \text{且}\ \Delta y=dy+o(\Delta x),$$

即微分dy是Δx的线性函数，并且dy与Δy之差比Δx是高阶无穷小．一元函数微分dy推广到多元函数就是全微分．

定义 若函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的全改变量

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

可表为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),\quad (1)$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$A$ 与 B 是与 Δx 和 Δy 无关的常数，则称函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ **可微**，(1)式的线性主要部分 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的**全微分**，表为 dz，即

$$dz=A\Delta x+B\Delta y. \tag{2}$$

由全微分的定义不难看到，全微分的两个性质：dz 是 Δx 与 Δy 的线性函数；dz 与 Δz 之差比 ρ 是高阶无穷小.

显然，若函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，则函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

如果函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，全微分(2)中的常数 A 与 B 与函数 $f(x,y)$ 有什么关系呢？有下面可微的必要条件：

定理1.（可微的必要条件） 若函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，则函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 存在两个偏导数，且全微分(2)中的 A 与 B 分别是

$$A=f'_x(x_0,y_0) \text{ 与 } B=f'_y(x_0,y_0).$$

证明 已知函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，即

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),\qquad \rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}.$$

当 $\Delta y=0$ 时，有

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+o(\Delta x).$$

用 Δx 除上式等号两端，再取极限($\Delta x\to0$)，有

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$=A+\lim_{\Delta x\to0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=A.$$

同法可证 $$f'_y(x_0,y_0)=B.\ \square$$

与一元函数相同，规定：自变量的改变量等于自变量的微分，即 $\Delta x=dx, \Delta y=dy$. 于是，函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的全微分

$$dz=f'_x(x_0,y_0)dx+f'_y(x_0,y_0)dy$$

或
$$dz=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P dy.$$

注 这里的 dx, dy 是与自变量 x, y 无关的独立变量，可取任意值.

类似地有 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在点 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全微分

$$du=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

我们已知，一元函数的可微与可导是等价的. 由定理1，二元函数可微一定存在两个偏导数；反之，二元函数存在两个偏导数却不一定可微. 例如，函数

$$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$$

在原点 $(0,0)$ 存在两个偏导数，即

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0.$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0.$$

但是，它在原点 $(0,0)$ 不可微.

事实上，假设它在原点 $(0,0)$ 可微，有

$$df=f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y=0.$$

$$\Delta f=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}.$$

$$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

特别是，取 $\Delta x=\Delta y$，有

$$\Delta f=\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}=\sqrt{|\Delta x|^2}=|\Delta x|,$$

$$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{2(\Delta x)^2}=\sqrt{2}\,|\Delta x|.$$

于是，$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f-df}{\rho}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\sqrt{2}\,|\Delta x|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0.$$

即 $\Delta f-df$ 比 ρ 不是高阶无穷小($\rho\to 0$)，与可微定义矛盾. 于是，函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在原点(0,0)不可微.

函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的全微分 $dz=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y$ 涉及函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 邻域内所有点的函数值，而偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 与 $f'_y(x_0,y_0)$ 仅涉及函数 $f(x,y)$ 在过点 $P_0(x_0,y_0)$ 的直线 $x=x_0$ 与 $y=y_0$ 上点的函数值. 因此，仅仅两个偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 与 $f'_y(x_0,y_0)$ 存在并不能保证函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微. 那么在什么条件下可保证函数在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微呢？有下面可微的充分条件. 首先证明一个引理.

引理 若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域 G 存在两个偏导数，则 $\forall(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in G$，全改变量

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x+f'_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y,\end{aligned}$$

其中 $0<\theta_1<1,0<\theta_2<1$.

证明 显然，若点 $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in G$，则点 $(x_0,y_0+\Delta y)$ 与 $(x_0+\Delta x,y_0)\in G$，且连接二点 $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 与 $(x_0,y_0+\Delta y)$ 或 $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 与 $(x_0+\Delta x,y_0)$ 的线段也属于 G（如图 10.7）. 为此，将全改变量 Δz 改写如下的形式:

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

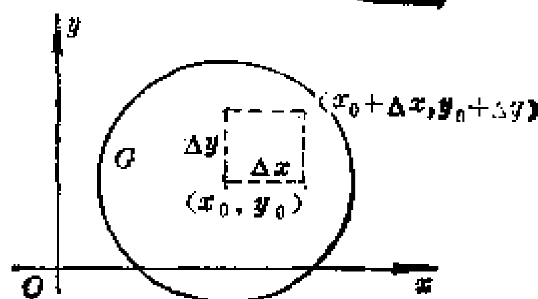


图 10.7

$$=[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0+\Delta y)]$$
$$+[f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)].$$

上述等式等号右端第一个方括号内，$y=y_0+\Delta y$ 是常数，只是 x 由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$；第二个方括号内，$x=x_0$ 是常数，只是 y 由 y_0 变到 $y_0+\Delta y$. 根据一元函数的微分中值定理，有

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$$
$$=f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x+f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y,$$

其中 $0<\theta_1<1$，$0<\theta_2<1$. □

这个引理亦称二元函数的**中值定理**. 它是用一元函数处理这类二元函数（一般是 n 元函数）问题的典型方法.

定理 2.（可微的充分条件） 若函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的邻域G存在两个偏导数，且两个偏导数在点 $P(x_0, y_0)$连续，则函数 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$可微.

证明 $\forall(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in G$. 根据引理，将全改变量$\Delta z$写为：

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$$
$$=f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x+f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y,$$

其中 $0<\theta_1<1$，$0<\theta_2<1$.

已知偏导数在点 $P(x_0,y_0)$连续，有

$$f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)=f'_x(x_0, y_0)+\alpha, \qquad \lim_{\rho\to 0}\alpha=0,$$
$$f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)=f'_y(x_0, y_0)+\beta, \qquad \lim_{\rho\to 0}\beta=0.$$

从而，有

$$\Delta z=f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y.$$

而$\left|\dfrac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\rho}\right|\leqslant|\alpha|\dfrac{|\Delta x|}{\rho}+|\beta|\dfrac{|\Delta y|}{\rho}\leqslant|\alpha|+|\beta|\to 0$，$(\rho\to 0)$

或
$$\alpha\Delta x+\beta\Delta y=o(\rho).$$

于是，$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$.

$$=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho),$$

即函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微. □

注 偏导数连续是函数可微的充分条件，又不是必要条件. 例如，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

在原点(0,0)可微，而 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 在原点(0,0)却间断.

事实上，易求 $f'_x(0,0)=0$，$f'_y(0,0)=0$. 有

$df=f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y=0$.

$$\Delta f=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,\ 0)=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

$$=\rho^2\sin\frac{1}{\rho^2}.$$

$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

从而，
$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f-df}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\sin\frac{1}{\rho^2}}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\rho\sin\frac{1}{\rho^2}=0,$$

即函数 $f(x,y)$ 在原点(0,0)可微.

$\forall(x,y)$: $x^2+y^2\neq 0$，有

$$f'_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

特别是，当 $y=x$ 时，极限

$$\lim_{x\to 0}f'_x(x,x)=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{2x^2}\right)$$

不存在，即 $f'_x(x,y)$ 在原点(0,0)间断. 同法可证，$f'_y(x,y)$ 在原点(0,0)也间断.

三、可微的几何意义

已知一元函数 $y=f(x)$ 在 x_0 可微的几何意义是平面曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) $(y_0=f(x_0))$ 存在切线. 我们将要证明, 二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微的几何意义是空间曲面 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) $(z_0=f(x_0,y_0))$ 存在切平面. 这里首先要回答,何谓切平面? 切平面是切线在三维空间的推广. 因此,从量上认识切平面还得从切线说起.

我们曾定义, 曲线 C 在点 P 的切线 PT 是割线 PQ 的极限位置(当点 Q 沿曲线 C 无限趋近于点 P), 如图 10.8. 这是切线的定性定义. 由此不难给出与它等价的定量定义.

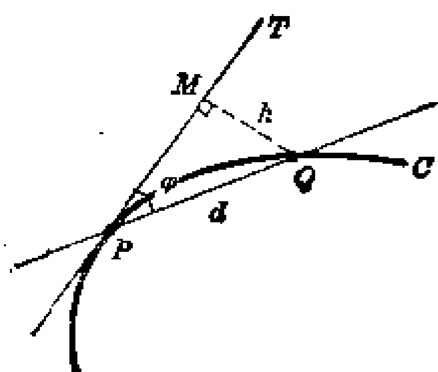


图 10.8

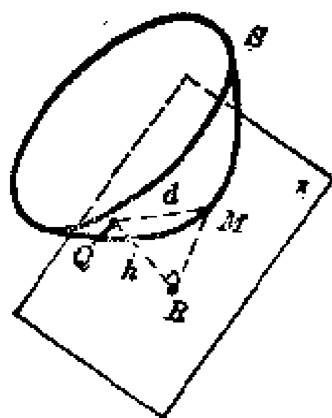


图 10.9

设曲线 C 上动点 Q 到直线 PT 的距离是 $h=|Q-M|$, 点 P 到点 Q 的距离是 $d=|P-Q|$. 二者之比是 $\sin\varphi=\frac{h}{d}$. 点 Q 沿曲线 C 无限趋近于点 P, 即 $d\to 0$. 显然,

$$PT\text{ 是曲线 } C \text{ 在点 } P \text{ 的切线} \Longleftrightarrow \lim_{d\to 0}\sin\varphi=\lim_{d\to 0}\frac{h}{d}=0.$$

将这个切线的定量定义推广到三维空间就是切平面的定义

定义 设有曲面 S, M 是 S 上一点, π 是过点 M 的一个平面. 曲面 S 上动点 Q 到平面 π 的距离 $h=|Q-R|$, 点 M 到点 Q 的距离 $d=|Q-M|$. 如图 10.9. 当动点 Q 在曲面 S 上以任意方式无限

趋近于点M，即$d\to 0$时，若$\lim\limits_{d\to 0}\frac{h}{d}=0$，则称平面$\pi$是曲面$S$在点$M$的切平面，$M$是切点.

定理 3. 二元函数$z=f(x,y)$在$P(x_0,y_0)$可微$\Longleftrightarrow$平面π

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

是曲面S: $z=f(x,y)$在点$M(x_0,y_0,z_0)(z_0=f(x_0,y_0))$的切平面.

证明 **必要性**($\Longrightarrow$)已知$z=f(x,y)$在$P(x_0,y_0)$可微，即

$$\Delta z=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho),\quad \rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}.$$

设$\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$, $\Delta z=z-z_0$, 上式可改写为

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)+o(\rho),$$

或
$$z-z_0-f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)=o(\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

曲面S上任意点$Q(x,y,z)$到平面π的距离h，由空间解析几何知，

$$h=\frac{|z-z_0-f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)|}{\sqrt{1+f'^2_x(x_0,y_0)+f'^2_y(x_0,y_0)}}$$
$$=\frac{|o(\rho)|}{\sqrt{1+f'^2_x(x_0,y_0)+f'^2_y(x_0,y_0)}}.$$

点M到点Q的距离

$$d=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=\sqrt{\rho^2+(z-z_0)^2}\geqslant\rho.$$

于是，$\frac{h}{d}\leqslant\frac{h}{\rho}=\frac{|o(\rho)|}{\rho}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+f'^2_x(x_0,y_0)+f'^2_y(x_0,y_0)}}\to 0\ (d\to 0)$，

即平面π是曲面S: $z=f(x,y)$在点$M(x_0,y_0,z_0)$的切平面.

充分性($\Longleftarrow$) 易证. □

将切平面π的方程改写为

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

或
$$(f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0),-1)(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0,$$

即切平面π上过点$M(x_0,y_0,z_0)$的任意向量$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$

都与常向量 $n(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0), -1)$ 垂直.

过切点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 与切平面 π 垂直的直线称为曲面 S: $z=f(x,y)$ 在点 M 的法线. 因此常向量 $n(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0), -1)$ 就是法线的方向向量. 从而, 过点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的法线方程是

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

设 α,β,γ 分别是法线 n 与 x,y,z 轴正向的夹角, 则法向量 $n(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0), -1)$ 的方向余弦是

$$\cos\alpha=\frac{f'_x(x_0,y_0)}{\pm\Delta},\quad \cos\beta=\frac{f'_y(x_0,y_0)}{\pm\Delta},\quad \cos\gamma=\frac{-1}{\pm\Delta},\tag{3}$$

其中 $\Delta=\sqrt{1+f'^2_x(x_0,y_0)+f'^2_y(x_0,y_0)}$, "±"表示法线两个不同的方向.

与一元函数微分的几何意义类似, 二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的全微分

$$dz=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y$$

的几何意义是曲面 S: $z=f(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程(二元函数)

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y$$

在点 (x_0,y_0) 与 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 的全改变量

$$z-z_0=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

例 4. 求曲面 $z=x^2+y^2-1$ 在点 $(2,1,4)$ 的切平面方程和法线方程以及法线的方向余弦.

解 $f'_x(x,y)=2x,\qquad f'_y(x,y)=2y,$

$f'_x(2,1)=4,\qquad f'_y(2,1)=2.$

切平面方程

$$4(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0$$

或
$$4x+2y-z-6=0.$$

法线方程

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}.$$

$\Delta=\sqrt{1+4^2+2^2}=\sqrt{21}$. 法线的方向余弦(有两组)

$$\cos\alpha=\frac{4}{\pm\sqrt{21}},\ \cos\beta=\frac{2}{\pm\sqrt{21}},\ \cos\gamma=\frac{-1}{\pm\sqrt{21}}.$$

注 二元函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微的几何意义是曲面 S: $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0,z_0)($z_0=f(x_0,y_0)$)存在切平面，它为我们认识可微和全微分提供了直观的几何模型. 例如，锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$在顶点(0, 0, 0)不存在切平面，因此二元函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$在点(0,0)不可微.

四、复合函数微分法

定理 4. 若函数$z=f(x,y)$在(x,y)可微，而$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$在 t 可导，则复合函数 (一元函数)$z=f[\varphi(t),\ \psi(t)]$在 t 也可导，且

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{4}$$

证明 给自变量 t 一个改变量 Δt, 相应有 Δx 与 Δy, 从而又有 Δz. 由可微定义，有

$$\Delta z=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y+\alpha\cdot\rho,$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, $\lim\limits_{\rho\to0}\alpha=0$. 因为在 $\Delta t\to0$ 的过程中，Δx 与 Δy 可能同时为 0, 即 $\rho=0$. 规定: 当 $\rho=0$ 时, $\alpha=0$.

上面等式两端用 Δt 除之，有

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=f'_x(x,y)\frac{\Delta x}{\Delta t}+f'_y(x,y)\frac{\Delta y}{\Delta t}+\alpha\frac{\rho}{\Delta t}.$$

等号两端取极限($\Delta t\to0$), 有

$$\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=f'_x(x,y)\cdot\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+f'_y(x,y)\cdot\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to0}\alpha\frac{\rho}{\Delta t}.$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\alpha\frac{\rho}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\alpha\cdot\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}=0,$$

即
$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.\quad\square$$

类似地有，若函数 $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可微，而 $x_k=\varphi_k(t)$ 在 t 可导 $(k=1,2,\cdots,n)$，则复合函数 $z=f[\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)]$ 在 t 也可导，且

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.\tag{5}$$

推论 若函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 可微，而 $x=\varphi(t,s)$ 与 $y=\psi(t,s)$ 在 (t,s) 都存在偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(t,s),\psi(t,s)]$ 在 (t,s) 存在偏导数，且

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},\tag{6}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.\tag{7}$$

证明 将 s 看作常数，应用定理 4，得(6)式．将 t 看作常数，再应用定理 4，得(7)式．$\square$

如果中间变量的个数和自变量的个数多于 2，并满足相应的条件，则有类似的结果．例如，若 $u=f(x,y,z)$ 在 (x,y,z) 可微，而 $x=x(t,s),y=y(t,s),z=z(t,s)$ 在 (s,t) 都存在偏导数，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t},\\ \frac{\partial u}{\partial s}&=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}.\end{aligned}\tag{8}$$

例5. 设函数 $z=x^y$，而 $x=\sin t,y=\cos t$，求 $\frac{dz}{dt}$．

解 由公式(4)，有

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

=

$$= yx^{y-1}\cos t + x^y \ln x \cdot (-\sin t)$$
$$= yx^{y-1}\cos t - x^y \sin t \cdot \ln x.$$

例 6. 设函数 $z=\dfrac{y}{x}$，而 $y=\sqrt{1-x^2}$，求$\dfrac{dz}{dx}$.

解 $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dx}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}$

$$=-\frac{y}{x^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{y}{x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$=-\frac{y}{x^2}-\frac{1}{y}=-\frac{x^2+y^2}{x^2y}.$$

例 7. 设函数 $z=\ln(x^2+y)$，而 $x=e^{t+s^2}$，$y=t^2+s$，求$\dfrac{\partial z}{\partial t}$，$\dfrac{\partial z}{\partial s}$.

解 由公式(6)与公式(7)，有

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{2x}{x^2+y}e^{t+s^2}+\frac{1}{x^2+y}2t$$
$$=\frac{2}{x^2+y}(xe^{t+s^2}+t).$$
$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{2x}{x^2+y}2se^{t+s^2}+\frac{1}{x^2+y}$$
$$=\frac{1}{x^2+y}(4xse^{t+s^2}+1).$$

例 8. 设 $F=f(x,xy,xyz)$，求$\dfrac{\partial F}{\partial x}$，$\dfrac{\partial F}{\partial y}$，$\dfrac{\partial F}{\partial z}$.①

解 设 $x=u, xy=v, xyz=w$，有 $F=f(u,v,w)$，并用 f_1'，f_2'，f_3' 分别代替$\dfrac{\partial f}{\partial u},\dfrac{\partial f}{\partial v},\dfrac{\partial f}{\partial w}$. 于是

---

① 这里应要求 $F=f(u,v,w)$ 可微，为了书写简便，从略．以下各题和练习题也是如此．

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$=f_1'+f_2'\cdot y+f_3'\cdot yz.$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$=f_2'\cdot x+f_3'\cdot xz.$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$=f_3'\cdot xy.$$

例 9. 证明：若 $u=u(x,y)$，而 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

证明

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta.$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta.$$

于是，

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)^2+\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta\right)^2$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

例 10. 设 $u=f(x,y,z)$，而 $y=y(x)$，$z=z(x)$，求 $\frac{du}{dx}$.

解 由公式(5)，有

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx}.$$

五、方向导数

设三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 存在三个偏导数

$$f'_x(x_0, y_0, z_0), f'_y(x_0, y_0, z_0), f'_z(x_0, y_0, z_0).$$

它们只是过点P沿着平行于坐标轴的方向的变化率．在实际应用中，要求我们知道函数$f(x, y, z)$在点P沿任意方向的变化率，这就是方向导数．

从点$P(x_0, y_0, z_0)$任作射线l．设l的方向余弦是$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$．在射线l上任取一点$P'(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$．设

$$\rho = |P-P'| = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}.$$

如图10.10，有

$$\Delta x = \rho\cos\alpha, \quad \Delta y = \rho\cos\beta, \quad \Delta z = \rho\cos\gamma.$$

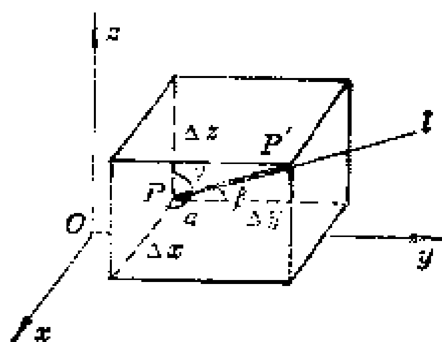


图 10.10

定义 在过点$P(x_0, y_0, z_0)$的射线l上任取一点$P'(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$，设$\rho = |P-P'|$．若极限

$$\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(P')-f(P)}{\rho}$$

存在，则称此极限是函数$f(x, y, z)$在点P沿着射线l的**方向导数**，表为$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_P$或$f'_l(x_0, y_0, z_0)$，即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_P = \lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(P')-f(P)}{\rho}.$$

定理5. 若函数$f(x, y, z)$在点$P(x, y, z)$可微，则函数$f(x, y, z)$在点P沿任意射线l的方向导数都存在，且

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是射线 l 的方向余弦.

证明 由可微定义，有

$$f(P')-f(P)=f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-f(x,y,z)$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z+\delta\rho,$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$, $\lim\limits_{\rho\to 0}\delta=0$. 在等号两端除以 ρ，并令 $\rho\to 0^+$，有

$$\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(P')-f(P)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0^+}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\rho}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\rho}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta z}{\rho}+\delta\right]$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma,$$

即

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma. \quad \square$$

定理 5 指出，若函数 $f(x,y,z)$ 在点 P 可微，则在点 P 沿任意方向的方向导数都可用偏导数表示出来. 由此可见，尽管偏导数非常特殊，但是在可微的条件下它又能够表示一般.

如果用 l^- 表示在点 P 与射线 l 反向的射线，则 l^- 的方向余弦与 l 的方向余弦相差一个符号. 因此，若函数 $f(x,y,z)$ 在点 P 可微，则有

$$\frac{\partial f}{\partial l^-}=-\frac{\partial f}{\partial l}.$$

在点 P 沿平行 x 轴正方向 $\left(\alpha=0,\ \beta=\gamma=\frac{\pi}{2}\right)$ 的方向导数表为 $\frac{\partial f}{\partial x^+}$，沿平行 x 轴的负方向 $\left(\alpha=\pi,\ \beta=\gamma=\frac{\pi}{2}\right)$ 的方向导数表为 $\frac{\partial f}{\partial x^-}$. 显然，函数 $f(x,y,z)$ 在点 P 存在偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}\Longleftrightarrow -\frac{\partial f}{\partial x^-}=\frac{\partial f}{\partial x^+}$.

注 定理5的条件只是结论成立的充分条件，即函数 $f(x,y,z)$

在点 $P(x,y,z)$ 不可微，函数 $f(x,y,z)$ 在点 P 沿任意射线 l 的方向导数都可能存在. 例如，二元函数

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

在点(0,0)两个偏导数都不存在，当然不可微.

事实上，当 $\Delta x\to 0$ 时，

$$\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

不存在极限，即函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)不存在关于 x 的偏导数. 同法可证，它在点(0,0)也不存在关于 y 的偏导数.

可是函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点(0, 0)沿任意射线 l 的方向导数都存在.

设在点(0,0)沿任意射线 l 的方向余弦是 $(\cos\alpha,\cos\beta)$. 在射线 l 上任取一点 $(x,y)=(\rho\cos\alpha,\rho\cos\beta)$，其中 ρ 是点 (x,y) 到原点(0,0)的距离. 根据方向导数的定义，有

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(\rho\cos\alpha,\rho\cos\beta)-f(0,0)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\rho}{\rho}=1,$$

即在点(0,0)沿任意射线 l 的方向导数都是 1.

练 习 题 10.3

1. 求函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

的偏导数. (提示：在原点(0,0)用偏导数定义，不在原点(0,0)用公式.)

2. 求下列函数的偏导数：

(1) $u=x^2+y^2\sin(xy)$，　　(2) $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

(3) $u=\dfrac{1}{y}\cos x^2$，　　(4) $u=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$，

(5) $u=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$，　　(6) $u=\arcsin\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$，

(7) $u=e^{\sin\frac{y}{x}}$,

(8) $u=\left(\frac{x}{y}\right)^z$,

3. 设 $f(x,y,z)=\ln(xy+z)$，求 $f'_x(1,2,0)$，$f'_y(1,2,0)$，$f'_z(1,2,0)$.

4.

(1) 设 $x=r\cos\varphi$,

$y=r\sin\varphi$,

求 $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$.

(2) 设 $x=r\sin\varphi\cos\theta$,

$y=r\sin\varphi\sin\theta$,

$z=r\cos\varphi$

求 $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix}$.

5. 求下列复合函数的偏导数:

(1) $u=f(x,y)$，而 $x=s+t$, $y=st$.

(2) $u=f(x,y,z)$，而 $x=r^2+s^2+t^2$, $y=r^2-s^2-t^2$,

$z=r^2-s^2+t^2$.

(3) $u=f(x,y)$，而 $x=r+s+t$, $y=r^2+s^2+t^2$.

6. 证明下列各题:

(1) 函数$z=xy+xe^{\frac{y}{x}}$ 是方程 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$ 的一个解.

(2) 函数 $z=\operatorname{arctg}\frac{x^3+y^3}{x-y}$ 是方程 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\sin 2z$ 的一个解.

7. 证明: 若 $f'_x(x,y)$ 与 $f'_y(x,y)$ 在矩形域D有界, 则函数 $f(x,y)$ 在D一致连续.

8. 证明: 若函数 $f(x,y)$ 在区域D对变量x连续(对每个固定的变量y)，且 $f'_y(x,y)$ 在D有界，则函数 $f(x,y)$ 在D连续.

9. 证明: 若函数 $f(x,y)$ 在区域D有连续的偏导数, 且 $\forall(x,y)\in D$, 有 $f'_x(x,y)=f'_y(x,y)=0$，则函数 $f(x,y)$ 在D是常数.

10. 求下列函数的全微分:

(1) $u=\frac{x+y}{1+y}$,　　(2) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$,　　(3) $u=\frac{z}{x^2+y^2}$,

11. 设 $f(x, y, z)=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$，求 $df(1,1,1)$.

12. 求下列曲面在指定点的切平面方程与法线方程：

(1) $z=\frac{x^2}{2}-y^2$，在点 $(2,-1,1)$.

(2) $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$，在点 $\left(1,1,\frac{\pi}{4}\right)$.

13. 求函数 $z=x^2-xy+y^2$ 在点 $(1, 1)$ 沿与 x 轴正向组成 α 角的射线 l 的方向导数. α 角取何值，方向导数有：(1)最大值；(2)最小值；(3)等于0.

14. 求下列函数在指定点和指定方向的方向导数：

(1) $u=xyz$，在点 $(1,1,1)$ 沿方向 $l\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

(2) $u=x^2-xy+z^2$ 从点 $(1,0,1)$ 到点 $(3,-1,3)$ 的方向.

*　　　*　　　*　　　*

15. 证明：函数 $f(x,y)=\begin{cases}1, & xy=0,\\ 0, & xy\neq 0\end{cases}$

在原点 $(0,0)$ 存在偏导数，但是在 $(0,0)$ 间断.

16. 证明：函数 $f(x, y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

在原点 $(0,0)$ 连续，且存在偏导数，但是在原点 $(0,0)$ 不可微.

17. 证明：曲面 $xyz=a^3(a>0)$ 上任意点 (x_0, y_0, z_0) 的切平面与三个坐标面围成的四面体的体积是常数 $\frac{9a^3}{2}$.

§10.4. 二元函数的泰勒公式

一、高阶偏导数

二元函数 $z=f(x,y)$ 的两个(一阶)偏导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 仍是 x 与 y 的二元函数. 若它们存在关于 x 和 y 的偏导数，即

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

称它们是二元函数 $z=f(x, y)$ 的二阶偏导(函)数. 二阶偏导数至

多有 2^2 个. 通常将

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$表为 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 或 $f''_{xx}(x,y)$.

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$表为 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 或 $f''_{xy}(x,y)$. (混合偏导数)

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$表为 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 或 $f''_{yx}(x,y)$. (混合偏导数)

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$表为 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 或 $f''_{yy}(x,y)$.

一般地,二元函数 $z=f(x, y)$的 $n-1$ 阶偏导函数的偏导数称为二元函数的 n 阶偏导数. 二元函数的 n 阶偏导数至多有 2^n个. 二元函数 $z=f(x, y)$的 n 阶偏导数的符号与二阶偏导数类似. 例如,符号

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k}\partial y^k} \quad 或 \quad f^{(n)}_{x^{n-k}y^k}(x,y)$$

表示二元函数 $z=f(x,y)$的 n 阶偏导数,首先对 x 求 $n-k$ 阶偏导数,其次接着对 y 求 k 阶偏导数.

二阶与二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**.

类似可定义三元函数、一般 n 元函数的高阶偏导数.

例 1. 求函数 $z=x^3y^3-3x^2y+xy^2+3$ 的二阶偏导数.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^3-6xy+y^2$. $\frac{\partial z}{\partial y}=3x^3y^2-3x^2+2xy$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^3-6y.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=9x^2y^2-6x+2y.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=9x^2y^2-6x+2y.$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6x^3y+2x.$$

例 2. 证明：若 $u=\frac{1}{r}, r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$，则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

证明 由 § 10.3. 例 2，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x-a}{r^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y-b}{r^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z-c}{r^3}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{r^3-(x-a)3r^2\frac{\partial r}{\partial x}}{r^6} \quad \left(\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x-a}{r}\right)$$

$$=-\frac{r^3-(x-a)3r^2\frac{x-a}{r}}{r^6}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3}{r^5}(x-a)^2.$$

同样，可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3}{r^5}(y-b)^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3}{r^5}(z-c)^2.$$

于是，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^5}[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]$

$$=-\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^3}=0.$$

例 3. 证明：若 $z=f(x,y), x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$，则

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}.$$ ①

证明

$$\frac{\partial f}{\partial \rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}=-\frac{\partial f}{\partial x}\rho\sin\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\rho\cos\varphi.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}=\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)=\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi\right)$$

---

① 根据 § 10.3 定理 4 的推论，要求函数 $f(x,y)$ 与 $\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$ 都可微，为了书写简单，从略。以下求高阶偏导数的例题和练习题也是如此。

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\varphi+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\varphi.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\rho\sin\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\rho\cos\varphi\right)$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\rho^2\sin^2\varphi-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\rho^2\sin\varphi\cos\varphi-\frac{\partial f}{\partial x}\rho\cos\varphi$$

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\rho^2\sin\varphi\cos\varphi+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\rho^2\cos^2\varphi-\frac{\partial f}{\partial y}\rho\sin\varphi.$$

于是，$\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\cos\varphi}{\rho}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\sin\varphi}{\rho}$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\cos\varphi}{\rho}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\sin\varphi}{\rho}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

即
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho}.$$

由例 1 看到，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，即二阶混合偏导数(先对 x 后对 y 和先对 y 后对 x) 与求导的顺序无关. 那么是否函数的高阶偏导数都与求导顺序无关呢？否！例如，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

在原点(0, 0)的两个偏导数 $f''_{xy}(0,0)$ 与$f''_{yx}(0,0)$都存在，且

$$f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0).$$

事实上，由偏导数定义，有

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0.$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0.$$

$$f'_x(0,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{hy\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2}}{h}=-y.$$

$$f'_y(x,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,h)-f(x,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{xh\frac{x^2-h^2}{x^2+h^2}}{h}=x.$$

$$f''_{xy}(0,\ 0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'_x(0,h)-f'_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}=-1.$$

$$f''_{yx}(0,\ 0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'_y(h,0)-f'_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1.$$

于是， $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

那么多元函数具有什么条件，它的混合高阶偏导数与求导的顺序无关呢？有下面的定理：

定理 1. 若函数 $f(x,y)$在点 $P(x_0,y_0)$的邻域 G 存在二阶混合偏导数 $f''_{xy}(x,y)$与 $f''_{yx}(x,y)$，并且它们在点 $P(x_0,y_0)$连续，则

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0).$$

证法　根据一阶二阶偏导数的定义，有

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f'_x(x_0,y_0+k)-f'_x(x_0,y_0)}{k}$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}\right]$$

$$=\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)+f(x_0,y_0)}{hk}$$

设　$\varphi(h,k)=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,\ y_0+k)$

$-f(x_0+h,\ y_0)+f(x_0,y_0)$.

从而，

$$f''_{xy}(x_0, y_0)=\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h, k)}{hk}.$$

同样方法，有

$$f''_{yx}(x_0, y_0)=\lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0}\frac{\varphi(h, k)}{hk}.$$

定理 1 的实质是上述两个累次极限相等，即两个累次极限可以交换次序. 由此可见，证明定理 1 要构造函数 $\varphi(h, k)$.

证明 当 $|h|$ 与 $|k|$ 充分小时，使 $(x_0+h, y_0+k)\in G$，从而，(x_0+h, y_0) 与 $(x_0, y_0+k)\in G$. 设

$$\varphi(h, k)=f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0+k) -f(x_0+h, y_0)+f(x_0, y_0). \tag{1}$$

令 $g(x)=f(x, y_0+k)-f(x, y_0)$. (1)式可改写为

$$\varphi(h, k)=g(x_0+h)-g(x_0).$$

函数 $g(x)$ 在以 x_0 与 x_0+h 为端点的区间可导，根据微分中值定理，有

$$\begin{aligned}\varphi(h, k)&=g'_x(x_0+\theta_1 h)h \qquad 0<\theta_1<1\\ &=[f'_x(x_0+\theta_1 h, y_0+k)-f'_x(x_0+\theta_1 h, y_0)]h.\end{aligned}$$

已知 $f''_{xy}(x,y)$ 在 G 存在，将 $x_0+\theta_1 h$ 看作常数，再根据微分中值定理，有

$$\varphi(h, k)=f''_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 k)hk, \qquad 0<\theta_1, \theta_2<1. \tag{2}$$

再令 $l(y)=f(x_0+h, y)-f(x_0, y)$，同样方法，有

$$\varphi(h, k)=f''_{yx}(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_4 k)hk, \qquad 0<\theta_3, \theta_4<1. \tag{3}$$

于是，由(2)式和(3)式，有

$$f''_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 k)=f''_{yx}(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_4 k).$$

已知 $f''_{xy}(x,y)$ 与 $f''_{yx}(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 连续. 当 $\rho=\sqrt{h^2+k^2}\to 0$ 时，有

$$f''_{xy}(x_0, y_0)=f''_{yx}(x_0, y_0). \quad \square$$

定理 1 的结果可推广到 n 元函数的高阶混合偏导数上去. 例如,三元函数 $f(x,y,z)$ 关于 x, y, z 的三阶偏导数按照不同的顺序共有六个:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z},\ \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial z},\ \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial z\partial x},\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial z\partial y},\ \frac{\partial^3 f}{\partial z\partial x\partial y},\ \frac{\partial^3 f}{\partial z\partial y\partial x}.$$

若它们在点 (x,y,z) 都连续,则它们相等. 若二元函数 $f(x,y)$ 所有的混合高阶偏导数都连续,则偏导数(亦称一阶偏导数)有二个,二阶偏导数只有三个($f''_{xy}=f''_{yx}$),三阶偏导数只有四个. 一般情况, n 阶偏导数只有 $n+1$ 个.

二、二元函数的泰勒公式

一元函数的泰勒公式能够推广到多元函数上来. 关于多元函数泰勒公式的作用和意义与一元函数泰勒公式相同,不再重述. 为书写简便, 只讨论二元函数的泰勒公式. 讨论二元函数泰勒公式的方法是作一个辅助函数, 将二元函数化为一元函数. 应用已知的一元函数的泰勒公式和复合函数的微分法得到二元函数的泰勒公式.

为了将二元函数 $f(x,y)$ 在点 $Q(a+h,\ b+k)$ 的函数值 $f(a+h,b+k)$ 在点 $P(a,b)$ 展成泰勒公式,作辅助函数

$$\varphi(t)=f(a+ht,b+kt),\qquad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

即 $\quad \varphi(t)=f(x,y),\quad x=a+ht,\quad y=b+kt,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$

显然, $t=0, \varphi(0)=f(a,b)$; $t=1, \varphi(1)=f(a+h,b+k)$. 于是, 函数 $f(a+h,\ b+k)$ 在点 $P(a,b)$ 展成的泰勒公式就是一元函数 $\varphi(t)$ 在点 0 的泰勒公式(即马克劳林公式)在 $t=1$ 的值.

定理 2. 若函数 $f(x,y)$ 在点 $P(a,b)$ 的邻域 G 存在 $n+1$ 阶连续的偏导数,则 $\forall Q(a+h,b+k)\in G$,有

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(a+\theta h,b+\theta k),0<\theta<1,\quad(4)$$

其中符号$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^i\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^l f(a,b)$表示偏导数$\frac{\partial^{i+l}f}{\partial x^i\partial y^l}$在 $P(a,b)$的值，

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(a,b)=\sum_{i=0}^{m}C_m^i h^i k^{m-i}\frac{\partial^m}{\partial x^i\partial y^{m-i}}f(a,b).$$

(4)式称为二元函数 $f(x,y)$在点 $P(a,b)$的**泰勒公式**.

证明 设 $\varphi(t)=f(a+ht,b+kt),\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$

由已知条件，函数 $\varphi(t)$在区间$[0,1]$存在 $n+1$ 阶连续导数. 从而，可将函数 $\varphi(t)$展成马克劳林公式，即

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}t+\frac{\varphi''(0)}{2!}t^2+\cdots+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n$$

$$+\frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1},\qquad 0<\theta<1.$$

特别是，当 $t=1$ 时，有

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}+\frac{\varphi''(0)}{2!}+\cdots+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}+\frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!},$$

$$0<\theta<1.$$

$$\varphi(1)=f(a+h,b+k),\quad \varphi(0)=f(a,b).$$

求 $\varphi'(t),\varphi''(t),\cdots,\varphi^{(n+1)}(t)$，即求复合函数

$$f(x,y),\quad x=a+ht,\quad y=b+kt$$

的高阶导数. 由复合函数微分法则，有

$$\varphi'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a+ht,b+kt).$$

$$\varphi''(t)=[\varphi'(t)]'=\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)'$$ [1]

$$=h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+hk\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$=h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\qquad \text{(根据定理 1)}$$

$$=\left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(a+ht,b+kt)$$

$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a+ht,b+kt).$$

同法可得，$\varphi^{(m)}(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(a+ht,b+kt)$.

令 $t=0$，有

$$\varphi^{(m)}(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(a,b),\quad m=1,2,\cdots,n.$$

$$\varphi^{(n+1)}(\theta)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(a+\theta h,b+\theta k).$$

将上述结果代入 $\varphi(1)$ 的展开式中，就得到二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P(a,b)$ 的泰勒公式：

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(a+\theta h,b+\theta k),\ 0<\theta<1.\quad \square$$

在泰勒公式(4)中，令 $a=0,b=0$，就得到二元函数 $f(x,y)$ 的马克劳林公式(将 h 与 k 分别用 x 与 y 表示)：

$$f(x,y)=f(0,0)+\frac{1}{1!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0)$$

---

[1] $\frac{\partial f}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 都是 x 与 y 的函数，而 x 与 y 又是 t 的函数.

$$+\frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0,0)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(\theta x,\theta y),\quad 0<\theta<1. \tag{5}$$

在泰勒公式(4)中，当 $n=0$ 时，有

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+f'_x(a+\theta h,b+\theta k)h+f'_y(a+\theta h,b+\theta k)k,$$

或 $f(a+h,b+k)-f(a,b)$

$$=f'_x(a+\theta h,b+\theta k)h+f'_y(a+\theta h,b+\theta k)k,\quad 0<\theta<1. \tag{6}$$

(6) 式是二元函数**中值定理**的另一种形式，这里只有一个 θ.

在泰勒公式(4)中，当 $n=1$ 时，有

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=f'_x(a,b)h+f'_y(a,b)k$$

$$+\frac{1}{2}\{f''_{xx}(a+\theta h,b+\theta k)h^2+2f''_{xy}(a+\theta h,b+\theta k)hk$$

$$+f''_{yy}(a+\theta h,b+\theta k)k^2\},\qquad 0<\theta<1. \tag{7}$$

不难将上述的二元函数的泰勒公式推广到 n 元函数上去. 例如，若三元函数 $f(x,y,z)$ 在原点 $(0,0,0)$ 的邻域 G 存在 $n+1$ 阶连续偏导数，则 $\forall(x,y,z)\in G$，有(三元函数 $f(x,y,z)$ 的马克劳林公式)

$$f(x,y,z)=f(0,0,0)+\frac{1}{1!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)f(0,0,0)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(0,0,0)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n+1} f(\theta x,\theta y,\theta z),$$

其中 $0<\theta<1$.

例 4. 将函数 $f(x,y)=e^{x+y}$ 展成马克劳林公式.

解 函数 $f(x,y)=e^{x+y}$ 在 $\mathbf{R}^2$ 存在任意阶连续偏导数，且

$\frac{\partial^{m+l}f}{\partial x^m\partial y^l}=e^{x+y}$，$\frac{\partial^{m+l}}{\partial x^m\partial y^l}f(0,0)=1$，$m$ 与 l 是任意非负整数.

由公式(5)，有

$$e^{x+y}=1+(x+y)+\frac{1}{2!}(x+y)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(x+y)^n$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}(x+y)^{n+1}e^{\theta(x+y)},\qquad 0<\theta<1.$$

不难看到，将 e^{x+y} 中的 $x+y$ 当作一个变量，用一元函数的马克劳林公式得到的结果与上述结果是一致的。

例 5. 当$|x|,|y|,|z|$都很小时，将超越函数

$$f(x,y,z)=\cos(x+y+z)-\cos x\cos y\cos z$$

近似表为 x,y,z 的多项式。

解 将函数 $f(x,y,z)$ 展成马克劳林公式(到二阶偏导数)，有

$$f(x,y,z)\approx f(0,0,0)+xf'_x(0,0,0)+yf'_y(0,0,0)+zf'_z(0,0,0)$$

$$+\frac{1}{2!}[x^2f''_{xx}(0,0,0)+y^2f''_{yy}(0,0,0)+z^2f''_{zz}(0,0,0)$$

$$+2xyf''_{xy}(0,0,0)+2yzf''_{yz}(0,0,0)+2zxf''_{zx}(0,0,0)].$$

$f(0,0,0)=0.$

$f'_x(0,0,0)=[-\sin(x+y+z)+\sin x\cos y\cos z]|_{(0,0,0)}=0.$

同样 $\quad f'_y(0,0,0)=0,\qquad f'_z(0,0,0)=0.$

$f''_{xx}(0,0,0)=[-\cos(x+y+z)+\cos x\cos y\cos z]|_{(0,0,0)}=0.$

同样 $\quad f''_{yy}(0,0,0)=0,\qquad f''_{zz}(0,0,0)=0.$

$f''_{xy}(0,0,0)=[-\cos(x+y+z)-\sin x\sin y\cos z]|_{(0,0,0)}$

$=-1.$

同样 $\quad f''_{yz}(0,0,0)=-1,\qquad f''_{zx}(0,0,0)=-1.$

于是，$\qquad f(x,y,z)\approx-(xy+yz+zx),$

即 $\qquad \cos(x+y+z)-\cos x\cos y\cos z\approx-(xy+yz+zx).$

三、二元函数的极值

在实际问题中，不仅需要一元函数的极值，而且还需要多元函数的极值。本段讨论二元函数的极值，其结果可以推广到 n 元函

数上去.

定义 设函数 $f(x,y)$ 在点 $P(a,b)$ 的邻域 G 有定义. 若 $\forall(a+h,b+k)\in G$, 有

$$f(a+h,b+k)\leqslant f(a,b)\quad(f(a+h,b+k)\geqslant f(a,b)),$$

则称 $P(a,b)$ 是函数 $f(x,y)$ 的**极大点**(**极小点**). 极大点(极小点)的函数值 $f(a,b)$ 称为函数 $f(x,y)$ 的**极大值**(**极小值**).

极大点与极小点统称为**极值点**. 极大值与极小值统称为**极值**.

例如, 点 $(1,2)$ 是函数 $f(x,y)=(x-1)^2+(y-2)^2-1$ 的极小点, 极小值是 $f(1,2)=-1$(如图 10.11).

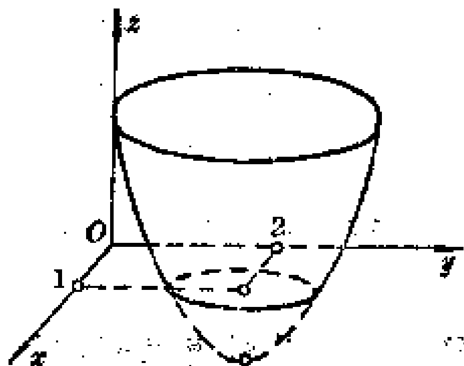


图 10.11

事实上, $\forall(x,y)$; 有 $(x-1)^2+(y-2)^2\geqslant 0$, 于是

$$f(x,y)\geqslant f(1,2).$$

哪些点可能是函数 $f(x,y)$ 的极值点呢? 即 $P(a,b)$ 是函数 $f(x,y)$ 的极值点的必要条件是什么呢? 有下面定理:

定理 3. 若函数 $f(x,y)$ 在点 $P(a,b)$ 存在两个偏导数, 且 $P(a,b)$ 是函数 $f(x,y)$ 的极值点, 则

$$f'_x(a,b)=0\quad 与\quad f'_y(a,b)=0.$$

证明 已知 $P(a,b)$ 是函数 $f(x,y)$ 的极值点, 即 $x=a$ 是一元函数 $f(x,b)$ 的极值点. 根据一元函数极值的必要条件, a 是一元函数 $f(x,b)$ 的稳定点, 即

$$f'_x(a,b)=0.$$

同样，有 $$f'_y(a,b)=0.\quad \square$$

方程组
$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0, \\ f'_y(x,y)=0, \end{cases}$$
的解(xy 平面上某些点)称为函数 $f(x,y)$ 的**稳定点**.

定理 3 指出，可微函数 $f(x,y)$ 的极值点一定是稳定点. 反之，稳定点不一定是极值点. 例如，函数(双曲抛物面)

$$f(x,y)=x^2-y^2.$$

$$f'_x(x,y)=2x, \qquad f'_y(x,y)=-2y.$$

显然，点$(0,0)$是函数 $f(x,y)=x^2-y^2$ 的稳定点. 但是点$(0,0)$并不是函数 $f(x,y)=x^2-y^2$ 的极值点. 事实上，在点$(0,0)$的任意邻域，总存在着点$(x,0)(x\neq 0)$，使 $f(x,0)=x^2>f(0,0)=0$；也总存在点$(0,y)(y\neq 0)$，使 $f(0,y)=-y^2<f(0,0)=0$，所以点$(0,0)$不是极值点.

那么什么样的稳定点才是极值点呢？即 $P(a,b)$ 是函数 $f(x,y)$ 的极值点的充分条件是什么呢？

定理 4. 设函数 $f(x,y)$ 有稳定点 $P(a,b)$，且在点 $P(a,b)$ 的邻域 G 存在二阶连续偏导数.

令
$$A=f''_{xx}(a,b),\ B=f''_{xy}(a,b),\ C=f''_{yy}(a,b).$$
$$\Delta=B^2-AC.$$

1) 若 $\Delta<0$，则 $P(a,b)$ 是函数 $f(x,y)$ 的极值点：

(i) $A>0$(或 $C>0$)，$P(a,b)$ 是函数 $f(x,y)$ 的极小点.

(ii) $A<0$(或 $C<0$)，$P(a,b)$ 是函数 $f(x,y)$ 的极大点.

2) 若 $\Delta>0$，$P(a,b)$ 不是函数 $f(x,y)$ 的极值点.

证明 已知 $P(a,b)$ 是函数 $f(x,y)$ 的稳定点，有

$$f'_x(a,b)=0 \quad 与 \quad f'_y(a,b)=0.$$

当 $|h|$ 与 $|k|$ 充分小时，讨论差 $f(a+h,b+k)-f(a,b)$ 的符号. 由

泰勒公式(7)，有(已知 $f'_x(a,b)=f'_y(a,b)=0$)

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)$$

$$=\frac{1}{2}[f''_{xx}(a+\theta h,b+\theta k)h^2+2f''_{xy}(a+\theta h,b+\theta k)hk$$

$$+f''_{yy}(a+\theta h,b+\theta k)k^2],\qquad 0<\theta<1.$$

又已知二阶偏导数在点 $P(a,b)$ 连续，当 $h\to0$ 与 $k\to0$ 时，有

$$f''_{xx}(a+\theta h,b+\theta k)=f''_{xx}(a,b)+\alpha=A+\alpha,\quad \alpha\to0.$$

$$f''_{xy}(a+\theta h,b+\theta k)=f''_{xy}(a,b)+\beta=B+\beta,\quad \beta\to0.$$

$$f''_{yy}(a+\theta h,b+\theta k)=f''_{yy}(a,b)+\gamma=C+\gamma,\quad \gamma\to0.$$

于是， $f(a+h,b+k)-f(a,b)$

$$=\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+\frac{1}{2}(\alpha h^2+2\beta hk+\gamma k^2),$$

其中 $\alpha h^2+2\beta hk+\gamma k^2$ 比 ρ^2 是高阶无穷小 ($\rho=\sqrt{h^2+k^2}$)．因此，当 $|h|$ 与 $|k|$ 充分小时，差 $f(a+h,b+k)-f(a,b)$ 的符号由 $Ah^2+2Bhk+Ck^2$ 的符号决定．因为 h 与 k 不能同时为零，不妨设 $k\neq0$ (当 $k=0$ 时，$h\neq0$，可得相同的结论)．

$$Ah^2+2Bhk+Ck^2=k^2\left[A\left(\frac{h}{k}\right)^2+2B\left(\frac{h}{k}\right)+C\right].$$

令 $\frac{h}{k}=t$，则差 $f(a+h,b+k)-f(a,b)$ 的符号由

$$D=At^2+2Bt+C$$

的符号决定．由一元二次方程根的判别，有

1) 若判别式 $\Delta=B^2-AC<0$，对任意实数 t，D 与 A(或 C)有相同的符号，即 $P(a,b)$ 是函数 $f(x,y)$ 极值点：

(i) $A>0$ (或 $C>0$)，有 $f(a+h,b+k)-f(a,b)>0$，即 $P(a,b)$ 是函数 $f(x,y)$ 的极小点．

(ii) $A<0$ (或 $C<0$)，有 $f(a+h,b+k)-f(a,b)<0$，即 $P(a,b)$ 是函数 $f(x,y)$ 的极大点．

2) 若判别式 $\Delta=B^2-AC>0$，方程 $D=0$ 有两个不同的实根 t_1 与 t_2，设 $t_1<t_2$，D 在区间 (t_1,t_2) 内与在区间 $[t_1,\ t_2]$ 外有相反的符号，即 $P(a,b)$ 不是函数 $f(x,y)$ 的极值点. □

注 当判别式 $\Delta=0$ 时，稳定点 $P(a,b)$ 可能是函数 $f(x,y)$ 的极值点，也可能不是函数 $f(x,y)$ 的极值点. 例如，函数

$$f_1(x,y)=(x^2+y^2)^2,\quad f_2(x,y)=-(x^2+y^2)^2,\quad f_3(x,y)=xy.$$

不难验证，$P(0,0)$ 是每个函数唯一的稳定点，且在稳定点 $P(0,0)$ 每个函数的判别式 $\Delta=B^2-AC=0$. 显然，稳定点 $P(0,0)$ 是函数 $f_1(x,y)=(x^2+y^2)^2$ 的极小点；是函数 $f_2(x,y)=-(x^2+y^2)^2$ 的极大点；却不是函数 $f_3(x,y)=xy$ 的极值点.

求可微函数 $f(x,y)$ 的极值点的步骤：

第一步 求偏导数，解方程组

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0, \\ f'_y(x,y)=0, \end{cases}$$

求稳定点. 设其中一个稳定点是 $P(a,b)$.

第二步 求二阶偏导数，写出

$$[f''_{xy}(x,y)]^2-f''_{xx}(x,y)f''_{yy}(x,y).$$

第三步 将稳定点 $P(a,b)$ 的坐标代入上式，得判别式

$$\Delta=[f''_{xy}(a,b)]^2-f''_{xx}(a,b)f''_{yy}(a,b).$$

再由 Δ 的符号，根据下表判定 $P(a,b)$ 是否极值点：

$\Delta=B^2-AC$	$-$		$+$	0
A(或C)	$+$	$-$	不是极值点	不定
$P(a,\ b)$	是极小点	是极大点		

例 6. 求函数 $z=x^3+y^3-3xy$ 的极值.

解 解方程组

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=3x^2-3y=0, \\ f'_y(x,y)=3y^2-3x=0. \end{cases}$$

解得两个稳定点是(0,0)与(1,1). 求二阶偏导数

$$f''_{xx}(x,y)=6x,\quad f''_{xy}(x,y)=-3,\quad f''_{yy}(x,y)=6y.$$

$$[f''_{xy}(x,y)]^2-f''_{xx}(x,y)f''_{yy}(x,y)=9-36xy.$$

在点(0,0), $\Delta=9>0$, (0,0)不是函数的极值点.

在点(1,1), $\Delta=-27<0$, 且 $A=6>0$, (1,1)是函数的极小点, 极小值是 $x^3+y^3-3xy|_{(1,1)}=-1$.

欲求可微函数 $f(x, y)$在有界闭区域D的最大(小)值, 除了求出函数 $f(x,y)$在D内全部极大(小)值外, 还要求出函数 $f(x,y)$在D的边界上的最大(小)值, 将它们放在一起进行比较, 其中最大(小)者就是函数 $f(x, y)$ 在D的最大(小)值. 一般来说, 求函数 $f(x,y)$在D的边界上的最大(小)值是很困难的. 但是, 有很多实际问题, 根据问题的实际意义, 函数 $f(x, y)$的最大(小)值必在区域D(D可以是无界区域)内某点P取到, 又函数 $f(x,y)$在D内只有一个稳定点P, 那么函数 $f(x, y)$必在这个稳定点P取最大(小)值.

例 7. 用钢板制造容积为V的无盖长方形水箱, 问怎样选择水箱的长、宽、高才最省钢板.

解 设水箱长, 宽, 高分别是 x, y, z. 已知 $xyz=V$, 从而高 $z=\dfrac{V}{xy}$. 水箱表面的面积

$$S=xy+\frac{V}{xy}(2x+2y)=xy+2V\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right),$$

S的定义域 $D=\{(x,y)\,|\,0<x<+\infty, 0<y<+\infty\}$.

这个问题就是求函数S在区域D内的最小值.

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial x}=y+2V\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=y-\dfrac{2V}{x^2}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial S}{\partial y}=x+2V\left(-\dfrac{1}{y^2}\right)=x-\dfrac{2V}{y^2}=0.\end{cases}$$

在区域D内解得唯一稳定点$(\sqrt[3]{2V},\sqrt[3]{2V})$①. 求二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}=\frac{4V}{x^3},\quad \frac{\partial^2 S}{\partial x\partial y}=1,\quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}=\frac{4V}{y^3}.$$

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}=1-\frac{16V^2}{x^3y^3}.$$

在稳定点$(\sqrt[3]{2V},\sqrt[3]{2V})$，$\Delta=-3<0$，且$A=2>0$，从而，稳定点$(\sqrt[3]{2V},\sqrt[3]{2V})$是$S$的极小点. 因此，函数$S$在点$(\sqrt[3]{2V},\sqrt[3]{2V})$取最小值. 当$x=\sqrt[3]{2V}$，$y=\sqrt[3]{2V}$时，

$$z=\frac{V}{\sqrt[3]{2V}\sqrt[3]{2V}}=\frac{\sqrt[3]{2V}}{2},$$

即无盖长方形水箱$x=y=\sqrt[3]{2V}$，$z=\dfrac{\sqrt[3]{2V}}{2}$，所需钢板最省.

例 8. 在已知周长为$2p$的一切三角形中，求出面积为最大的三角形.

解 设三角形的三个边长分别是x, y, z. 面积是φ. 由海伦公式，有

$$\varphi=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.\tag{8}$$

已知$x+y+z=2p$或$z=2p-x-y$，将它代入(8)式之中，有

$$\varphi=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}.$$

因为三角形的每边长是正数而且小于半周长p，所以φ的定义域

$$D=\{(x,y)\,|\,0<x<p,\ 0<y<p,\ x+y>p\}.$$

已知φ的稳定点与$\dfrac{\varphi^2}{p}$的稳定点相同. 为计算简便，求

$$\psi=\frac{\varphi^2}{p}=(p-x)(p-y)(x+y-p)$$

的稳定点. 解方程组

① 到此已基本解完. 由实际意义，函数S必在区域D内取最小值. D内又有唯一稳定点. 因此，函数S必在此稳定点取极小值. 以下在理论上验证稳定点是极小点.

$$\begin{cases} \psi'_x(x,y) = -(p-y)(x+y-p)+(p-x)(p-y) \\ \qquad = (p-y)(2p-2x-y)=0, \\ \psi'_y(x,y) = -(p-x)(x+y-p)+(p-x)(p-y) \\ \qquad = (p-x)(2p-2y-x)=0. \end{cases}$$

在区域D内有唯一稳定点$\left(\frac{2p}{3},\frac{2p}{3}\right)$. 求二阶偏导数

$$\psi''_{xx}(x,y)=-2(p-y),\quad \psi''_{xy}(x,y)=2(x+y)-3p,$$
$$\psi''_{yy}(x,y)=-2(p-x).$$
$$[\psi''_{xy}(x,y)]^2-\psi''_{xx}(x,y)\psi''_{yy}(x,y)$$
$$=4x^2+4xy+4y^2-8px-8py+5p^2.$$

在稳定点$\left(\frac{2p}{3},\frac{2p}{3}\right)$, $\Delta=-\frac{p^2}{3}<0$, $A=-\frac{2}{3}p<0$. 从而，稳定点$\left(\frac{2p}{3},\frac{2p}{3}\right)$是函数$\psi$，即$\varphi$的极大点. 由题意，$\varphi$在稳定点$\left(\frac{2p}{3},\frac{2p}{3}\right)$必取到最大值. 当$x=\frac{2p}{3}$, $y=\frac{2p}{3}$时，$z=2p-x-y=\frac{2p}{3}$，即三角形三边长的和为定数时，等边三角形的面积最大.

例 9. 经过实测得到n个数对(x_i,y_i)，$i=1,2,\cdots,n$，其中y_i是在x_i测得的值. 在坐标平面上，这n个数对对应n个点，设它们大体上分布在一条直线附近，如图 10.12. 求一条直线$y=ax+b$

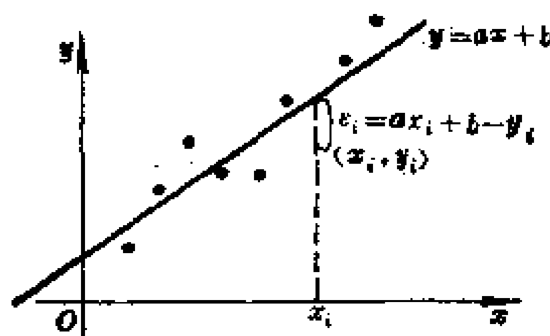


图 10.12

使其在总体上与这n个点接近程度最好.

将点(x_i,y_i)的坐标代入直线方程$y=ax+b$中，设

$$\varepsilon_i = ax_i + b - y_i,$$

称 ε_i 是点 (x_i, y_i) 到直线 $y = ax + b$ 的**偏差**，如图 10.12. 显然，若点(x_i, y_i)在直线 $y = ax + b$ 上，则偏差 $\varepsilon_i = 0$；若点(x_i, y_i)不在直线 $y = ax + b$ 上，则偏差 $\varepsilon_i \neq 0$. 此时，ε_i 可能是正数也可能是负数. 为了消除符号影响，考虑 ε_i^2. 于是，偏差平方的和的大小，即

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

的大小在总体上刻划了这 n 个点与直线 $y = ax + b$ 的接近程度. 为了使其接近程度最好，也就是求以 a 与 b 为自变量的二元函数

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

的最小值. 求函数 $f(a, b)$ 最小值确定 a 与 b（从而确定直线方程 $y = ax + b$）的方法叫做**最小二乘法**.

解 函数 $f(a, b)$的定义域是 $\mathbb{R}^2$. 解方程组

$$\begin{cases} f'_a(a, b) = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i - x_i y_i) = 0, \\ f'_b(a, b) = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) = 0. \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

解得唯一稳定点(a_0, b_0)①：

---

① 当 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不全相等时（在实测中彼此都不相等），不难用归纳法证明 $(n \geq 2)$，有（系数行列式）

$$n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 > 0.$$

$$a_0=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2},$$

$$b_0=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}.$$

根据问题的实际意义，函数 $f(a,b)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 内必存在最小值，又只有唯一一个稳定点. 因此，函数 $f(a,b)$ 必在稳定点 (a_0,b_0) 取最小值. 于是，欲求的直线方程是

$$y=a_0x+b_0.$$

注 用取极值的充分条件判别也很简便.

$$f''_{aa}(a_0,b_0)=2\sum_{i=1}^{n}x_i^2,\ f''_{ab}(a_0,b_0)=2\sum_{i=1}^{n}x_i,\ f''_{bb}(a_0,b_0)=2n.$$

$$\begin{aligned}\Delta&=[f''_{ab}(a_0,b_0)]^2-f''_{aa}(a_0,b_0)\cdot f''_{bb}(a_0,b_0)\\&=4\left[\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2-n\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right]<0.\end{aligned}$$

即 $\Delta<0$，$f''_{aa}(a_0,b_0)>0$. 从而，唯一的稳定点 (a_0,b_0) 是函数 $f(a,b)$ 的极小点. 于是，函数 $f(a,b)$ 在稳定点 (a_0,b_0) 取最小值，即直线方程是 $y=a_0x+b_0$.

练 习 题 10.4

1. 求下列函数的二阶偏导数：

(1) $u=x^4+y^4-4x^2y^2$， (2) $u=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$，

(3) $u=x\sin(x+y)$,　　　　　　(4) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

2. 求下列函数的指定阶偏导数:

(1) $u=x\ln(xy)$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}$.

(2) $u=x^3\sin y+y^3\sin x$, $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3\partial y^3}$.

(3) $u=e^{xyz}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$.

(4) $f(x,y)=e^x\sin y$, $f^{(m+n)}_{x^m y^n}(0,0)$.

3. 证明: 函数 $u=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ 与 $u=\ln\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$ 都是拉普拉斯方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 的解, 其中 a 与 b 是常数.

4. 求函数

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

的二阶偏导数 $f''_{xx}(0,0)$ 与 $f''_{xy}(0,0)$.

5. 求下列复合函数的二阶偏导数:

(1) $u=f(x,y)$,　$x=s+t$,　$y=st$.

(2) $u=f(x,y)$,　$x=st$,　$y=\dfrac{s}{t}$.

6. 证明: 若 $u=x^m y^n$, 其中 $m+n=1$, 则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=0.\quad (x>0,y>0).$$

7. 证明: 若 $u=f(x,y)$,　$x=s\cos\alpha-t\sin\alpha$,　$y=s\sin\alpha+t\cos\alpha$, 则

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \quad 与 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

8. 证明: 函数 $u=f(x,y,z)$ 在空间直交变换

$$x=a_1r+b_1s+c_1t,\quad y=a_2r+b_2s+c_2t,\quad z=a_3r+b_3s+c_3t$$

下(a_i,b_i,c_i 都是常数), 有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

(提示: 求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, 然后作和, 应用直交的条件.)

9. 将下列函数在指定点展成泰勒公式:

(1) $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$, 在点$(1,-2)$.

(2) $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$, 在点$(1,1,1)$.

10. 设函数$f(x,y)$在$P(a,b)$的邻域$U(P,r)$存在任意阶连续偏导数. 证明:若$\exists M>0, \forall(x,y)\in U(P,r), \forall m\in\mathbf{N}$,有$(i\leqslant m)$

$$\left|\frac{\partial^m f(x,y)}{\partial x^{m-i}\partial y^i}\right|\leqslant M,$$

则$\forall(a+h,b+k)\in U(P,r)$,有(二元泰勒级数)

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)+\cdots.$$

$\left(\text{提示: 证明}|R_n|=\left|\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(a+\theta h,b+\theta k)\right|\to 0\ (n\to\infty)\right)$

11. 将函数$f(x,y)=e^{x+y}$在点$(1,-1)$展成幂级数.

12. 求下列函数的极值:

(1) $u=x^2+(y-1)^2$.

(2) $u=(2ax-x^2)(2by-y^2)$, $ab\neq 0$.

(3) $u=x^3+3xy^2-15x-12y$.

(4) $u=(ax^2+by^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

13. 将正数a分成三个正数之和,使它的乘积为最大,求此三数.

14. 在半径为a的半球内,求出体积为最大的内接长方体的边长.

15. 已知渠道的横截面是等腰梯形,其面积为A, 问等腰梯形的底与高各多大,才能使渠道的湿周(两腰与底长之和)最小?

* * * *

16. 证明: 若 $u=f(x,y,z)$,而 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z=z$,则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

17. 证明: 若 $z=f(u,v), u=u(x,y), v=v(x,y)$,而函数$u$与$v$满足柯西-黎曼方程:$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$,则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right].$$

18. 证明: 若$f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$和$f''_{xy}(x,y)$在点$P(x_0,y_0)$的邻域存在,

且 $f''_{xy}(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 连续，则 $f''_{yx}(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 也存在，且

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0) \quad \text{(比定理 1 的条件弱)}$$

19. 证明：若函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 邻域存在二阶连续偏导数，则

$$f''_{xx}(0,0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2h,e^{-\frac{1}{2h}})-2f(h,e^{-\frac{1}{h}})+f(0,0)}{h^2}.$$

(提示：将 $f(2h,\ e^{-\frac{1}{2h}})$，$f(h,\ e^{-\frac{1}{h}})$ 展成马克劳林公式，到二阶偏导数)

20. 若 $f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)=t^kf(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则称 n 元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 k 次**齐次函数**. 证明：设 $f(x,y,z)$ 可微，函数 $f(x,y,z)$ 是 k 次齐次函数 $\Longleftrightarrow$

$$xf'_x+yf'_y+zf'_z=kf(x,y,z).$$

(提示：必要性. 对等式 $f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,\ z)$ 两端关于 t 求导数，然后令 $t=1$. 充分性. 将等式中的 x,y,z 分别换成 tx,ty,tz，有

$$txf'_x(tx,ty,tz)+tyf'_y(tx,ty,tz)+tzf'_z(tx,ty,tz)=kf(tx,ty,tz)$$

改写为

$$tf'_t(tx,ty,tz)=kf(tx,ty,tz) \quad \text{或} \quad \frac{f'_t(tx,ty,tz)}{f(tx,ty,tz)}=\frac{k}{t},$$

两端关于 t 求积分，再确定常数 C.)

21. 证明：若 $f(x,y,z)$ 是可微的 k 次齐次函数，则 $f'_x(x,y,z)$，$f'_y(x,y,z)$，$f'_z(x,y,z)$ 是 $k-1$ 次齐次函数. (提示：由第 20 题知，$xf'_x+yf'_y+zf'_z=kf$，两端对 x(或 y 与 z) 求偏导数，再应用第 20 题的充分性).

22. 证明：若 $f(x,y,z)$ 是可微的 n 次齐次函数，而函数 $x(u,\ v,\ w)$，$y(u,v,w)$，$z(u,v,w)$ 都是可微的 m 次齐次函数，则

$$F(u,v,w)=f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]$$

是 nm 次齐次函数. (提示：由第 20 题，只须证明，$uF'_u+vF'_v+wF'_w=nmF$.)

第十一章 隐 函 数

§5.3已给出隐函数的概念和隐函数的求导法则. 本章将在一个方程所确定的隐函数的基础上，进一步推广到方程组所确定的隐函数，并证明隐函数的存在性、连续性、可微性. 讨论方程组所确定的隐函数要用到多元函数微分学中的一个重要工具——函数行列式. 我们将给出函数行列式的性质及其简单的应用.

§11.1. 隐函数的存在性

一、隐函数概念

在§5.3中，已经给出由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数.

例1. 方程 $F(x,y)=xy+3x^2-5y-7=0$, $\forall x\in\mathrm{R}\,(x\neq5)$, 通过方程对应唯一一个 y, 即 $y=\frac{3x^2-7}{5-x}$. 显然，有

$$F\left(x,\frac{3x^2-7}{5-x}\right)\equiv0.$$

由隐函数定义，$y=\frac{3x^2-7}{5-x}$ 是方程 $F(x,y)=xy+3x^2-5y-7=0$ 所确定的隐函数. 它的几何意义是，平面曲线 $y=\frac{3x^2-7}{5-x}$ 是空间曲面 $z=xy+3x^2-5y-7$ 与平面 $z=0$(xy 平面)的交线.

例2. 方程 $F(x,y)=x^2+y^2-a^2=0\,(a>0)$, $\forall x\in(-a,a)$, 通过方程对应两个 y. 如果限定 y 的变化范围 $0<y<+\infty$ 或 $-\infty<y<0$, 则 $\forall x\in(-a,a)$ 只对应唯一一个 y, 即

$$y_1=\sqrt{a^2-x^2}\quad 或\quad y_2=-\sqrt{a^2-x^2}.$$

显然，有

$$F(x,y_1)=F(x,\sqrt{a^2-x^2})\equiv0$$

与 $$F(x, y_2) = F(x, -\sqrt{a^2 - x^2}) \equiv 0.$$
由隐函数定义，$y_1 = \sqrt{a^2 - x^2}$ 与 $y_2 = -\sqrt{a^2 - x^2}$ 都是方程
$$F(x, y) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$$
所确定的隐函数. 它的几何意义是，平面曲线 $y_1 = \sqrt{a^2 - x^2}$ 与 $y_2 = -\sqrt{a^2 - x^2}$（以原点为心以 a 为半径的上半圆与下半圆）是空间曲面 $z = x^2 + y^2 - a^2$（旋转抛物面）与平面 $z = 0$ 的两条交线.

例 3. 方程$F(x, y) = xy + 2^x - 2^y = 0$，在原点某个邻域$(-\delta, \delta)$ $\forall x \in (-\delta, \delta)$，通过方程对应唯一一个 y，即$y = \varphi(x)$（下面例6将证明这个事实）. 显然，有
$$F[x, \varphi(x)] \equiv 0.$$
由隐函数定义，$y = \varphi(x)$是方程 $F(x, y) = xy + 2^x - 2^y = 0$ 所确定的隐函数. 它的几何意义是，空间曲面 $z = xy + 2^x - 2^y$ 与平面 $z = 0$ 在原点邻域$(-\delta, \delta)$相交成平面曲线 $y = \varphi(x)$.

例 4. 方程 $F(x, y) = x^2 + y^2 + r^2 = 0$. $\forall x \in$ ，通过方程不存在对应的 y，即方程不确定隐函数. 它的几何意义是，空间曲面 $z = x^2 + y^2 + r^2$（旋转抛物面）与平面 $z = 0$ 不相交.

上述四例说明，一个方程可能确定隐函数，如例 1，2，3，也可能不确定隐函数，如例 4. 一个方程可能确定一个隐函数，如例 1，也可能确定二个（或多个）隐函数，如例 2. 一个方程确定的隐函数可能是初等函数，如例 1，2，也可能不是初等函数，如例 3（因为超越方程不能用代数方法求解）. 值得注意的是例 3 这种情况，它说明隐函数包含着非初等函数. 从而给出了表示函数的新方法，扩大了研究函数的范围.

关于两个变量 x 与 y 的方程 $F(x, y) = 0$ 确定隐函数，可类似地推广到 $n+1$ 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n, y$ 的方程
$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = 0.$$
若存在点 $P_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$的邻域 G，$\forall P(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in G$，

通过上面方程对应唯一一个 y，设 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。有

$$F[x_1,x_2,\cdots,x_n,f(x_1,x_2,\cdots,x_n)]\equiv 0,$$

则称 n 元函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是由方程 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$ 所确定的隐函数.

例5. 方程 $F(x,\ y,\ z)=x+xy+yz-4=0$. $\forall(x,\ y)\in\mathbf{R}^2$ $(y\neq 0)$，通过方程对应唯一一个 z，即 $z=\dfrac{4-x-xy}{y}$. 显然，有

$$F\left(x,y,\frac{4-x-xy}{y}\right)\equiv 0.$$

由隐函数定义，$z=\dfrac{4-x-xy}{y}$是方程 $F(x,y,z)=x+xy+yz-4=0$ 所确定的(二元)隐函数.

隐函数还有更一般的情况：若干个方程构成的方程组所确定的隐函数(组). 例如，两个方程构成的方程组

$$\begin{cases}F_1(x,y,z)=5x+yz+z^2-6=0,\\ F_2(x,y,z)=x+y+z=0.\end{cases}$$

$\forall z\in\mathbf{R}(z\neq 5)$，通过方程组对应唯一一对 x 与 y，即

$$x=\frac{6}{5-z}\quad 与\quad y=\frac{(z+1)(z-6)}{5-z}.$$

显然，有

$$\begin{cases}F_1\left(\dfrac{6}{5-z},\dfrac{(z+1)(z-6)}{5-z},z\right)\equiv 0,\\ F_2\left(\dfrac{6}{5-z},\dfrac{(z+1)(z-6)}{5-z},z\right)\equiv 0.\end{cases}$$

一般情况是，n 个变量 m 个方程($m<n$)：

$$\begin{cases}F_1(x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n)=0,\\ F_2(x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ F_m(x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n)=0.\end{cases}\tag{1}$$

若存在m个函数

$$\begin{cases} x_1=f_1(x_{m+1},\cdots,x_n), \\ x_2=f_2(x_{m+1},\cdots,x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m=f_m(x_{m+1},\cdots,x_n) \end{cases} \tag{2}$$

满足方程组(1),即

$$\begin{cases} F_1(f_1,f_2,\cdots,f_m,x_{m+1},\cdots,x_n)\equiv 0, \\ F_2(f_1,f_2,\cdots,f_m,x_{m+1},\cdots,x_n)\equiv 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(f_1,f_2,\cdots,f_m,x_{m+1},\cdots,x_n)\equiv 0, \end{cases}$$

则称函数组(2)(共m个函数)是方程组(1)所确定的**隐函数组**.

二、一个方程确定的隐函数

给定一个方程$F(x,y)=0$,等号左端的函数$F(x,y)$满足什么条件,方程才存在(有连续导数的)隐函数呢?它的几何意义就是,满足什么条件曲面$z=F(x,y)$与平面$z=0$交成一条(光滑的)曲线呢?很明显,至少应当假定曲面$z=F(x,y)$与平面$z=0$有一个交点$P_0(x_0,y_0)$,即$F(x_0,y_0)=0$,并且在点P_0的某个邻域D两个偏导数$F'_x(x,y)$与$F'_y(x,y)$连续.为了使曲面$z=F(x,y)$与平面$z=0$不仅相交于一点P_0,还要穿过平面$z=0$,交成一条曲线$y=f(x)$,这只要增加条件$F'_y(x_0,y_0)\neq 0$就行.事实上,由连续函数的保号性,在点P_0的某邻域$R(\subset D)$,$F'_y(x,y)$保号,这表明将$F(x,y)$看作变量y的一元函数是严格单调的,又$F(x_0,y_0)=0$,所以当$\beta(>0)$充分小时,$F(x_0,\ y_0-\beta)$与$F(x_0,\ y_0+\beta)$具有相反的符号,即曲面$z=F(x,y)$穿过平面$z=0$,再应用连续函数$F(x,y)$的保号性,关于变量y的单调性和根的存在性,就可证明曲面$z=F(x,y)$与平面$z=0$交成一条光滑曲线$y=f(x)$.有下面隐函数存在定理:

定理 1. 若函数 $z=F(x,y)$ 在以点 (x_0,y_0) 为心的矩形区域 D（边界平行坐标轴）满足下列条件：

1) $F'_x(x,y)$ 与 $F'_y(x,y)$ 在 D 连续（从而 $F(x,y)$ 在 D 连续），

2) $F(x_0,y_0)=0$，

3) $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$，

则 i) $\exists\delta>0$ 与 $\beta>0$，在区间 $\Delta=(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 存在唯一（隐）函数 $y=f(x)$，使 $F[x,f(x)]\equiv 0$，$f(x_0)=y_0$，且

$$y_0-\beta<f(x)<y_0+\beta.$$

ii) $y=f(x)$ 在区间 Δ 连续.

iii) $y=f(x)$ 在区间 Δ 有连续导数，且

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

证明 i) 隐函数的存在性. 由条件 3)，不妨假设

$$F'_y(x_0,y_0)>0.$$

再由条件 1)，函数 $F'_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续. 根据 § 10.2 定理 4（连续函数的保号性），存在以点 $(x_0,\ y_0)$ 为心的闭矩形区域 $R(x_0-\alpha\leqslant x\leqslant x_0+\alpha;\ y_0-\beta\leqslant y\leqslant y_0+\beta)$，而 $R\subset D$，$\forall(x,y)\in R$，有

$$F'_y(x,y)>0. \tag{3}$$

特别是，当 $x=x_0$ 时，有 $F'_y(x_0,y)>0$，$y_0-\beta\leqslant y\leqslant y_0+\beta$. 根据 §6.4 定理2，一元函数 $F(x_0,y)$ 在闭区间 $[y_0-\beta,y_0+\beta]$ 严格增加. 由条件 2)，$F(x_0,y_0)=0$，有

$$F(x_0,y_0-\beta)<0 \text{ 与 } F(x_0,y_0+\beta)>0. \tag{4}$$

再考虑下面两个一元函数

$$F(x,y_0-\beta) \text{ 与 } F(x,y_0+\beta).$$

这两个函数在点 x_0 连续，且有不等式(4)，根据 § 3.2 定理 3（一元连续函数的保号性），$\exists\delta>0(\delta<\alpha)$，$\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$，有

$$F(x,y_0-\beta)<0 \text{ 与 } F(x,y_0+\beta)>0. \tag{5}$$

(5) 式的几何意义是，如图 11.1，曲面 $z=F(x,y)$ 在线段 AB 上的图象在 xy 平面之下，在线段 CE 上的图象在 xy 平面之上. 下面证明，曲面 $z=F(x,y)$ 与 xy 平面相交，其交线 l 就是将要证明的在区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 的隐函数.

令 $\Delta=(x_0-\delta, x_0+\delta)$. $\forall \bar{x}\in\Delta$，由(3)式，有

$$F'_y(\bar{x},y)>0, \quad y\in[y_0-\beta, y_0+\beta],$$

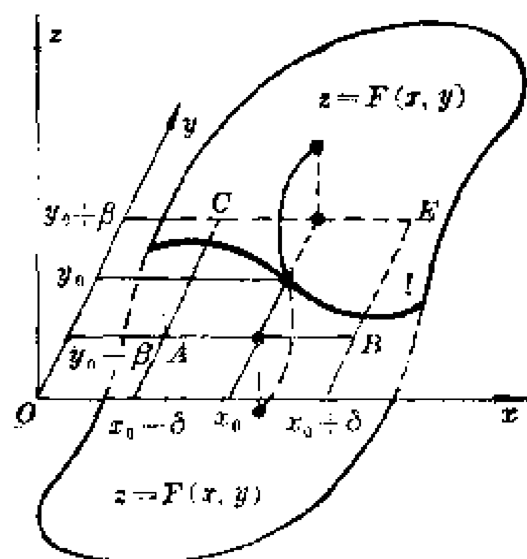


图 11.1

即一元函数 $F(\bar{x},y)$ 在区间 $[y_0-\beta, y_0+\beta]$ 严格增加. 由(5)式，有

$$F(\bar{x}, y_0-\beta)<0 \quad 与 \quad F(\bar{x}, y_0+\beta)>0.$$

根据 §3.1 定理 6（连续函数的介值性），在区间 $(y_0-\beta, y_0+\beta)$ 存在唯一一点 $\bar{y}$，使

$$F(\bar{x},\bar{y})=0. \tag{6}$$

由 (6) 式，$\forall x\in\Delta$，存在唯一一个 $y\in(y_0-\beta, y_0+\beta)$，使 $F(x,y)=0$. 于是，y 是 x 的函数，表为 $y=f(x)$，且

$$\forall x\in\Delta，有 F[x,f(x)]\equiv 0 \quad 与 \quad y_0-\beta<f(x)<y_0+\beta.$$

已知 $F(x_0,y_0)=0$ 与 $F[x_0, f(x_0)]=0$. 因为在 $(y_0-\beta, y_0+\beta)$ 内与 x_0 对应且满足方程 $F(x_0,y)=0$ 的 y 是唯一的，所以

$$y_0=f(x_0).$$

ii) (隐)函数 $y=f(x)$在区间$\varDelta$连续. 只须证明, $\forall x\in\varDelta$, 函数 $y=f(x)$在 x 连续.

已知 $F'_x(x, y)$与 $F'_y(x, y)$在闭矩形域 $R[x_0-\alpha\leqslant x\leqslant x_0+\alpha;\ y_0-\beta\leqslant y\leqslant y_0+\beta]$连续. 且 $F'_y(x,y)>0$, 则 $|F'_x(x,y)|$在 R 有上界, $|F'_y(x,y)|$在 R 有非 0 的下界, 即 $\exists M>0$与$m>0$, $\forall (x,y)\in R$, 有

$$|F'_x(x,y)|\leqslant M \quad 与 \quad |F'_y(x,y)|\geqslant m.$$

给自变量 x 改变量Δx, 使$x+\Delta x\in\varDelta$, 相应地有函数 $y=f(x)$的改变量 Δy, 即

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x) \quad 或 \quad y+\Delta y=f(x+\Delta x),$$

且 $y+\Delta y\in(y_0-\beta, y_0+\beta)$. 已知

$$F(x,y)=0 \quad 与 \quad F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0.$$

$$\begin{aligned}0&=F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y)\\&=F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y+\Delta y)\\&\quad+F(x, y+\Delta y)-F(x,y)\\&=F'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x+F'_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y,\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $0<\theta_1<1, 0<\theta_2<1$. 将(7)式改写为

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=-\frac{F'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)}{F'_y(x, y+\theta_2\Delta y)}\Delta x.$$

有 $$\begin{aligned}|\Delta y|&=|f(x+\Delta x)-f(x)|\\&=\left|-\frac{F'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)}{F'_y(x, y+\theta_2\Delta y)}\right||\Delta x|\leqslant\frac{M}{m}|\Delta x|.\end{aligned}$$

于是, $$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)]=0,$$

即(隐)函数 $y=f(x)$在 x 连续, 从而在 $\varDelta$ 连续.

iii) (隐)函数 $y=f(x)$在区间 $\varDelta$ 有连续导数.

$\forall x\in\varDelta$, 由(7)式, 有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)}{F'_y(x, y+\theta_2\Delta y)}, \quad 0<\theta_1<1, 0<\theta_2<1.$$

已知 $y=f(x)$ 在 x 连续，从而当 $\Delta x\to 0$ 时，有 $\Delta y\to 0$，又已知 $F'_x(x,y)$ 与 $F'_y(x,y)$ 在 D 连续，有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{F'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)}{F'_y(x, y+\theta_2\Delta y)}$$

$$=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}, \qquad (F'_y(x,y)\neq 0)$$

即（隐）函数 $y=f(x)$ 在区间 $\varDelta$ 有连续的导数，且

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \quad □$$

注 为使证明的层次分明，定理 1 的结论分成三个部分，实际上，这三个部分可以合并，叙述为以下更加简明的形式：

"则存在点 x_0 的邻域 $\varDelta$，在 $\varDelta$ 存在唯一一个有连续导数的（隐）函数 $y=f(x)$，使 $F[x,f(x)]\equiv 0$，$f(x_0)=y_0$，且

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}".$$

今后，隐函数定理的结论，都用这种合并后的叙述形式。

定理 1 可推广到 $n+1$ 个自变量的方程 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$ 所确定的隐函数。

定理 2. 若函数 $z=F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)$ 在以点 $P(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y^0)$ 为心的矩形邻域 G 满足下列条件：

i) $F'_{x_1},F'_{x_2},\cdots,F'_{x_n},F'_y$ 在 G 连续（从而 F 在 G 连续），

ii) $F(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y^0)=0$，

iii) $F'_y(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y^0)\neq 0$，

则存在点 $Q(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 的邻域 U，在 U 存在唯一一个有连续偏导数的（隐）函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，使

$$F[x_1,x_2,\cdots,x_n,f(x_1,x_2,\cdots,x_n)]\equiv 0,$$

$$y^0=f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0),$$

且 $$\frac{\partial y}{\partial x_k}=-\frac{F'_{x_k}}{F'_y} \qquad (k=1,2,\cdots,n). \tag{8}$$

证明从略.

关于定理 1 与定理 2 作如下两点说明：1. 定理的条件是隐函数存在的充分条件而不是必要条件；2. 定理只是指出隐函数是存在的，并没有指出隐函数是"什么样"，但是能够借助给定的方程讨论它的连续性和可微性.

例 6. 验证方程 $F(x, y)=xy+2^x-2^y=0$ 在点 0 的某邻域确定唯一一个有连续导数的隐函数 $y=\varphi(x)$，并求 $\varphi'(x)$(见例 3).

解 函数 $F'_x(x, y)=y+2^x\ln 2$ 与 $F'_y(x, y)=x-2^y\ln 2$ 在点 $(0,0)$ 的邻域连续，且

$$F(0,0)=0, \qquad F'_y(0,0)=-\ln 2\neq 0.$$

根据定理 1，在点 0 的某个邻域 $(-\delta,\delta)$ 存在唯一一个有连续导数的(隐)函数 $y=\varphi(x)$，使 $F[x,\varphi(x)]\equiv 0$，且 $\varphi(0)=0$. (隐)函数 $y=\varphi(x)$ 的导数是

$$\varphi'(x)=-\frac{y+2^x\ln 2}{x-2^y\ln 2}.$$

求隐函数的偏导数不必套用公式，可直接应用复合函数的导数公式.

例 7. 求由方程 $xy+\sin z+y=2z$ 确定的隐函数 $z=f(x, y)$ 的偏导数.

解 在方程中将 z 看作是 x 与 y 的二元函数，对方程的等号两端分别关于 x 与 y 求偏导数，有

$$y+\cos z\frac{\partial z}{\partial x}=2\frac{\partial z}{\partial x} \quad 与 \quad x+\cos z\frac{\partial z}{\partial y}+1=2\frac{\partial z}{\partial y}.$$

于是，分别解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{2-\cos z} \quad 与 \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1+x}{2-\cos z}.$$

三、方程组确定的隐函数

首先讨论四个变量两个方程的特别情况，即

$$\begin{cases} F_1(x,y,u,v)=0, \\ F_2(x,y,u,v)=0. \end{cases}$$

定理3. 若函数$F_1(x,y,u,v)$与$F_2(x,y,u,v)$在$P(x_0,y_0,u_0,v_0)$的邻域G满足下列条件：

1) 函数$F_1(x,y,u,v)$与$F_2(x,y,u,v)$的所有偏导数在G连续（从而，F_1与F_2在G连续）；

2) $\begin{cases} F_1(x_0,y_0,u_0,v_0)=0, \\ F_2(x_0,y_0,u_0,v_0)=0; \end{cases}$

3) 行列式 $J=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}_P \neq 0,$

则存在点$Q(x_0,y_0)$的邻域V，在V存在唯一一组有连续偏导数的（隐）函数组

$$u=u(x,y) \quad 与 \quad v=v(x,y),$$

使

$$\begin{cases} F_1[x,y,u(x,y),v(x,y)]\equiv 0, \\ F_2[x,y,u(x,y),v(x,y)]\equiv 0, \end{cases}$$

且

$$u_0=u(x_0,y_0), \quad v_0=v(x_0,y_0).$$

证法　其证法类似代数的解联立方程的代入法．从第一个方程$F_1(x,y,u,v)=0$中"解"出$v=f(x,y,u)$（这需要验证它满足定理2的条件）．将它代入第二个方程之中，即$F_2[x,y,u,f(x,y,u)]=0$，再从它中"解"出$u=u(x,y)$（这也需要验证它满足定理2的条件）．最后将$u=u(x,y)$代入$v=f(x,y,u)$中，就得到$v=f[x,y,u(x,y)]=v(x,y)$．于是，得到函数组$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$．

证明　由条件3)，行列式J在点P不为零，则$\frac{\partial F_1}{\partial u}$与$\frac{\partial F_1}{\partial v}$至少有一个在点$P$不为零．不妨设$\left.\frac{\partial F_1}{\partial v}\right|_P\neq 0$．于是，不难验证，四元函数$F_1(x,y,u,v)$在点$P(x_0,y_0,u_0,v_0)$的邻域$G$满足下列条件：

1) 函数$F_1(x,y,u,v)$的所有偏导数在G连续，

2) $F_1(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，

3) $\left.\frac{\partial F_1}{\partial v}\right|_P\neq 0$.

根据定理2，在点$N(x_0,y_0,u_0)$的某个邻域D存在唯一一个连续函数$v=f(x,y,u)$，使

$$F_1[x,y,u,f(x,y,u)]\equiv 0,\quad \text{且} v_0=f(x_0,y_0,u_0),\tag{9}$$

函数$v=f(x,y,u)$的偏导数$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial u}$在邻域$D$连续．由(8)式，有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F_1}{\partial x}}{\frac{\partial F_1}{\partial v}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F_1}{\partial y}}{\frac{\partial F_1}{\partial v}},\quad \frac{\partial f}{\partial u}=-\frac{\frac{\partial F_1}{\partial u}}{\frac{\partial F_1}{\partial v}}.\tag{10}$$

再将函数$v=f(x,y,u)$代入到第二个函数$F_2(x,y,u,v)$之中，设

$$\varphi(x,y,u)=F_2[x,y,u,f(x,y,u)].$$

下面验证函数$\varphi(x,y,u)$在点$N(x_0,y_0,u_0)$的邻域D满足下列条件：

1) 函数$\varphi(x,y,u)$的所有偏导数在D连续．

事实上，$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial F_2}{\partial u}+\frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u}.$$

已知$\frac{\partial F_2}{\partial x},\frac{\partial F_2}{\partial y},\frac{\partial F_2}{\partial u},\frac{\partial F_2}{\partial v},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial u}$在邻域$D$都连续，则$\frac{\partial\varphi}{\partial x}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial y}$，

$\frac{\partial \varphi}{\partial u}$在邻域$D$连续.

2) $\varphi(x_0, y_0, u_0) = F_2[x_0, y_0, u_0, f(x_0, y_0, u_0)]$

$$= F_2(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0.$$

3) $\left.\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right|_N \neq 0.$

事实上，已知$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial F_2}{\partial u} + \frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u}$. 由(10)式，有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial F_2}{\partial u} - \frac{\partial F_2}{\partial v} \cdot \frac{\frac{\partial F_1}{\partial u}}{\frac{\partial F_1}{\partial v}} = \frac{1}{\frac{\partial F_1}{\partial v}}\left(\frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial u} - \frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial F_1}{\partial u}\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{\partial F_1}{\partial v}} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial u} \\ \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial u} \end{vmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial F_1}{\partial v}} J.$$

由已知条件，有 $\left.\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right|_N = \left(\frac{-1}{\frac{\partial F_1}{\partial v}} J\right)_P \neq 0.$

根据定理2，在点$Q(x_0, y_0)$的某个邻域V存在唯一一个连续函数$u = u(x, y)$，使

$$\varphi[x, y, u(x, y)] \equiv 0, \quad 且\ u_0 = u(x_0, y_0). \tag{11}$$

函数$u = u(x, y)$的偏导数$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$在邻域$V$连续.

最后，将$u = u(x, y)$代入$v = f(x, y, u)$之中，设

$$v = f[x, y, u(x, y)] = v(x, y). \tag{12}$$

下面证明，函数组$u = u(x, y)$与$v = v(x, y)$满足定理的要求.

事实上，已知函数$v = f(x, y, u)$在D连续，$u = u(x, y)$在$V(\subset D)$连续，于是，$v = v(x, y) = f[x, y, u(x, y)]$在$V$连续，即$u = u(x, y)$，$v = v(x, y)$在$V$都连续.

其次由(9)式与(11)式，有

$$F_1[x,y,u(x,y),v(x,y)]\equiv F_1\{x,y,u(x,y),f[x,y,u(x,y)]\}$$
$$\equiv F_1[x,y,u,f(x,y,u)]\equiv 0.$$
$$F_2[x,y,u(x,y),v(x,y)]\equiv F_2\{x,y,u(x,y),f[x,y,u(x,y)]\}$$
$$\equiv \varphi[x,y,u(x,y)]\equiv 0.$$

由(11)，(12)，(9)式，又有

$$u(x_0,y_0)=u_0,$$
$$v(x_0,y_0)=f[x_0,y_0,u(x_0,y_0)]=f(x_0,y_0,u_0)=v_0.$$

已知函数 $u=u(x,y)$ 的偏导数在邻域 V 连续. 函数 $v=v(x,y)$ 的偏导数在邻域 V 也是连续的. 事实上，由(12)式，有

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

已知 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial u},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$ 在邻域 V 连续，则 $\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ 在邻域 V 也连续. □

推论 若函数组 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$ 的所有偏导数在点 $P(u_0,v_0)$ 的邻域连续，且 $x_0=x(u_0,v_0)$，$y_0=y(u_0,v_0)$，在点 $P(u_0,v_0)$，行列式

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}_P\neq 0,$$

则在点 $Q(x_0,y_0)$ 的某邻域存在有连续偏导数的反函数组

$$u=u(x,y),\ v=v(x,y).$$

证明 函数组 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$ 可改写为

$$\begin{cases}F_1(x,y,u,v)=x-x(u,v)=0,\\ F_2(x,y,u,v)=y-y(u,v)=0.\end{cases}$$

显然，函数 F_1 与 F_2 的所有偏导数在点 $M(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的邻域连续，且

$$\begin{cases}F_1(x_0,y_0,u_0,v_0)=x_0-x(u_0,v_0)=0,\\F_2(x_0,y_0,u_0,v_0)=y_0-y(u_0,v_0)=0.\end{cases}$$

又有

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v}\\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{\partial x}{\partial u} & -\frac{\partial x}{\partial v}\\ -\frac{\partial y}{\partial u} & -\frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}_P\neq 0.$$

根据定理 3，在点 $Q(x_0,y_0)$ 的某邻域存在有连续偏导数的反函数组 $u=u(x,y),v=v(x,y)$. □

定理 3 只是指出了(隐)函数组存在连续的偏导数．那么怎样求它的偏导数呢？现举例说明如下．若函数方程组

$$\begin{cases}F_1(x,y,u,v)=0,\\F_2(x,y,u,v)=0,\end{cases}$$

确定了(隐)函数组 $u=u(x,y),v=v(x,y)$，有

$$\begin{cases}F_1[x,y,u(x,y),v(x,y)]\equiv 0,\\F_2[x,y,u(x,y),v(x,y)]\equiv 0.\end{cases}$$

对这两个恒等式关于 x 求偏导数．由复合函数微分法，有

$$\begin{cases}\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0,\end{cases}$$

其中$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$是未知的，其余的六个偏导数都是已知的．解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}-\frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial v}\\ -\frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial v}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v}\\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v}\end{vmatrix}},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial u} & -\frac{\partial F_1}{\partial x}\\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & -\frac{\partial F_2}{\partial x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v}\\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v}\end{vmatrix}}.$$

同样方法，可求关于 y 的偏导数$\frac{\partial u}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial v}{\partial y}$.

例 8. 验证方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2-uv=0,\\ xy-u^2+v^2=0,\end{cases}$$

在点$(x_0,y_0,u_0,v_0)=(1,0,1,1)$的邻域满足定理 3 的条件，从而在点$(1,0)$的邻域存在唯一一组有连续偏导数的函数组 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$，并求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

解 设 $F_1(x,y,u,v)=x^2+y^2-uv$,

$F_2(x,y,u,v)=xy-u^2+v^2$.

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial F_1}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial F_1}{\partial u}=-v,\quad \frac{\partial F_1}{\partial v}=-u,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial F_2}{\partial y}=x,\quad \frac{\partial F_2}{\partial u}=-2u,\quad \frac{\partial F_2}{\partial v}=2v,$$

在点$(1,0,1,1)$的邻域都连续，且

$$\begin{cases}F_1(1,0,1,1)=0,\\ F_2(1,0,1,1)=0.\end{cases}$$

而

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v}\\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-v & -u\\ -2u & 2v\end{vmatrix}$$

$$=-2v^2-2u^2=-2(u^2+v^2).$$

在点$(x_0,y_0,u_0,v_0)=(1,0,1,1)$，有 $J=-4\neq 0$.

根据定理 3，在点$(1,0)$的邻域存在唯一一组有连续偏导数的函数组 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$. 为了求其偏导数，将方程组分别关于 x 求偏导数，有

$$\begin{cases}2x-v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}=0,\\ y-2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=0.\end{cases}$$

解得
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}-2x & -u\\ -y & 2v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-v & -u\\ -2u & 2v\end{vmatrix}}=\frac{4xv+yu}{2(u^2+v^2)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}-v & -2x\\ -2u & -y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-v & -u\\ -2u & 2v\end{vmatrix}}=\frac{4xu-yv}{2(u^2+v^2)}.$$

同样方法，可求关于 y 的偏导数$\frac{\partial u}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial v}{\partial y}$.

例 9. 验证方程组
$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-6=0,\\ x+y+z=0.\end{cases}$$
在点$(x_0,y_0,z_0)=(1,-2,1)$的邻域满足定理 3 的条件，在点 $x_0=1$ 的邻域存在唯一一组有连续导数的函数组$y=f_1(x)$与$z=f_2(x)$，并求$\frac{dy}{dx}$与$\frac{dz}{dx}$.

解 设 $F_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6,$
$F_2(x,y,z)=x+y+z.$
$$\frac{\partial F_1}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial F_1}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial F_1}{\partial z}=2z,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial F_2}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial F_2}{\partial z}=1.$$
在点$(1,-2,1)$的邻域都连续，且
$$\begin{cases}F_1(1,-2,1)=(1)^2+(-2)^2+(1)^2-6=0,\\ F_2(1,-2,1)=1+(-2)+1=0.\end{cases}$$
而
$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2y & 2z\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2(y-z).$$

在点$(x_0, y_0, z_0)=(1, -2, 1)$，有 $J=-6\neq 0$.

根据定理 3，在点 $x_0=1$ 的邻域存在唯一一组有连续导数的函数组 $y=f_1(x)$ 与 $z=f_2(x)$. 为了求导数，将方程组分别关于 x 求导数，有

$$\begin{cases} 2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0, \\ 1+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0. \end{cases}$$

解得 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\begin{vmatrix} -2x & 2z \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{z-x}{y-z}, \quad \frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix} 2y & -2x \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{x-y}{y-z}.$$

定理 3 可推广到 $m+n$ 个变量的 m 个方程的一般情况，即

$$\begin{cases} F_1(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_{m+n})=0, \\ F_2(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_{m+n})=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_{m+n})=0. \end{cases}$$

定理 4. 若 m 个函数 $F_1, F_2, \cdots, F_m$ 在点 $M(x_1^0, \cdots, x_m^0, x_{m+1}^0, \cdots, x_{m+n}^0)$ 的某个邻域 G 满足下列条件：

1) 函数 $F_1, F_2, \cdots, F_m$ 的所有偏导数在 G 连续，

2) $F_1(M)=F_2(M)=\cdots=F_m(M)=0$，

3) 行列式在点 M 不为零，即

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}_M \neq 0,$$

则存在点 $N(x_{m+1}^0, x_{m+2}^0, \cdots, x_{m+n}^0)$ 的邻域 V，在 V 存在唯一一组有连续偏导数的(隐)函数组

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_{m+1}, \cdots, x_{m+n}), \\ x_2 = f_2(x_{m+1}, \cdots, x_{m+n}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m = f_m(x_{m+1}, \cdots, x_{m+n}), \end{cases}$$

且 $x_1^0 = f_1(N), x_2^0 = f_2(N), \cdots, x_m^0 = f_m(N)$，有

$$\begin{cases} F_1(f_1, f_2, \cdots, f_m, x_{m+1}, \cdots, x_{m+n}) \equiv 0, \\ F_2(f_1, f_2, \cdots, f_m, x_{m+1}, \cdots, x_{m+n}) \equiv 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(f_1, f_2, \cdots, f_m, x_{m+1}, \cdots, x_{m+n}) \equiv 0. \end{cases}$$

证明从略.

练 习 题 11.1

1. 验证下列方程在指定点邻域存在以 x 为自变量的隐函数，并求 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $y = xe^y + 1$，在点 $(0, 1)$.

(2) $xy + 2\ln x + 3\ln y - 1 = 0$，在点 $(1, 1)$.

(3) $\sin x + 2\cos y - \frac{1}{2} = 0$，在点 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

2. 验证下列方程在指定点邻域存在以 x，y 为自变量的隐函数，并求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial y}$:

(1) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 4 = 0$，在点 $(1, 1, 2)$.

(2) $x + y - z - \cos(xyz) = 0$，在点 $(0, 0, -1)$.

3. 求下列方程所确定的隐函数的导数或偏导数.

(1) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

(2) $z^3 - 3xyz = a^3$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

4. 证明：若方程 $F(x, y, z)=0$ 的任意一个变量都是另外两个变量的隐函数，即 $z=f(x,y)$，$x=g(y,z)$ 与 $y=h(z,x)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=-1.$$

5. 验证下列方程组在指定点邻域存在隐函数组，并求它的偏导数：

(1) $\begin{cases}x+y+z=0,\\ x^2+y^2+z^2=1.\end{cases}$ 在点$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right)$，求$\frac{dx}{dz}$，$\frac{dy}{dz}$.

(2) $\begin{cases}u+v=x+y,\\ \frac{\sin u}{\sin v}=\frac{x}{y}.\end{cases}$ 在点$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$，求 du 与 dv.

6. 证明：若 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$，$z=z(u,v)$ 的所有偏导数都连续，且

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0,$$

则存在有连续偏导数的隐函数组 $z=f(x,y)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ （提示：讨论函数方程组

$$F_1=x-x(u,v)=0, F_2=y-y(u,v)=0, F_3=z-z(u,v)=0.)$$

7. 设有函数方程组 $u=e^y\sin x$，$v=e^y\cos x$，$w=2-\cos z$，问在哪些点 $P(x,y,z)$ 存在反函数组.

8. 验证方程组

$$\begin{cases}x^2-y\cos(uv)+z^2=0,\\ x^2+y^2-\sin(uv)+2z^2=2,\\ xy-\sin u\cos v+z=0.\end{cases}$$

在点 $P(x_0,y_0,z_0,u_0,v_0)=\left(1,1,0,\frac{\pi}{2},0\right)$ 的邻域满足定理 4 的条件，在点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$的邻域存在唯一一组有连续偏导数的函数组：$x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$，$z=z(u,v)$，并求 $\frac{\partial x}{\partial u}$ 与 $\frac{\partial x}{\partial v}$在点 P的值.

9. 求下列函数组所确定的反函数组的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$:

(1) $x=u\cos\frac{v}{u}$，$y=u\sin\frac{v}{u}$.

(2) $x=e^u+u\sin v$, $y=e^v-u\cos v$.

10. 证明：若 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, 则在任意一点 (r_0,φ_0)（其中 $r_0>0$, $-\infty<\varphi_0<+\infty$）的邻域存在反函数组. 但是，在 $r\varphi$ 平面上不存在反函数组.

* * * *

11. 证明：方程 $x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz.$$

12. 证明：方程 $F(x+zy^{-1}, y+zx^{-1})=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x, y)$ 满足方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy$$

13. 已知方程 $\sin(x+y)+\sin(y+z)=1$ 确定了隐函数 $z=f(x,y)$，求 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$

14. 设 $F(x,y)=f[x+g(y)]$，其中 $f(u)$ 与 $g(y)$ 都是可微函数，求 $F(x,y)$ 的一阶偏导数与二阶偏导数.

§11.2. 函数行列式

一、函数行列式

在上节讨论函数方程组所确定的隐函数（组）和求它们的偏导数的过程中，我们看到，以函数的偏导数为行和列的行列式起了重要作用. 在以后多元函数的积分中，还将显示它的重要作用

由 $A\subset\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射（或变换）就是 n 元函数

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A.$$

由 $A\subset\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射（或变换）就是 n 个 n 元函数构成的函数组

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ y_2=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n). \end{cases} \quad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A. \tag{1}$$

表为$(f_1,f_2,\cdots,f_n)$. 设它们对每个自变量都存在偏导数$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i=1,2,\cdots,n$; $j=1,2,\cdots,n$, 行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \tag{2}$$

称为函数组$(f_1,f_2,\cdots,f_n)$在点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的**雅可比①行列式**，也称为**函数行列式**，表为.

$$\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)} \quad 或 \quad \frac{D(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}.$$

求下列函数组(变换)的函数行列式:

1. 极坐标变换(见练习题 10.3 第 4 题(1))

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi. \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$=r\cos^2\varphi+r\sin^2\varphi=r.$$

2. 柱面坐标变换

---

① 雅可比(Jacobi, 1804—1851)德国数学家.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

3. 球面坐标变换(见练习题10.3第4题(2))

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2\sin\varphi.$$

二、函数行列式的性质

已知导数 $f'(x)$ 对研究一元函数 $y=f(x)$ 的性态具有重要意义. 我们将证明，函数行列式(2)对研究函数组(1)所起的作用完全类似于导数 $f'(x)$ 对研究函数 $y=f(x)$ 所起的作用. 不仅如此，函数行列式的运算也类似于导数的运算. 为了简单起见，仅就 $n=$

2 的情形加以讨论，所得结果对任意自然数 n 都是正确的.

已知一元函数 $y=f(x)$ 与 $x=\varphi(t)$ 的复合函数 $y=f[\varphi(t)]$ 的导数是 $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$，与它类似的有：

定理 1. 若函数组 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 有连续的偏导数，而 $x=x(s,t)$，$y=y(s,t)$ 也有连续偏导数，则

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}.$$

证明 由复合函数的微分法则，有

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},\qquad \frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

由行列式的乘法，有

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t}\\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\\ \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{vmatrix}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}.\quad\square$$

若一元函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 某邻域具有连续的导数 $f'(x)$，且 $f'(x_0)\neq 0$. 由连续函数的保号性，在点 x_0 某邻域 Δ，$f'(x)$ 与 $f'(x_0)$ 保持同一符号，因而在 Δ 函数 $y=f(x)$ 严格单调，它存在反函数 $x=\varphi(y)$，且

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

和它类似的有：

定理 2. 若函数组 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 有连续的偏导数，且 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0$，则存在有连续偏导数的反函数组 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$，且

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}. \tag{3}$$

证明 §11.1. 定理 3 的推论已给出存在连续偏导数的反函数组的证明. 下面证明(3)式成立. 在定理 1 中，令 $s=u, t=v$，有

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(u,v)}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v}\\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1,$$

即
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}},\qquad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0. \quad \square$$

三、函数行列式的几何性质

一元函数 $y=f(x)$ 是 R^1 到 R^1 的映射. 取定一点 x_0，它的象点是 $y_0=f(x_0)$. 当自变量 x 在点 x_0 有改变量 Δx，相应 y 在 y_0 有改变量 Δy. 线段 Δy 的长 $|\Delta y|$ 与线段 Δx 的长 $|\Delta x|$ 之比 $\frac{|\Delta y|}{|\Delta x|}$ 称为映射 f 在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 的**平均伸缩系数**. 若当 $\Delta x\to 0$ 时，平均伸缩系数 $\frac{|\Delta y|}{|\Delta x|}$ 存在极限，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta y|}{|\Delta x|}=\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right|=|f'(x_0)|,$$

则称 $|f'(x_0)|$ 是映射 f 在点 x_0 的**伸缩系数**.

由此可见，一元函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的导数的绝对值 $|f'(x_0)|$，又有了新的几何意义，它是映射 f 在点 x_0 的伸缩系数.

同样，$\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}^2$ 的变换 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 也有类似的几何意义.

定理 3. 若函数组 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 在开区域 G 存在连续的偏导数，且 $\forall (x,y)\in G$，有 $J(x,y)\equiv\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0$. 函数组将 xy 平面上开区域 G 变换为 uv 平面上的开区域 G'. 点 $(x_0,y_0)\in G$ 变换为 uv 平面上点 $(u_0,v_0)=[u(x_0,y_0),v(x_0,y_0)]\in G'$，则包含点 (u_0,v_0) 的面积微元 $d\sigma'$ 与对应的包含点 (x_0,y_0) 的面积微元 $d\sigma$ 之比是 $|J(x_0,y_0)|$，即

$$\frac{d\sigma'}{d\sigma}=|J(x_0,y_0)|=\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

证明 当正数 h 充分小时，在开区域 G 内存在以 $A(x_0,y_0)$，$B(x_0+h,y_0)$，$C(x_0+h,y_0+h)$，$D(x_0,y_0+h)$ 为顶点的正方形域. 显然，正方形域 $ABCD$ 的面积 $\Delta\sigma=h^2$.

函数组将 xy 平面上四点 A,B,C,D 变换为 uv 平面上四点 A',B',C',D'，它将正方形 $ABCD$ 变换为曲边四边形 $A'B'C'D'$，如图 11.2，其顶点坐标是

$A'[u(x_0,y_0),v(x_0,y_0)]$，

$B'[u(x_0+h,y_0),v(x_0+h,y_0)]$，

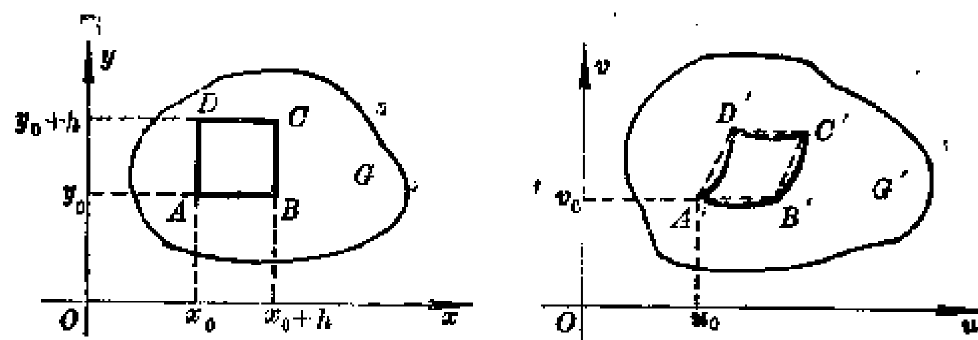


图 11.2

$C'[u(x_0+h, y_0+h), v(x_0+h, y_0+h)]$,

$D'[u(x_0, y_0+h), v(x_0, y_0+h)]$.

设曲边四边形 $A'B'C'D'$ 的面积是 $\Delta\sigma'$. 可将 $\Delta\sigma'$ 近似地看作是以 A', B', C', D' 为顶点的四边形的面积. 这个四边形的面积又可近似地看作是以 A', B', C' 为顶点的三角形的面积的二倍. 由平面解析几何知, 三角形 $A'B'C'$ 的面积的二倍就是 $\Delta\sigma'$ 的近似值, 即

$$\Delta\sigma' \approx \pm 2\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix} u(x_0+h, y_0)-u(x_0, y_0) & u(x_0+h, y_0+h)-u(x_0+h, y_0) \\ v(x_0+h, y_0)-v(x_0, y_0) & v(x_0+h, y_0+h)-v(x_0+h, y_0) \end{vmatrix}^{①}.$$

根据微分中值定理与偏导函数的连续性, 上面行列式又可改写为

$$\Delta\sigma' \approx \pm\begin{vmatrix} u'_x(x_0+\theta_1 h, y_0)h & u'_y(x_0+h, y_0+\theta_3 h)h \\ v'_x(x_0+\theta_2 h, y_0)h & v'_y(x_0+h, y_0+\theta_4 h)h \end{vmatrix}$$

$$\approx \pm\begin{vmatrix} u'_x(x_0, y_0) & u'_y(x_0, y_0) \\ v'_x(x_0, y_0) & v'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} h^2 = |J(x_0, y_0)|h^2,$$

其中 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ 都是 0 与 1 之间的数. 于是, 有

$$\Delta\sigma' \approx |J(x_0, y_0)|h^2 = |J(x_0, y_0)|\Delta\sigma,$$

即
$$\frac{d\sigma'}{d\sigma} = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta\sigma'}{\Delta\sigma} = |J(x_0, y_0)|$$

或
$$\frac{d\sigma'}{d\sigma} = |J(x_0, y_0)| = \left|\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right|_{(x_0, y_0)}. \quad \square$$

注 在定理 3 的条件下, 变换 $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$ 将 xy 平面的开区域 G 变换为 uv 平面的开区域 G', 将 G 内的直线变换为 G' 内的曲线, 且是一一对应的, 都需要证明. 近似计算也需估算误

---

① 面积 $\Delta\sigma'$ 是正数. 行列式可能是正也可能是负, 用符号"±", 使其为正数. 行列式是正数, 取"+"; 行列式是负数, 取"−".

差，能够证明，

$$\Delta\sigma' = |J(x_0, y_0)| h^2 + o(h^2).$$

因此定理 3 的证明是不严格的，是示意性的.

练 习 题 11.2

1. 证明：设 $xu=x^2+y^2$，$yv=x^2+y^2$，有

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\frac{uv}{xy}.$$

2. 证明：设 $u=\frac{yz}{x}$，$v=\frac{zx}{y}$，$w=\frac{xy}{z}$，有

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = 4.$$

3. 证明：若 $u(x,y,z)$，$v(x,y,z)$ 都可微，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 0.$$

4. 证明：若 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$，$z=z(u,v)$ 都可微，则

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}dx + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}dy + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dz = 0.$$

5. 证明：若 $u=u(x,y,z)$，$v=v(x,y,z)$ 有连续的偏导数，而 $x=x(s,)$，$y=y(s,t)$，$z=z(s,t)$ 也有连续的偏导数，则

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} + \frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}\frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)} + \frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}\frac{\partial(z,x)}{\partial(s,t)}.$$

§11.3. 条 件 极 值

一、条件极值与拉格朗日乘数法

在 §10.4 第三段已经讨论了多元函数的极值，在那里看到，求函数的极值，函数自变量的变化范围有时要受到某种条件的限制. 如 §10.4 的例 8，在已知周长为 $2p$ 的一切三角形中，求面积最大的三角形. 设三角形的三个边长分别是 x, y, z. 这个问题就是求三角形的面积函数

$$\varphi(x,y,z) = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$$

的最大值，其中自变量 x,y,z 不是独立的，要受条件 $x+y+z=2p$ 的限制.

再如，空间曲线 C 是两个曲面 $F_1(x,y,z)=0$ 与 $F_2(x,y,z)=0$ 的交线. 求曲线 C 外定点 $P(a,b,c)$ 到曲线 C 的距离(即点 P 到曲线 C 上点距离的最小值). 设 $M(x,y,z)$ 是曲线 C 上任意一点，这个问题就是求距离函数

$$d(x,y,z)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$

的最小值，而其中点 $M(x,y,z)$ 在曲线 C 上，自变量 x,y,z 不是独立的，要受条件(函数方程组)

$$\begin{cases}F_1(x,y,z)=0,\\F_2(x,y,z)=0,\end{cases}$$

的限制. 一般情况，求函数

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

在满足函数方程组(限制条件)

$$\begin{cases}F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\\F_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\F_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\end{cases}\quad(m<n)\tag{1}$$

的所有点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的极值，就是**条件极值**. 函数方程组(1)称为**联系方程组**.

怎样求条件极值呢？有些条件极值的联系方程(组)很简单，可将这些条件极值化为§10.4第二段已学过的普通极值(相对而言亦称无条件极值). 例如，上面的"求最大三角形的面积"问题. 它的联系方程(或限制条件) $x+y+z=2p$ 很简单. 将其中一个自变量用另外两个自变量表示出来(或解出来)，如 $z=2p-x-y$. 然后将它代入三元函数 $\varphi(x,y,z)$ 之中，就化为二元函数的普通极值. 但是，这种"解法"并不是对所有的条件极值都是可行的. 例如，

上面所述的"点P到曲线C的距离"问题. 一般来说, 从联系方程组

$$\begin{cases}F_1(x,y,z)=0,\\F_2(x,y,z)=0.\end{cases}$$

解出两个一元函数组,要经过复杂的计算,有时是不可能的(隐函数组可能不是初等函数). 从而将它化为普通极值是困难的,甚至是不可能的. 为此, 对条件极值要专门进行讨论. 下面仅给出条件极值的必要条件, 即拉格朗日乘数法.

为了书写简单,又易于理解,讨论四元函数

$$y=f(x_1,x_2,x_3,x_4) \tag{2}$$

满足联系方程组(限制条件)

$$\begin{cases}F_1(x_1,x_2,x_3,x_4)=0,\\F_2(x_1,x_2,x_3,x_4)=0\end{cases} \tag{3}$$

条件下取极值的必要条件. 即若点$P_0(x_1^0,x_2^0,x_3^0,x_4^0)$是这个条件极值的极值点,那么点$P_0(x_1^0,x_2^0,x_3^0,x_4^0)$ 的坐标应满足什么样的方程?

为此, 设函数f,F_1,F_2的所有偏导数在点P_0的某邻域G连续, 且矩阵

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_4}\\[2ex]\dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_4}\end{pmatrix}_{P_0}$$

的秩为2. 为了确定起见,不妨设函数行列式

$$\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x_3,x_4)}\right|_{P_0}\neq 0.$$

显然,联系方程组(3)在点P_0的邻域G满足§**11.1**定理3的条件,则存在点$Q_0(x_1^0,x_2^0)$的邻域V, 在V存在唯一一组有连续偏

导数的(隐)函数组①

$$x_3=\varphi(x_1,x_2),\quad x_4=\psi(x_1,x_2),\tag{4}$$

使

$$\begin{cases}F_1[x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2),\psi(x_1,x_2)]\equiv 0,\\ F_2[x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2),\psi(x_1,x_2)]\equiv 0,\end{cases}\tag{5}$$

且

$$x_3^0=\varphi(x_1^0,x_2^0)\quad 与\quad x_4^0=\psi(x_1^0,x_2^0).\tag{6}$$

即满足方程组(3)的点(x_1,x_2,x_3,x_4)也必满足方程组(4).

若点$P_0(x_1^0,x_2^0,x_3^0,x_4^0)$是条件极值的极值点,那么点$P_0$的坐标必满足函数(2)和方程组(4).

将函数组(4)代入函数$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$之中,f化为x_1与x_2的二元函数,设

$$g(x_1,x_2)=f[x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2),\psi(x_1,x_2)].\tag{7}$$

显然,若点$P_0(x_1^0,x_2^0,x_3^0,x_4^0)$是条件极值的极值点,那么点$Q_0(x_1^0,x_2^0)$必是函数$g(x_1,x_2)$的稳定点(其中$x_3^0$与$x_4^0$由$Q_0(x_1^0,x_2^0)$唯一确定,见(6)式).

根据§10.4定理3(多元函数极值的必要条件),点$Q_0(x_1^0,x_2^0)$必满足方程组

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}=\frac{\partial g}{\partial x_2}=0.$$

由(7)式求出偏导数$\frac{\partial g}{\partial x_1},\frac{\partial g}{\partial x_2}$.因此点$Q_0(x_1^0,x_2^0)$必满足方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial x_1}=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+\dfrac{\partial f}{\partial x_3}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\dfrac{\partial f}{\partial x_4}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}=0,\\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2}=\dfrac{\partial f}{\partial x_2}+\dfrac{\partial f}{\partial x_3}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\dfrac{\partial f}{\partial x_4}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}=0.\end{cases}\tag{8}$$

值得注意的是,方程组(8)中的四个偏导数$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\frac{\partial\varphi}{\partial x_2},\frac{\partial\psi}{\partial x_1},\frac{\partial\psi}{\partial x_2}$

---

① 理论上存在.一般来说,不能用代数方法从中解出来,即不一定是初等函数.这里只是暂时借用这两个符号:φ,ψ.后面还将设法消去φ与ψ.

(理论上存在函数组 φ,ψ，它们是由已知的函数 F_1 与 F_2 所确定)必须用已知的函数 F_1 与 F_2 表示出来. 为此，按通常求隐函数组偏导数的方法，对恒等式组(5)分别关于 x_1 与 x_2 求偏导数，有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial F_1}{\partial x_3}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\dfrac{\partial F_1}{\partial x_4}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}=0,\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}+\dfrac{\partial F_2}{\partial x_3}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\dfrac{\partial F_2}{\partial x_4}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}=0,\end{cases}\tag{9}$$

与

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial F_1}{\partial x_3}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\dfrac{\partial F_1}{\partial x_4}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}=0,\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}+\dfrac{\partial F_2}{\partial x_3}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\dfrac{\partial F_2}{\partial x_4}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}=0.\end{cases}\tag{10}$$

从方程组(9)解出 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1},\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}$，从方程组(10)解出 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2},\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}$，将它们代入方程组(8)，得到点 $Q_0(x_1^0,x_2^0)$ 必满足的方程组. 这样作很麻烦，且对自变量 x_1,x_2,x_3,x_4 不对称. 为了简化运算，采用一次加减消去法，即选择适当的常数 λ_1 与 λ_2（一定存在）分别乘方程组(9)的两个方程，即

$$\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_4}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}=0,$$

$$\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_1}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_4}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}=0.$$

然后将它们与方程组(8)的第一个方程

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_4}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}=0$$

等号左右两端分别相加，有

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_1}+\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_3}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$$
$$+\left(\frac{\partial f}{\partial x_4}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_4}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_4}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_1}=0.$$

同样的方法，用常数 λ_1 与 λ_2 分别乘方程组(10)的两个方程，然后将它们与方程组(8)的第二个方程等号左右两端相加，有

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_2}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_3}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$$
$$+\left(\frac{\partial f}{\partial x_4}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_4}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_4}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}=0.$$

为了消去偏导数$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$，$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$，$\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$，$\frac{\partial \psi}{\partial x_2}$（即用 F_1 与 F_2 表示它们）．令

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x_3}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_3}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_3}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial x_4}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_4}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_4}=0,\end{cases} \tag{11}$$

从而，有

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_1}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_2}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_2}=0.\end{cases} \tag{12}$$

于是，方程组(8)就化为方程组(12)与(11)．因此，若点 $P_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$是条件极值的极值点，那么它的坐标 $x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0$，再加上两个常数 λ_1 与 λ_2 必满足六个方程：

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_i}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_i}=0,\qquad i=1,2,3,4.$$

$$\begin{cases}F_1(x_1, x_2, x_3, x_4)=0,\\ F_2(x_1, x_2, x_3, x_4)=0.\end{cases}$$

综上所述，有下面的拉格朗日乘数法定理：

定理　设函数 $y=f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 与 $F_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$，$F_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$的所有偏导数在点 $P_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$的某邻域$G$连续，且矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & \frac{\partial F_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} & \frac{\partial F_2}{\partial x_4} \end{pmatrix}$$

的秩为2. 若点 $P_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ 是函数 $y=f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 在满足联系方程组

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, x_3, x_4)=0, \\ F_2(x_1, x_2, x_3, x_4)=0 \end{cases}$$

的极值点,则存在常数 λ_1 与 λ_2,而 λ_1 与 λ_2 和点 P_0 的四个坐标 x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0 必同时满足下列方程组(共六个方程):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_i}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_i}=0, \qquad i=1,2,3,4.$$

$$F_1(x_1, x_2, x_3, x_4)=0,$$

$$F_2(x_1, x_2, x_3, x_4)=0.$$

为了使定理的结果便于记忆,引入辅助函数

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda_1, \lambda_2)=f+\lambda_1F_1+\lambda_2F_2.$$

令函数 Φ 关于 $x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda_1, \lambda_2$ 的偏导数为零,即

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_i}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_i}=0, \quad i=1,2,3,4. \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1}=F_1(x_1, x_2, x_3, x_4)=0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_2}=F_2(x_1, x_2, x_3, x_4)=0. \end{cases} \tag{13}$$

恰好是定理的六个方程. 这里将求函数 $y=f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, 在满足联系方程组 $F_1(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$, $F_2(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$ 条件下取极值的问题转化为求辅助函数 Φ 的普通极值, 称为**拉格朗日乘数法**. 由此可见,极值点 $P_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ 必满足方程组(13),即只有满足方程组(13)的点(将解得的 λ_1 与 λ_2 去掉)才可能是极值点.

拉格朗日乘数法只给出条件极值的必要条件. 尚应进一步讨

论条件极值的充分条件，从略. 方程组(13)的解是否是极值点，一般可由问题的具体意义判定.

将上述特殊情况推广到一般情况：求函数

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

满足联系方程组

$$F_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \qquad i=1,2,\cdots m, \quad m<n.$$

的条件极值，其步骤是：

1) 由拉格朗日乘数法，作辅助函数

$$\Phi=f+\lambda_1F_1+\lambda_2F_2+\cdots+\lambda_mF_m.$$

2) 求 Φ 的稳定点，即求方程组

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_i}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_i}+\cdots+\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial x_i}=0,\quad i=1,\ 2,\cdots,n,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_k}=F_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\quad k=1,2,\cdots,m.$$

的解. 设解是$(x_1^0,x_2^0,\cdots x_n^0,\lambda_1^0,\lambda_2^0,\cdots,\lambda_m^0)$，求解过程可消去 λ_k，$k=1,2,\cdots m$. 求得满足方程组的稳定点$(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$.

3) 由问题的实际意义，如果函数必存在条件极值，通常方程组又只有唯一一个稳定点$(x_1^0,x_2^0,\ \cdots,\ x_n^0)$，则该点必为所求的极值点.

二、例

例 1. 求三维空间的一点(a,b,c)到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离.

解 设平面上任意一点是(x,y,z). 此题就是求函数

$$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$

的最小值，其联系方程是

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

讨论函数 $r^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$. 注意，函数 r 与 r^2 的

极值点相同.

根据拉格朗日乘数法，作辅助函数

$$\Phi = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + \lambda(Ax+By+Cz+D).$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2(x-a) + \lambda A = 0, \text{ 即 } \quad x = a - \frac{1}{2}\lambda A.$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2(y-b) + \lambda B = 0, \text{ 即 } \quad y = b - \frac{1}{2}\lambda B.$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 2(z-c) + \lambda C = 0, \text{ 即 } \quad z = c - \frac{1}{2}\lambda C.$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = Ax + By + Cz + D = 0.$$

将 x, y, z 的值代入 $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0$ 之中，有

$$\lambda = \frac{2(Aa+Bb+Cc+D)}{A^2+B^2+C^2}.$$

于是，x, y, z 只有唯一一组解 (x_0, y_0, z_0)，其中

$$x_0 = a - \frac{A(Aa+Bb+Cc+D)}{A^2+B^2+C^2},$$

$$y_0 = b - \frac{B(Aa+Bb+Cc+D)}{A^2+B^2+C^2},$$

$$z_0 = c - \frac{C(Aa+Bb+Cc+D)}{A^2+B^2+C^2}.$$

显然，这个问题存在最小值．因此，函数 r^2 在此点 (x_0, y_0, z_0) 必取最小值．将此点的坐标代入 r^2 之中，得最小值

$$r^2_{\text{最小}} = \frac{(Aa+Bb+Cc+D)^2}{A^2+B^2+C^2}.$$

于是，点 (a, b, c) 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离是

$$r_{\text{最小}} = \frac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

例 2. 设 n 个正数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之和是 a，求函数

$$u = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

的最大值.

解 此题的联系方程是 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$.

根据拉格朗日乘数法，作辅助函数

$$\Phi=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}+\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n-a).$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}=\frac{1}{n}(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}-1}(x_2\cdots x_n)+\lambda=\frac{u}{nx_1}+\lambda=0,$$

即 $u=-n\lambda x_1$.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}=\frac{1}{n}(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}-1}(x_1x_3\cdots x_n)+\lambda=\frac{u}{nx_2}+\lambda=0,$$

即 $u=-n\lambda x_2$.

$\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}=\frac{1}{n}(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}-1}(x_1\cdots x_{n-1})+\lambda=\frac{u}{nx_n}+\lambda=0,$$

即 $u=-n\lambda x_n$.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}=x_1+x_2+\cdots+x_n-a=0,\quad 即\quad x_1+x_2+\cdots+x_n=a.$$

将 $u=-n\lambda x_k$, $k=1,2,\cdots,n$, 相加，并注意 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$, 有

$$nu=-n\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n)=-n\lambda a,\quad 即\quad \lambda=-\frac{u}{a}.$$

将 $\lambda=-\frac{u}{a}$ 分别代入上述 $u=-n\lambda x_k$, $k=1,2,\cdots,n$, 之中，得

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{a}{n}.$$

显然，这个问题存在最大值. 因此，函数 $u=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ 在点 $\left(\frac{a}{n},\frac{a}{n},\cdots,\frac{a}{n}\right)$ 取到最大值，而最大值是 $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{n}\right)^n}=\frac{a}{n}$. 于是，

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{a}{n}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

即 n 个正数的几何平均值不超过它们的算术平均值.

例 3. 椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$被通过原点的平面 $lx+my+nz=0$ 截成一个椭圆，求椭圆的面积.

解 求椭圆的面积，只须求出椭圆的长、短半轴之长. 设椭圆上的动点是 $P(x,y,z)$. 点 P 到椭圆中心(即原点$(0,0,0)$)的距离是 r，其最大、最小值分别是椭圆的长、短半轴之长. 这里求

$$r^2=x^2+y^2+z^2 \tag{14}$$

的最大值与最小值，且动点 $P(x,y,z)$满足联系方程组：

$$\begin{cases} lx+my+nz=0, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \end{cases} \tag{15}$$

根据拉格朗日乘数法，作辅助函数

$$\Phi=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(lx+my+nz)+\lambda_2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right).$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=2x+\lambda_1 l+2\lambda_2\frac{x}{a^2}=0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=2y+\lambda_1 m+2\lambda_2\frac{y}{b^2}=0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=2z+\lambda_1 n+2\lambda_2\frac{z}{c^2}=0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_1}=lx+my+nz=0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

将(16)，(17)，(18)式分别乘 x,y,z 再相加得

$$2(x^2+y^2+z^2)+\lambda_1(lx+my+nz)+2\lambda_2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=0.$$

由已知的(14)，(15)式，有

$$2r^2+2\lambda_2=0 \quad 或 \quad \lambda_2=-r^2.$$

将 $\lambda_2=-r^2$ 分别代入(16),(17),(18)式之中,解得 x,y,z 是

$$x=-\frac{\lambda_1 a^2 l}{2(a^2-r^2)},\quad y=-\frac{\lambda_1 b^2 m}{2(b^2-r^2)},\quad z=-\frac{\lambda_1 c^2 n}{2(c^2-r^2)}.$$

将上述三个等式分别乘以 l,m,n,再相加,有

$$lx+my+nz=-\frac{\lambda_1 a^2 l^2}{2(a^2-r^2)}-\frac{\lambda_1 b^2 m^2}{2(b^2-r^2)}-\frac{\lambda_1 c^2 n^2}{2(c^2-r^2)}.$$

由(15)式,有

$$-\frac{\lambda_1}{2}\left(\frac{a^2 l^2}{a^2-r^2}+\frac{b^2 m^2}{b^2-r^2}+\frac{c^2 n^2}{c^2-r^2}\right)=0,$$

即

$$\frac{a^2 l^2}{a^2-r^2}+\frac{b^2 m^2}{b^2-r^2}+\frac{c^2 n^2}{c^2-r^2}=0.$$

通分整理得 r^2 的二次三项式

$$(a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2)r^4-[a^2l^2(b^2+c^2)+b^2m^2(c^2+a^2)$$
$$+c^2n^2(a^2+b^2)]r^2+a^2b^2c^2(l^2+m^2+n^2)=0.$$

显然,在这里,r^2 存在最大值与最小值,则 r^2 的二次三项式必有两个不同的实根,一个是最大值,一个是最小值. 设这两个实根是 r_1^2 与 r_2^2. 由二次三项式根同系数的关系,有

$$r_1^2\cdot r_2^2=\frac{a^2b^2c^2(l^2+m^2+n^2)}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}.$$

于是,椭圆长、短半轴之长的积

$$r_1\cdot r_2=\frac{abc\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{\sqrt{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}}.$$

由椭圆的面积公式,椭圆的面积

$$A=r_1\cdot r_2\pi=\frac{abc\pi\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{\sqrt{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}}.$$

练 习 题 11.3

1. 求下列函数的条件极值:

(1) $z=xy$,联系方程是 $x+y=1$,

(2) $u=x-2y+2z$. 联系方程是 $x^2+y^2+z^2=1$.

2. 求在曲面 $z^2-xy=1$ 上到原点最近的点.

3. 求在两个曲面 $x^2-xy+y^2-z^2=1$ 与 $x^2+y^2=1$ 交线上到原点最近的点.

4. 求椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在第一挂限部分上的切平面与三个坐标面围成四面体的最小体积.

5. 求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y-2=0$ 之间的距离(即最小距离).

*　　　　*　　　　*　　　　*

6. 求二次型

$$f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy$$

满足联系方程

$$x^2+y^2+z^2=1$$

的最小值和最大值.

7. 证明不等式 $\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$, 其中 $n\geqslant1, x\geqslant0, y\geqslant0$. (提示: 求函数 $u=\frac{1}{2}(x^n+y^n)$ 满足联系方程 $x+y=c(>0)$ 的最小值.)

8. 证明: 赫尔德①不等式

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $a_i\geqslant0, b_i\geqslant0, i=1,2,\cdots,n$. $q>1$, 而 $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$. (提示: 求函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$ 满足联系方程 $x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p=1$ 的最大值. 最大值是 $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$. 再令 $x_i=\frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}$, 整理可得.)

---

① 赫尔德(Hölder 1859—1937)德国数学家.

§ 11.4. 隐函数存在定理在几何方面的应用

一、空间曲线的切线与法平面

1. 设空间曲线 C 的参数方程是

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ t\in I(\text{区间}).$$

它们在区间 I 可导，且 $\forall t\in I$，有 $x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)\neq 0$(即 $x'(t),y'(t),z'(t)$不同时为 0). 取定 $t_0\in I$，对应曲线 C 上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)=P_0[x(t_0),y(t_0),z(t_0)]$. 任取改变量 $\Delta t\neq 0$，使 $t_0+\Delta t\in I$, 对应曲线 C 上另一点

$$\begin{aligned}&P_1(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)\\=&P_1[x(t_0+\Delta t),y(t_0+\Delta t),z(t_0+\Delta t)].\end{aligned}$$

由空间解析几何知，过曲线 C 上两点 P_0 与 P_1 的割线方程是(如图 11.3)

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z},$$

或

$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

当点 P_1 沿曲线 C 无限趋近于点 P_0 时，即 $\Delta t\to 0$，割线 P_0P_1 的极限位置就是曲线 C 上点 P_0 的切线. 于是，曲线 C 上点 P_0 的切线方程是

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

切线的方向向量 $T[x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)]$称为曲线 C 在点 P_0 的**切向量**.

一个平面通过空间曲线 C 上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，且与点 P_0 的切线垂直，称此平面是空间曲线 C 在点 P_0 的**法平面**(如图 11.4). 于是，切线的切向量就是法平面的法向量. 若在法平面上任取一

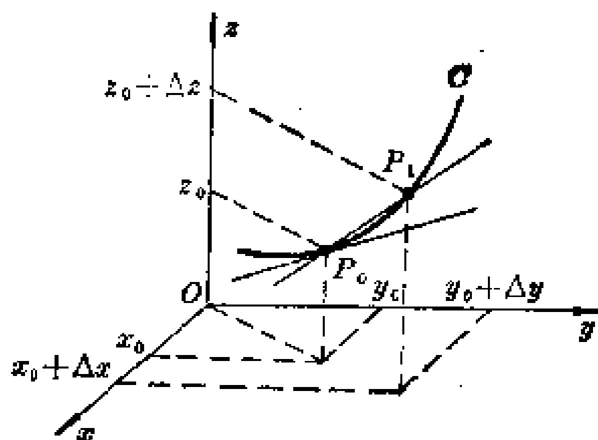


图 11.3

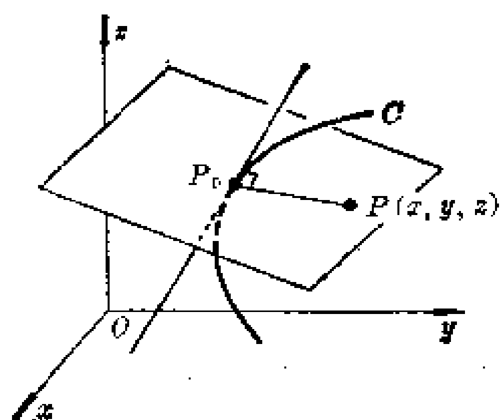


图 11.4

点 $P(x,y,z)$，则向量 $P_0P=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ 与切线的切向量 $T[x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)]$ 垂直，即

$$(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0.$$

由向量的内积(向量的数量积)公式，法平面的方程是

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

或 $x'(t_0)[x-x(t_0)]+y'(t_0)[y-y(t_0)]+z'(t_0)[z-z(t_0)]=0.$

例 1. 求螺旋线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$ 在 $t_0=\frac{\pi}{3}$ 处的切线方程与法平面方程.

解 $x'=-a\sin t, y'=a\cos t, z'=b$. 切线方程是

$$\frac{x-a\cos\frac{\pi}{3}}{-a\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{y-a\sin\frac{\pi}{3}}{a\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{z-b\frac{\pi}{3}}{b},$$

即

$$\frac{x-\frac{a}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{y-\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a}{2}}=\frac{z-\frac{\pi}{3}b}{b}.$$

法平面方程是

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}a\left(x-\frac{a}{2}\right)+\frac{a}{2}\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)+b\left(z-\frac{\pi}{3}b\right)=0.$$

2. 设空间曲线C是函数方程组$F_1(x,y,z)=0,F_2(x,y,z)=0$,即空间曲线$C$是这两个曲面的交线. 在空间曲线$C$上任取一个定点$P(x_0, y_0, z_0)$, 即$F_1(x_0, y_0,z_0)=0$与$F_2(x_0,y_0,z_0)=0$. 设$F_1(x,y,z)$与$F_2(x, y, z)$对$x,y,z$的偏导数在点$P$的邻域内都连续, 且$\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right|_P$, $\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\right|_P$, $\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}\right|_P$不同时为零, 不妨设$\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\right|_P\neq 0$. 根据§11.1定理4,在点$x_0$某邻域,空间曲线$C$可表为

$$y=y(x) \quad 与 \quad z=z(x).$$

于是,空间曲线C可表为以x为参数的参数方程

$$x=x,\ \ y=y(x),\ \ z=z(x).$$

为了求空间曲线C在点P的切线方程, 首先求切线向量$T\left(1,\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}\right)$. 由隐函数的求导数公式(注意, F_1与F_2中的y与z都是x的函数),有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_1}{\partial x}+\dfrac{\partial F_1}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial F_1}{\partial z}\dfrac{dz}{dx}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial F_2}{\partial x}+\dfrac{\partial F_2}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial F_2}{\partial z}\dfrac{dz}{dx}=0.\end{cases}$$

解得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}}, \qquad \frac{dz}{dx}=\frac{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}}.$$

由切线方程的公式,空间曲线C在点$P(x_0,y_0,z_0)$的切线方程是

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\dfrac{\left.\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}\right|_P}{\left.\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\right|_P}}=\frac{z-z_0}{\dfrac{\left.\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right|_P}{\left.\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\right|_P}}$$

或
$$\frac{x-x_0}{\left.\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\right|_P}=\frac{y-y_0}{\left.\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}\right|_P}=\frac{z-z_0}{\left.\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right|_P}. \tag{1}$$

空间曲线C在点$P(x_0,y_0,z_0)$的法平面方程是

$$\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\right|_P(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}\right|_P(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right|_P(z-z_0)=0. \tag{2}$$

例 2. 求曲线$x^2+y^2+z^2=6$，$x+y+z=0$在点$P(1,-2,1)$的切线方程与法平面方程.

解 $F_1=x^2+y^2+z^2-6$， $F_2=x+y+z$.

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial F_1}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial F_1}{\partial z}=2z,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial F_2}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial F_2}{\partial z}=1.$$

$$\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\right|_P=-6,\quad \left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}\right|_P=0,\quad \left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right|_P=6.$$

由公式(1)与(2)，曲线在点$P(1,-2,1)$的切线方程与法平面方程分别是

$$\frac{x-1}{-6}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{6}.$$

与
$$-6(x-1)+6(z-1)=0 \quad 或 \quad x-z=0.$$

二、曲面的切平面与法线

1. 设曲面S的方程是

$$z=f(x,y), \qquad (x,y)\in D(区域)$$

由§10.3第三段，若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)\in D$ 可微，则曲面 S 上点 $M(x_0,y_0,z_0)$ $(z_0=f(x_0,y_0))$ 的切平面方程是

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

即切平面的法向量是 $\boldsymbol{n}(f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0),-1)$. 法线方程是

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

2. 设曲面 S 的方程是

$$F(x,y,z)=0.$$

在曲面 S 上任取一点 $M(x_0,y_0,z_0)$，即 $F(x_0,y_0,z_0)=0$. 若函数 $F(x,y,z)$ 所有的偏导数在点 M 的邻域连续，且 $\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}$ 在点 M 不同时为零，不妨设 $\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M\neq 0$. 根据§11.1定理2，在点 (x_0,y_0) 的某邻域，曲面 S 可表为

$$z=f(x,y),\qquad z_0=f(x_0,y_0).$$

求曲面 S 上点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程，首先求曲面 S 在点 M 的法向量 $\boldsymbol{n}(f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0),-1)$. 由隐函数求导数公式，有

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

解得 $$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

由切平面方程的公式，曲面 S 上点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程是

$$-\frac{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M}(x-x_0)-\frac{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M}(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

或 $$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M(x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M(y-y_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M(z-z_0)=0. \tag{3}$$

曲面 S 上点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的法线方程是

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M}. \tag{4}$$

例 3. 求曲面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 上在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程与法线方程.

解 $F(x,y,z)=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}$.

$$F'_x=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}},\ F'_y=\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}},\ F'_z=\frac{2}{3}z^{-\frac{1}{3}}.$$

由公式(3)与(4),曲面在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程与法线方程分别是

$$x_0^{-\frac{1}{3}}(x-x_0)+y_0^{-\frac{1}{3}}(y-y_0)+z_0^{-\frac{1}{3}}(z-z_0)=0$$

与 $$\frac{x-x_0}{x_0^{-\frac{1}{3}}}=\frac{y-y_0}{y_0^{-\frac{1}{3}}}=\frac{z-z_0}{z_0^{-\frac{1}{3}}}$$

或 $$x_0^{\frac{1}{3}}(x-x_0)=y_0^{\frac{1}{3}}(y-y_0)=z_0^{\frac{1}{3}}(z-z_0).$$

3. 设曲面 S 是参数方程

$$x=x(u,v),\ \ y=y(u,v),\ \ z=z(u,v),\ \ (u,v)\in D(\text{区域}).$$

取定一点 $Q(u_0,v_0)\in D$,对应曲面 S 上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$,即

$$x_0=x(u_0,v_0),\ \ y_0=y(u_0,v_0),\ \ z_0=z(u_0,v_0).$$

若上述函数组的所有偏导数在点 $Q(u_0,\ v_0)$ 的邻域连续,且 $\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_Q,\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_Q,\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_Q$ 不同时为 0. 不妨设 $\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_Q\neq 0$. 根据 §11.1 定理 3 的推论,函数组 $x=x(u,\ v)$,$y=y(u,v)$ 在点 (x_0,y_0) 邻域存在有连续偏导数的反函数组 $u=u(x,y)$,$v=v(x,y)$.

将它们代入 $z=z(u,v)$ 之中，有

$$z=z[u(x,y),v(x,y)].$$

求曲面 S 上点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程，首先求曲面 S 在点 M 的法向量 $\boldsymbol{n}(z'_x(x_0,y_0),z'_y(x_0,y_0),-1)$.
由隐函数的求导法则(注意，z 是 x,y 的函数，而 x,y 又是 u,v 的函数)，有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u},\\ \dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}.\end{cases}$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}.$$

由切平面方程公式，曲面 S 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程是

$$z-z_0=\frac{-\left.\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_Q}{\left.\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_Q}(x-x_0)+\frac{-\left.\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_Q}{\left.\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_Q}(y-y_0)$$

或 $$\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_Q(x-x_0)+\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_Q(y-y_0)+\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_Q(z-z_0)=0. \tag{5}$$

曲面 S 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的法线方程是

$$\frac{x-x_0}{\left.\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_Q}=\frac{y-y_0}{\left.\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_Q}=\frac{z-z_0}{\left.\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_Q}. \tag{6}$$

例 4. 求曲面 $x=u+v$，$y=u^2+v^2$，$z=u^3+v^3$ 在点 $Q(0,2)$ 对应曲面上的点的切平面方程与法线方程.

解 点 $Q(0,2)$ 对应曲面上的点 $P(2,4,8)$.

$$\frac{\partial x}{\partial u}=1,\quad \frac{\partial x}{\partial v}=1,\quad \frac{\partial y}{\partial u}=2u,\quad \frac{\partial y}{\partial v}=2v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=3u^2,\quad \frac{\partial z}{\partial v}=3v^2.$$

$$\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_Q=0,\quad \left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_Q=-12,\quad \left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_Q=4.$$

由公式(5)与(6)，曲面在点 $P(2,4,8)$ 的切平面方程与法线方程分别是

$$-12(y-4)+4(z-8)=0 \quad 或 \quad 3y-z=4$$

与
$$\frac{x-2}{0}=\frac{y-4}{-12}=\frac{z-8}{4} \quad 或 \quad \frac{x-2}{0}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-8}{1}.$$

练 习 题 11.4

1. 求下列曲线在指定点的切线方程与法平面方程：

(1) $x=t-\cos t,\quad y=3+\sin 2t,\quad z=1+\cos 3t$，在点 $t=\frac{\pi}{2}$.

(2) $y=x, z=x^2$，在点 $(1,1,1)$.

2. 在曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上求出一点，使此点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

3. 求曲线 $x^2+z^2=10, y^2+z^2=10$ 在点 $P(1,1,3)$ 的切线方程与法平面方程.

4. 求下列曲面在指定点的切平面方程与法线方程：

(1) $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$，在点 $\left(1,1,\frac{\pi}{4}\right)$.

(2) $x^2+y^2+z^2=169$，在点 $(3,4,12)$.

5. 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的切平面，使其平行于平面 $x+4y+6z=0$.

6. 证明：若 $P(x_0,y_0,z_0)$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上任意一点，则点 P 的法线必通过球心 $(0,0,0)$.

7. 求曲面 $x=u\cos v, y=u\sin v,\quad z=av$ 上在点 $P(u_0,\ v_0)$ 的切面方程与法线方程.

*　　　　*　　　　*　　　　*

8. 证明：若二曲面 $F_1(x,y,z)=0$，$F_2(x,y,z)=0$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 直交（二曲面在点 P 的法线垂直），则在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 有

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial z}=0.$$

并验证二曲面 $3x^2+2y^2=2z+1$，$x^2+y^2+z^2-4y-2z+2=0$ 在点 $(1,1,2)$ 直交．

9. 证明：曲面 $F(nx-lz,\ ny-mz)=0$ 上任意一点的切平面都平行于直线 $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$．

第十二章　广义积分与含参变量的积分

解决许多实际问题要求我们将函数 $f(x)$在区间$[a,b]$ 的定积分$\int_a^b f(x)dx$ 从不同的方面予以推广．例如，将区间$[a,b]$推广到无限区间$((-\infty,b],[a,+\infty),(-\infty,+\infty))$，就有无限区间的广义积分，简称无穷积分；将区间$[a,b]$的有界函数$f(x)$推广到无界函数，就有无界函数的广义积分，简称瑕积分．将被积函数由一元函数推广到多元函数就有含参变量积分，等等．

我们已知，表示非初等函数可用各种不同的数学工具．例如，可变上限(或下限)的定积分，收敛的函数级数，函数方程或函数方程组(隐函数)等．本章所讲的含参变量积分也是表示非初等函数的一种重要的数学工具．我们将讨论含参变量积分所定义函数的分析性质及其应用．

§12.1．无 穷 积 分

一、无穷积分收敛与发散概念

§8.5 第六段给出从地面垂直发射的质量为m的火箭克服地球引力所作的功．设地球的质量为 M，地球的半径为 R．若火箭距离地心为 $b(b>R)$，则将质量为m的火箭，由地面发射到距离地心为 b 处，火箭克服地球引力 $F=\frac{mgR^2}{r^2}$所作的功

$$W=\int_R^b \frac{mgR^2}{r^2}dr=mgR^2\int_R^b\frac{dr}{r^2}=mgR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{b}\right).$$

为了使火箭脱离地球的引力范围，即 $b\to+\infty$，火箭克服地球引力F所作的功

$$W' = \lim_{b \to +\infty} \int_R^b \frac{mgR^2}{r^2} dr = \lim_{b \to +\infty} mgR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{b} \right) = mgR.$$

由此可见，计算垂直发射质量为m的火箭脱离地球的引力所作功，需要计算一个定积分的上限无限增大的极限．这就是无穷积分的实例．

定义 设函数$f(x)$在区间$[a, +\infty)$(或$(-\infty, b]$，$(-\infty, +\infty)$)有定义，符号

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \left(或 \int_{-\infty}^b f(x)dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \right)$$

称为函数$f(x)$的**无穷积分**．

设$\forall p \in \mathbf{R}, p > a$，函数$f(x)$在$[a, p]$可积．若极限

$$\lim_{p \to +\infty} \int_a^p f(x)dx$$

存在(不存在)，则称无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **收敛(发散)**，其极限称为无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$(的值)，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{p \to +\infty} \int_a^p f(x)dx.$$

设$\forall q \in \mathbf{R}, q < b$，函数$f(x)$在$[q, b]$可积，若极限

$$\lim_{q \to -\infty} \int_q^b f(x)dx$$

存在(不存在)，则称无穷积分$\int_{-\infty}^b f(x)dx$ **收敛(发散)**，其极限称为无穷积分$\int_{-\infty}^b f(x)dx$(的值)，即

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{q \to -\infty} \int_q^b f(x)dx.$$

若$\exists c \in \mathbf{R}$，两个无穷积分

$$\int_{-\infty}^c f(x)dx \quad 与 \quad \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

都收敛(至少有一个发散),则称无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛(发散),且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx. \tag{1}$$

根据积分区间可加性,不难证明,(1)式的右端与数 c 无关. 为了方便,常取 $c=0$.

显然,上面所讲的火箭脱离地球引力所作的功 W' 是函数 $F(r)=\frac{mgR^2}{r^2}$ 的无穷积分,即

$$W' = \lim_{b\to+\infty}\int_R^b \frac{mgR^2}{r^2}dr = \int_R^{+\infty}\frac{mgR^2}{r^2}dr = mgR.$$

例 1. 求下列无穷积分①:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx, \qquad \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx.$$

解
$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{p\to+\infty}\int_0^p e^{-x}dx = \lim_{p\to+\infty}(-e^{-x})\Big|_0^p$$
$$= \lim_{p\to+\infty}(1-e^{-p}) = 1.$$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{p\to+\infty}\int_0^p xe^{-x^2}dx = \lim_{p\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\Big|_0^p$$
$$= \lim_{p\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-p^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

例 2. 求下列无穷积分:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}, \qquad \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$$

解
$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{p\to+\infty}\int_0^p\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{p\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^p$$
$$= \lim_{p\to+\infty}\operatorname{arctg}p = \frac{\pi}{2}.$$

① "求无穷积分"就是"求无穷积分的值",下同.

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{q\to-\infty}\int_{q}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{q\to-\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_{q}^{0}$$

$$=\lim_{q\to-\infty}-\operatorname{arctg}q=\frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 存在原函数 $F(x)$，即 $F'(x)=f(x)$，则

$$\int_{a}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{p\to+\infty}\int_{a}^{p}f(x)dx=\lim_{p\to+\infty}F(x)\Big|_{a}^{p}$$

$$=\lim_{p\to+\infty}F(p)-F(a)=F(+\infty)-F(a)$$

$$=F(x)\Big|_{a}^{+\infty},$$

其中符号 $F(+\infty)=\lim\limits_{p\to+\infty}F(p)$.

例 3. 判别无穷积分 $\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}}$ 的敛散性($a>0$).

解 当 $\lambda\neq1$，有

$$\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}}=\frac{1}{1-\lambda}x^{1-\lambda}\Big|_{a}^{+\infty}=\begin{cases}\dfrac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1}, & \lambda>1,\\ +\infty, & \lambda<1.\end{cases}$$

当 $\lambda=1$，有

$$\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_{a}^{+\infty}=+\infty.$$

于是，当 $\lambda>1$ 时，无穷积分 $\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}}$ 收敛，无穷积分(的值)是 $\frac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1}$；当 $\lambda\leqslant1$ 时，无穷积分 $\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}}$ 发散.

例 4. 判别无穷积分 $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^{\lambda}}$ 的敛散性.

解 当 $\lambda\neq1$，有

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^\lambda}=\int_2^{+\infty}\frac{d\ln x}{(\ln x)^\lambda}=\frac{1}{(1-\lambda)(\ln x)^{\lambda-1}}\Bigg|_2^{+\infty}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{(\lambda-1)(\ln 2)^{\lambda-1}}, & \lambda>1,\\ +\infty, & \lambda<1.\end{cases}$$

当 $\lambda=1$，有

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\int_2^{+\infty}\frac{d\ln x}{\ln x}=\ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty}=+\infty.$$

于是，当$\lambda>1$时，无穷积分收敛，无穷积分(的值)是$\dfrac{1}{(\lambda-1)(\ln 2)^{\lambda-1}}$；当 $\lambda\leqslant 1$ 时，无穷积分发散.

在上述四例中，无论是求无穷积分的值还是判别无穷积分的敛散性，都是首先求出被积函数的原函数，然后再取极限. 显然用这种方法只有被积函数存在初等函数的原函数才是可行的. 如果被积函数的原函数不易求出或不是初等函数，上述方法不能使用. 因此，要进一步讨论判别无穷积分敛散性和求无穷积分值的方法.

二、无穷积分与级数

上述三种形式的无穷积分：

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx,\quad \int_{-\infty}^{b}f(x)dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx,$$

它们之间是有联系的. 无穷积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 的敛散性可归结为两个无穷积分

$$\int_{-\infty}^{c}f(x)dx \quad 与 \quad \int_{c}^{+\infty}f(x)dx$$

的敛散性. 对无穷积分$\int_{-\infty}^{b}f(x)dx$进行换元. 设$x=-y$，$dx=-dy$，有

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{q\to-\infty}\int_{q}^{b} f(x)\,dx = \lim_{q\to-\infty}\int_{-q}^{-b} f(-y)\,d(-y)$$

$$= \lim_{q\to-\infty}\int_{-b}^{-q} f(-y)\,dy = \int_{-b}^{+\infty} f(-y)\,dy.$$

于是，无穷积分$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$与$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$都可归结为形如$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$的无穷积分．因此，只须讨论无穷积分$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$的敛散性即可．

现在，将例 3 的无穷积分的敛散性与广义调和级数(§9.1.例5)的敛散性比较如下：

	$\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda}}$
$\lambda>1$	收　　敛	收　　敛
$\lambda\leqslant1$	发　　散	发　　散

我们看到，无穷积分与级数，对$\lambda>1$都收敛，对$\lambda\leqslant1$都发散．这不是偶然的巧合，这是因为无穷积分与级数之间存在着内在联系．

定理 1. 无穷积分$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$收敛$\Longleftrightarrow$对任意数列$\{A_n\}$，$\forall n\in\mathbf{N}$，有$A_n\in[a,+\infty)$，而$A_1=a$，$\lim_{n\to\infty}A_n=+\infty$，级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k}^{A_{k+1}} f(x)\,dx$$

收敛于同一数，且

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k}^{A_{k+1}} f(x)\,dx.$$

证明　必要性　已知无穷积分收敛，即

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_{a}^{A_{n+1}} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}^{A_{k+1}} f(x)\,dx$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k}^{A_{k+1}}f(x)dx.$$

充分性 已知对任意数列$\{A_n\}$，而$A_1=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=+\infty$时，级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int_{A_k}^{A_{k+1}}f(x)dx$收敛于同一个数，即它的部分和数列

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}^{A_{k+1}}f(x)dx\right\}\quad 或\quad \left\{\int_{a}^{A_{n+1}}f(x)dx\right\}$$

收敛于同一个数. 根据§2.4. 海涅极限定理(定理6)，无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，且

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^{A_{n+1}}f(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k}^{A_{k+1}}f(x)dx.\quad \Box$$

由此可见，无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$就相当于级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int_{A_k}^{A_{k+1}}f(x)dx$，定积分$\int_a^{p}f(x)dx$就相当于此级数的部分和$\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{A_k}^{A_{k+1}}f(x)dx$. 因此，一般来说，关于数值级数的性质和敛散性判别法都可相应地转移到无穷积分上来.

三、无穷积分的性质

下面讨论的无穷积分总是假设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$有定义，且$\forall p\in\mathbf{R}$，$p>a$，函数$f(x)$在$[a,p]$可积.

由无穷积分定义，无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛$\Longleftrightarrow$当$p\to+\infty$,时，函数

$$F(p)=\int_a^{p}f(x)dx\quad (a<p)$$

存在极限. 于是，无穷积分也有柯西收敛准则:

定理 2.（柯西收敛准则） 无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0, \exists A>a, \forall p_1>A$ 与 $p_2>A$，有

$$\left|\int_{p_1}^{p_2} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

推论 1. 若无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则 $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_p^{+\infty} f(x)dx=0.$

证明 根据定理 2，$\forall \varepsilon>0, \exists A>a, \forall p>A$ 与 $q>A$，有

$$\left|\int_p^q f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

令 $q\to+\infty$，即 $\lim\limits_{q\to+\infty}\left|\int_p^q f(x)dx\right|\leqslant\varepsilon$ 或 $\left|\int_p^{+\infty} f(x)dx\right|\leqslant\varepsilon.$ □

推论 2. 若无穷积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，则无穷积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

也收敛.

证明 根据定理 2，$\forall \varepsilon>0, \exists A>a, \forall p_1>A$ 与 $p_2>A$，有

$$\left|\int_{p_1}^{p_2}|f(x)|dx\right|<\varepsilon,$$

从而，有

$$\left|\int_{p_1}^{p_2} f(x)dx\right|\leqslant\left|\int_{p_1}^{p_2}|f(x)|dx\right|<\varepsilon,$$

即无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. □

推论 3. 无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛$\Longleftrightarrow\forall b>a$，无穷积分 $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛.

读者自证.

由无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的收敛定义，不难证明下面关于无穷积

分的运算定理(证明从略).

定理 3. 若无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛,则无穷积分 $\int_a^{+\infty} cf(x)dx$ 也收敛,其中 c 是常数,且

$$\int_a^{+\infty} cf(x)dx = c\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

定理 4. 若无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 都收敛,则无穷积分 $\int_a^{+\infty}[f(x)\pm g(x)]dx$ 也收敛,且

$$\int_a^{+\infty}[f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

定理 5. 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 存在连续导数,极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)$ 存在,且无穷积分 $\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx$ 收敛,则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx$ 也收敛,有

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx = \lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx$$

或

$$\int_a^{+\infty} f(x)dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} g(x)df(x).$$

这是无穷积分的分部积分公式.

定理 6. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 连续,无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛,且函数 $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta)$ ①严格增加②,存在连续导数,而 $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta-0)=+\infty$,则

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

---

① β 可是有限数,也可是 $+\infty$.

② 也可是"严格减少",此时积分限要作相应的变化. 见例 6.

这是无穷积分的换元公式.

例 5. 求无穷积分 $K=\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x dx$.

解 根据定理 5, 有

$$K=\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x dx=\int_0^{+\infty}e^{-x}d(-\cos x)$$

$$=-e^{-x}\cos x\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos x dx=1-\int_0^{+\infty}e^{-x}d\sin x$$

$$=1-\left(e^{-x}\sin x\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x dx\right)=1-K.$$

有 $2K=1$ 或 $K=\frac{1}{2}$, 即

$$K=\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x dx=\frac{1}{2}.$$

例 6. 求无穷积分 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$.

解 设 $\frac{1}{x}=t$, $dt=-\frac{1}{x^2}dx$. 根据定理 6, 有

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t dt$$

$$=-\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

四、无穷积分的敛散性判别法

无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 的敛散性判别法, 一般可仿照数值级数的敛散性判别法平行地写出来, 并予以证明. 理应先讨论与正项级数平行的正值函数 $f(x)\geqslant 0(x\in[a,+\infty))$ 的无穷积分, 后讨论与变号级数平行的一般函数 $f(x)$ 的无穷积分. 为了节省篇幅, 本段只给出几个常用的无穷积分的敛散性判别法.

定理 7. 设 $\forall x\in[a,+\infty)$，有

$$|f(x)|\leqslant c\varphi(x),\quad c\text{ 是正常数}. \tag{2}$$

1) 若无穷积分 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 收敛，则无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛；

2) 若无穷积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 发散，则无穷积分 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 也发散.

证明 1) 根据定理 2，$\forall\varepsilon>0,\exists A>a,\forall p_1>A$ 与 $p_2>A$，有

$$\left|\int_{p_1}^{p_2}\varphi(x)dx\right|<\varepsilon.$$

由不等式(2)，有

$$\left|\int_{p_1}^{p_2}|f(x)|dx\right|\leqslant c\left|\int_{p_1}^{p_2}\varphi(x)dx\right|<c\varepsilon,$$

即无穷积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛. 根据定理 2 的推论 2，无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

2) 用反证法. 假设无穷积分 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 收敛，根据 1)，则无穷积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 也收敛，与已知条件矛盾. □

推论 设 $\forall x\in[a,+\infty)$，函数 $f(x)\geqslant0,a>0$，且极限

$$\lim_{x\to+\infty}x^\lambda f(x)=d\qquad(0\leqslant d\leqslant+\infty). \tag{3}$$

1) 若 $\lambda>1,0\leqslant d<+\infty$，则无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

2) 若 $\lambda\leqslant1,0<d\leqslant+\infty$，则无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散.

证明 1) 由(3)式，$\forall\varepsilon>0,\exists A>0,\forall x>A$，有

$$|x^\lambda f(x)-d|<\varepsilon\quad\text{或}\quad d-\varepsilon<x^\lambda f(x)<d+\varepsilon,$$

即 $$(d-\varepsilon)\frac{1}{x^\lambda}<f(x)<(d+\varepsilon)\frac{1}{x^\lambda}.$$

由例 3 知，当 $\lambda>1$ 时，无穷积分$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}$收敛. 根据定理 7，则无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛.

2) 当 $0<d<+\infty$ 时，由(3)式，取 $0<\varepsilon<d$，$\exists A>0, \forall x>A$，有

$$(d-\varepsilon)\frac{1}{x^\lambda}<f(x) \quad 或 \quad \frac{1}{x^\lambda}<\frac{1}{d-\varepsilon}f(x),$$

已知 $\lambda\leqslant 1$，无穷积分$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}$发散，由定理 7，则无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散.

当 $d=+\infty$ 时，由(3)式，取 $B>0$，$\exists A>0, \forall x>A$，有

$$x^\lambda f(x)>B \quad 或 \quad f(x)>B\cdot\frac{1}{x^\lambda},$$

已知 $\lambda\leqslant 1$，无穷积分 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}$发散，根据定理7，则无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散. □

应用上述推论判别某些无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 的敛散性比较简便. 应用这个推论要求从观察中找出合适的 λ，使(3)式的极限存在(找 λ 需要应用已经学过的无穷小阶的比较)，然后再由数 λ 确定无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$的敛散性.

例 7. 判别无穷积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ 的敛散性.

解 已知 $\forall x\geqslant 1$，有

$$0<e^{-x^2}\leqslant e^{-x}.$$

由例1知，无穷积分 $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ 收敛．根据定理7，无穷积分 $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ 收敛．再根据定理2的推论3，无穷积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ 也收敛．

例8． 判别无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$ 的敛散性．

解 已知极限

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+x+1}}=1,$$

其中 $\lambda=\frac{2}{3}<1$，则无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$ 发散．

例9． 判别无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x\sqrt{x+1}}dx$ 的敛散性．

解 已知 $\forall x\in[1,+\infty)$，有

$$\left|\frac{\cos x}{x\sqrt{x+1}}\right|\leqslant\frac{1}{x\sqrt{x+1}}.$$

又

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\frac{1}{x\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x+1}}=1,$$

其中 $\lambda=\frac{3}{2}>1$，则无穷积分 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x\sqrt{x+1}}\right|dx$ 收敛．根据定理2的推论2，无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x\sqrt{x+1}}dx$ 也收敛．

例10． 判别无穷积分 $\int_1^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ 的敛散性（α 是参数）．

解 已知 $\forall\alpha\in R$，有极限

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot x^{\alpha-1}e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha+1}}{e^x}=0.$$

其中 $\lambda=2>1$，$d=0$，则 $\forall\alpha\in R$，无穷积分 $\int_1^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ 都收敛．

下面讨论与变号级数对应的无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 的收敛判别法. 当 $x\to+\infty$ 时,函数 $f(x)$的函数值有的是正,有的是负,交错出现.

定义 若无穷积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛,则称无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ **绝对收敛**.

定理 2 的推论 2 指出,若无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$绝对收敛,则无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$必收敛.

定义 若无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛,而$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 发散,则称无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$**条件收敛**.

应用定理 7 或其推论只能判别无穷积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx,$$

的绝对收敛性,而不能判别无穷积分的条件收敛性. 判别无穷积分条件收敛有下面的定理:

定理 8. 若函数 $f(x)$在$[a,+\infty)$连续($a>0$),且函数

$$F(x)=\int_a^x f(u)du$$

在$[a,+\infty)$有界,即 $\exists C>0$, $\forall x\in[a,+\infty)$,有

$$|F(x)|=\left|\int_a^x f(u)du\right|\leqslant C,$$

则当 $\lambda>0$ 时,无穷积分$\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x^{\lambda}}dx$收敛.

证明 已知函数 $f(x)$在$[a,+\infty)$连续,且 $F(x)=\int_a^x f(u)du$. 根据 §8.4 定理 1, $\forall x\in[a,+\infty)$,有

$$dF(x)=f(x)dx,$$

且 $F(a)=0$. 由分部积分法，$\forall p>a$，有

$$\begin{aligned}\int_a^p \frac{f(x)}{x^\lambda}dx &= \int_a^p \frac{1}{x^\lambda}\,dF(x)=\frac{F(x)}{x^\lambda}\Big|_a^p+\lambda\int_a^p \frac{F(x)}{x^{\lambda+1}}dx\\ &=\frac{F(p)}{p^\lambda}-\frac{F(a)}{a^\lambda}+\lambda\int_a^p \frac{F(x)}{x^{\lambda+1}}dx\\ &=\frac{F(p)}{p^\lambda}+\lambda\int_a^p \frac{F(x)}{x^{\lambda+1}}dx.\end{aligned}$$

因为 $\forall p>a$，有 $|F(p)|\leqslant C$，且 $\lambda>0$，所以 $\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{F(p)}{p^\lambda}=0$. 又 $\forall x\in[a,+\infty)$，有

$$\left|\frac{F(x)}{x^{\lambda+1}}\right|\leqslant\frac{C}{x^{\lambda+1}}.$$

而无穷积分 $\int_a^{+\infty}\frac{C}{x^{\lambda+1}}dx$ 收敛（已知 $\lambda>0$，从而 $\lambda+1>1$）. 根据定理 7，无穷积分 $\int_a^{+\infty}\frac{F(x)}{x^{\lambda+1}}dx$ 收敛，有

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^p \frac{f(x)}{x^\lambda}dx=\lim_{p\to+\infty}\frac{F(p)}{p^\lambda}+\lim_{p\to+\infty}\lambda\int_a^p \frac{F(x)}{x^{\lambda+1}}dx$$

或

$$\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x^\lambda}dx=\lambda\int_a^{+\infty}\frac{F(x)}{x^{\lambda+1}}dx,$$

即无穷积分 $\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x^\lambda}dx$ 收敛. □

例 11. 证明：无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 条件收敛.

证明 在 $x=0$，被积函数 $\frac{\sin x}{x}$ 没有定义. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，将函数 $\frac{\sin x}{x}$ 在 0 作连续开拓，当 $x=0$ 时，令 $\frac{\sin x}{x}=1$. 于是，被积函数 $\frac{\sin x}{x}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 连续.

首先，证明无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$收敛.

已知函数 $f(x)=\sin x$ 在区间$[1, +\infty)$连续，$\forall p>1$，有

$$\left|\int_1^p \sin x dx\right| = |\cos 1-\cos p|\leqslant 2.$$

根据定理 8，无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$收敛($\lambda=1>0$). 从而，无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$也收敛.

其次，证明无穷积分$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$发散.

已知 $\forall x\geqslant 1$，有$|\sin x|\geqslant \sin^2 x$，从而

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1-\cos 2x}{2x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x}.$$

有
$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\geqslant\int_1^{+\infty}\frac{dx}{2x}-\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}dx.$$

上式右端无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}dx$ 收敛（证法与证明无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛相同，从略），而无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{2x}$ 发散. 根据定理7，无穷积分$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$发散. 从而，无穷积分$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$也发散. 于是，无穷积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$条件收敛.

例 12. 讨论无穷积分 $\int_0^{+\infty}\sin x^2 dx$ 与 $\int_0^{+\infty}\cos x^2 dx$ 的敛散性.

解 设 $x^2=y$，$dx=\frac{dy}{2\sqrt{y}}$，有

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2 dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy.$$

已知函数 $\sin y$ 在$[1, +\infty)$连续，$\forall p>1$，有

有

$$\left|\int_1^u \sin y\,dy\right| \leqslant 2.$$

根据定理 8，无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy$ 收敛$\left(\lambda=\frac{1}{2}>0,\text{且条件收敛}\right)$，即无穷积分$\int_0^{+\infty}\sin x^2dx$ 收敛（条件收敛）.

同法可证，无穷积分$\int_0^{+\infty}\cos x^2dx$ 也收敛（条件收敛）.

注 已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的必要条件是 $a_n\to 0(n\to\infty)$. 但是，无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛不一定有 $f(x)\to 0(x\to+\infty)$. 如例 12，当 $x\to+\infty$ 时，被积函数$\sin x^2$不存在极限.

练 习 题 12.1

1. 求下列无穷积分：

(1) $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\quad(a>0)$，　　(2) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}$，

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^4}dx$，　　(4) $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$，

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|x|}dx\quad(a>0)$，　　(6) $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx dx\quad(a>0)$.

2. 判别下列无穷积分的敛散性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4-x^2+1}dx$，　　(2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3+1}}$，

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$，　　(4) $\int_1^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx\quad(n>0,m>0)$.

(5) $\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}dx$，　　(6) $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}dx$，

(7) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{e^x}}$，　　(8) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{e^x+e^{-x}}dx$.

3. 证明：若函数 $f(x)$在$[1,+\infty)$单调减少，且当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to 0$，

则无穷积分$\int_1^{+\infty}f(x)dx$与级数$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$同时收敛或同时发散.

4. 证明定理4与定理5.

5. 证明：若无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，而函数$\varphi(x)$在$[a, +\infty)$单调有界，则无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)\varphi(x)dx$收敛.

6. 证明：若无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$绝对收敛，$\varphi(x)$在区间$[a, +\infty)$是有界连续函数，则无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)\varphi(x)dx$绝对收敛.

7. 证明：$0<\lambda<1$，无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\lambda}dx$与$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\lambda}dx$都是条件收敛.

8. 若无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，则有$f(x)\to 0\ (x\to+\infty)$是否成立？反之，是否成立？

*　　*　　*　　*

9. 证明：若无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，函数$f(x)$在$[a, +\infty)$单调，则$f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)$.$\left(\text{提示：考虑积分}\int_{\frac{x}{2}}^{x}f(t)dt\right)$

10. 证明：若函数$f(x)$在$[0, +\infty)$一致连续，且无穷积分$\int_0^{+\infty}f(x)dx$收敛，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

11. 证明：若函数$f(x)$在$[a, +\infty)$有连续的导函数$f'(x)$，且无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$与$\int_a^{+\infty}f'(x)dx$都收敛，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

12. 设函数$f(x)$在$[a, +\infty)$可导，且单调减少；$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 证明：$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛$\Longleftrightarrow\int_a^{+\infty}xf'(x)dx$收敛.

§12.2. 瑕　积　分

一、瑕积分收敛与发散概念

本节讨论无界函数的广义积分，即瑕积分. 若函数$f(x)$在点

b 的任意邻域无界，则称 b 是函数 $f(x)$ 的瑕点．例如：

a 是函数 $f(x)=\frac{1}{x-a}$ 的瑕点．

-1 与 1 都是函数 $g(x)=\ln(1-x^2)$ 的瑕点．

$k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 都是函数 $h(x)=\frac{1}{\sin x}$ 的瑕点．

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$（$(a,b]$ 或 $[a,c)\cup(c,b]$）有定义，b（a 或 c）是函数 $f(x)$ 的瑕点．符号

$$\int_a^b f(x)dx$$

称为函数 $f(x)$ 的**瑕积分**．

设 b 是函数 $f(x)$ 的瑕点．$\forall\eta:0<\eta<b-a$，函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b-\eta]$ 可积．若极限

$$\lim_{\eta\to0}\int_a^{b-\eta}f(x)dx$$

存在（不存在），则称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ **收敛（发散）**，其极限称为瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$（**的值**），即

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\eta\to0}\int_a^{b-\eta}f(x)dx.$$

设 a 是函数 $f(x)$ 的瑕点．$\forall\eta:0<\eta<b-a$，函数 $f(x)$ 在区间 $[a+\eta,b]$ 可积．若极限

$$\lim_{\eta\to0}\int_{a+\eta}^{b}f(x)dx$$

存在（不存在），则称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ **收敛（发散）**，其极限称为瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$（**的值**）即

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\eta\to0}\int_{a+\eta}^{b}f(x)dx.$$

设 $c(a<c<b)$ 是函数 $f(x)$ 的瑕点. 若两个瑕积分

$$\int_a^c f(x)dx \quad 与 \quad \int_c^b f(x)dx$$

都收敛(至少有一个发散),则称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ **收敛(发散)**, 且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

例 1. 求下列瑕积分①:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad 与 \quad \int_0^1 \ln x dx.$$

解 $x=1$ 是被积函数 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的瑕点. 有

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta\to 0}\int_0^{1-\eta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta\to 0} \arcsin x\Big|_0^{1-\eta}$$

$$= \lim_{\eta\to 0} \arcsin(1-\eta) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

$x=0$ 是被积函数 $\ln x$ 的瑕点. 有

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\eta\to 0}\int_\eta^1 \ln x dx = \lim_{\eta\to 0}(x\ln x - x)\Big|_\eta^1$$

$$= \lim_{\eta\to 0}(-1-\eta\ln\eta+\eta)^{②} = -1.$$

例 2. 判别瑕积分 $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$ 的敛散性.

解 $x=1$ 是被积函数 $\frac{1}{x\ln x}$ 的瑕点. 有

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\eta\to 0}\int_{1+\eta}^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\eta\to 0}\ln(\ln x)\Big|_{1+\eta}^2$$

---

① "求瑕积分"就是求瑕积分的值,下同.

② $\lim_{\eta\to 0}\eta\ln\eta = \lim_{\eta\to 0}\frac{\ln\eta}{\frac{1}{\eta}} = \lim_{\eta\to 0}\frac{\frac{1}{\eta}}{-\frac{1}{\eta^2}} = \lim_{\eta\to 0}(-\eta) = 0.$

$$=\lim_{\eta\to 0}\{\ln(\ln 2)-\ln[\ln(1+\eta)]\}=+\infty,$$

即瑕积分$\int_1^2\frac{dx}{x\ln x}$发散.

例 3. 判别瑕积分$\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^\lambda}$的敛散性($a<b$).

解 当$\lambda>0$时，a是被积函数$\frac{1}{(x-a)^\lambda}$的瑕点.

当$\lambda\neq 1$, 有 ($0<\eta<b-a$)

$$\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^\lambda}=\lim_{\eta\to 0}\int_{a+\eta}^b\frac{dx}{(x-a)^\lambda}=\lim_{\eta\to 0}\frac{(x-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}\Big|_{a+\eta}^b$$

$$=\lim_{\eta\to 0}\frac{(b-a)^{1-\lambda}-\eta^{1-\lambda}}{1-\lambda}=\begin{cases}\frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}, & \lambda<1,\\ +\infty, & \lambda>1.\end{cases}$$

当$\lambda=1$, 有 ($0<\eta<b-a$)

$$\int_a^b\frac{dx}{x-a}=\lim_{\eta\to 0}\int_{a+\eta}^b\frac{dx}{x-a}=\lim_{\eta\to 0}\ln(x-a)\Big|_{a+\eta}^b$$

$$=\lim_{\eta\to 0}[\ln(b-a)-\ln\eta]=+\infty.$$

于是，当$\lambda<1$时，瑕积分$\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^\lambda}$收敛，其瑕积分（的值）是$\frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}$；当$\lambda\geqslant 1$时，瑕积分$\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^\lambda}$发散.

例 4. 判别瑕积分$\int_{-1}^8\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$的敛散性.

解 $x=0\in(-1,8)$是被积函数$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$的瑕点. 下面讨论两个瑕积分

$$\int_{-1}^0\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \quad 与 \quad \int_0^8\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

的敛散性. 有

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\eta\to 0}\int_{-1}^{-\eta}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\eta\to 0}\frac{3}{2}(\eta^{\frac{2}{3}}-1)=-\frac{3}{2}.$$

$$\int_{0}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\eta\to 0}\int_{\eta}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\eta\to 0}\frac{3}{2}(4-\eta^{\frac{2}{3}})=6.$$

于是，瑕积分$\int_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$收敛，且.

$$\int_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}+\int_{0}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=-\frac{3}{2}+6=\frac{9}{2}.$$

由例 4 可知，讨论区间上有有限个瑕点的瑕积分的敛散性，总可将它归结为讨论若干个而每个小区间只有一个端点是瑕点的瑕积分的敛散性.

二、瑕积分的敛散性判别法

讨论区间的右端点是瑕点或左端点是瑕点的瑕积分的敛散性，其方法完全相同. 因此，下面只讨论区间的左端点是瑕点的瑕积分.

无穷积分与瑕积分之间有密切联系. 例如，区间$(a,b]$的左端点 a 是被积函数 $f(x)$的瑕点的瑕积分

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\eta\to 0^+}\int_{a+\eta}^{b}f(x)dx.\quad(0<\eta<b-a)\tag{1}$$

换元，设 $x=a+\frac{1}{y}$，$dx=-\frac{1}{y^2}dy$，等式(1)等号右端的积分

$$\lim_{\eta\to 0^+}\int_{a+\eta}^{b}f(x)dx=\lim_{\eta\to 0^+}\int_{\frac{1}{\eta}}^{\frac{1}{b-a}}f\left(a+\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy$$

$$=\lim_{\eta\to 0^+}\int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\eta}}f\left(a+\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}dy=\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty}\varphi(y)dy,$$

其中 $\varphi(y)=f\left(a+\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}$，即

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty}\varphi(y)dy.$$

由此可见，瑕积分经过适当的换元可化为无穷积分，反之亦然(特殊情况可能是定积分)．于是，关于无穷积分的性质及其敛散性判别法都可相应地转移到瑕积分上来．这里只给出几个重要结果，不予证明．

定理 1．(柯西收敛准则) 瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛 (a 是瑕点) $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0(\delta<b-a), \forall x_1\in(a,a+\delta)$ 与 $x_2\in(a,a+\delta)$，有

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

定理 2． 若瑕积分 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛 (a 是瑕点)，则瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 也收敛．

定理 3． 设 $\forall x\in(a,b]$，有

$$|f(x)|\leqslant c\varphi(x),\quad c \text{ 是正常数}.$$

1) 若瑕积分 $\int_a^b \varphi(x)dx$ 收敛(a 是瑕点)，则瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 也收敛．

2) 若瑕积分 $\int_a^b |f(x)|dx$ 发散(a 是瑕点)，则瑕积分 $\int_a^b \varphi(x)dx$ 也发散．

其证明应用定理 1，其证法类似 § 12.1 定理 7 的证明．

推论 设 $\forall x\in(a,b]$，函数 $f(x)\geqslant 0$，a 是瑕点，且极限

$$\lim_{x\to 0^+}(x-a)^\lambda f(x)=d\quad(0\leqslant d\leqslant+\infty).$$

1) 若 $\lambda<1, 0\leqslant d<+\infty$，则瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛．

2) 若 $\lambda\geqslant 1, 0<d\leqslant+\infty$，则瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散．

定义 若瑕积分$\int_a^b|f(x)|dx$收敛，则称瑕积分$\int_a^b f(x)dx$**绝对收敛**. 若瑕积分$\int_a^b f(x)dx$收敛，而瑕积分$\int_a^b|f(x)|dx$发散，则称瑕积分$\int_a^b f(x)dx$**条件收敛**.

定理4. 若函数$f(x)$在$(a,\ b]$连续（a是瑕点），且$F(x)=\int_x^b f(t)dt$在$(a,b]$有界，即$\exists C>0, \forall x\in(a,b]$，有

$$|F(x)|=\left|\int_x^b f(t)dt\right|\leqslant C,$$

则当$\lambda>0$时，瑕积分$\int_a^b(x-a)^\lambda f(x)dx$收敛.

证法与§12.1定理8的证法相同，从略

例5. 判别下列瑕积分的敛散性:

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{\sin x}},\quad \int_0^1\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}dx,\quad \int_1^2\frac{dx}{\ln x}.$$

解 $x=0$是被积函数$\frac{1}{\sqrt{\sin x}}$的瑕点，有

$$\lim_{x\to0^+}x^{\frac12}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}=\lim_{x\to0^+}\sqrt{\frac{x}{\sin x}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\frac{\sin x}{x}}}=1.$$

根据定理3的推论，$\lambda=\frac12<1$，则瑕积分$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$收敛.

$x=1$是被积函数$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}$的瑕点，有

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)^{\frac12}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}=\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}=\frac12.$$

根据定理3的推论，$\lambda=\frac12<1$，则瑕积分$\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}dx$收敛.

$x=1$ 是被积函数 $\frac{1}{\ln x}$ 的瑕点，有

$$\lim_{x\to1^+}(x-1)\frac{1}{\ln x}=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{\ln x}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{\frac{1}{x}}=1.$$

根据定理 3 的推论，$\lambda=1$，瑕积分 $\int_1^2\frac{dx}{\ln x}$ 发散.

例 6. 判别瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx$ 的敛散性.

解 $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，有 $\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}<0$，且 $x=0$ 是被积函数 $\frac{\ln\sin}{\sqrt{x}}$ 的瑕点，取 $0<\alpha<\frac{1}{2}$，有

$$\lim_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}+\alpha}\left|\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\right|=\lim_{x\to0^+}\frac{-\ln\sin x}{x^{-\alpha}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{\alpha x^{-\alpha-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^\alpha}{\alpha}\cdot\frac{x}{\sin x}\cos x=0.$$

根据定理 3 的推论，$\lambda=\frac{1}{2}+\alpha<1\quad(d=0)$，则瑕积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\right|dx$$

收敛，根据定理 2，瑕积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx$$

也收敛.

例 7. 求函数 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ 的定义域.

解 将无穷积分改写为

$$\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\int_0^1x^{\alpha-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx. \qquad (2)$$

等式(2)等号右端第一个积分，当 $\alpha<1$ 时①，$x=0$ 是被积函数 $x^{\alpha-1}e^{-x}$ 的瑕点，有

$$\lim_{x\to0^+} x^{1-\alpha}\cdot x^{\alpha-1}e^{-x}=\lim_{x\to0^+} e^{-x}=1.$$

根据定理 3 的推论，当 $\lambda=1-\alpha<1$，即 $\alpha>0$，瑕积分 $\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ 收敛.

等式(2) 等号右端第二个积分是无穷积分. 由 §12.1 例 10，$\forall\alpha\in\mathbb{R}$，无穷积分 $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ 都收敛.

使等式 (2) 等号右端两个广义积分同时收敛的 α 的公共部分是 $\alpha>0$. 于是，函数 $\Gamma(\alpha)$ 的定义域是区间 $(0,+\infty)$.

例 8. 求二元函数 $B(p,\ q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 的定义域.

解 将积分改写为

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

当 $p<1$ 时，$x=0$ 是被积函数 $x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ 的瑕点，有

$$\lim_{x\to0^+} x^{1-p}\cdot x^{p-1}(1-x)^{q-1}=\lim_{x\to0^+}(1-x)^{q-1}=1.$$

当 $\lambda=1-p<1$，即 $p>0$，瑕积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 收敛.

当 $q<1$ 时，$x=1$ 是被积函数 $x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ 的瑕点，有

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)^{1-q}\cdot x^{p-1}(1-x)^{q-1}=\lim_{x\to1^-} x^{p-1}=1.$$

当 $\lambda=1-q<1$，即 $q>0$，瑕积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 收敛.

---

① 当 $\alpha\geq1$ 时，$\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ 是定积分.

使两个瑕积分$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$与$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$同时收敛的是$p>0$与$q>0$. 于是，二元函数$B(p,q)$的定义域是区域$D=\{(p,q)\mid p>0,q>0\}$.

练 习 题 12.2

1. 求下列瑕积分：

(1) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,　　(2) $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$,

(3) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$,　　(4) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

（提示：设 $x=a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi$.）

2. 判别下列瑕积分的敛散性：

(1) $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$,　　(2) $\int_0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$,

(3) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$,　　(4) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}$,

$(k^2<1)$　　$\left(\text{提示：}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=2.\right)$

(5) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}$,　　(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\sin\theta}}$,

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$.

3. 给出定理 3 及其推论的证明.

4. 给出定理 2 和定理 4 的证明.

*　　*　　*　　*

5. 证明：若瑕积分$\int_0^1 f(x)dx$收敛，且当$x\to 0^+$时函数$f(x)$单调趋向于$+\infty$，则$\lim\limits_{x\to 0^+} xf(x)=0$. （提示：用柯西收敛准则）

6. 证明：瑕积分$\int_0^1 \frac{dx}{[x(1-\cos x)]^\lambda}$ $(\lambda>0)$当$\lambda<\frac{1}{3}$时收敛；当$\lambda\geqslant\frac{1}{3}$时

发散.

7. 设点 $c\in(a,b)$ 是函数 $f(x)$ 的瑕点，$\forall\eta>0$，积分

$$\int_a^{c-\eta} f(x)dx \text{ 与 } \int_{c+\eta}^b f(x)dx \qquad (a<c-\eta, c+\eta<b).$$

存在(注意，$c-\eta$ 与 $c+\eta$ 是同一个 η). 若极限

$$\lim_{\eta\to 0}\left[\int_a^{c-\eta} f(x)dx+\int_{c+\eta}^b f(x)dx\right]$$

存在，称此极限是积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的**柯西主值**，表为

$$\text{V. P.}\int_a^b f(x)dx=\lim_{\eta\to 0}\left[\int_a^{c-\eta} f(x)dx+\int_{c+\eta}^b f(x)dx\right].$$

同样，函数 $f(x)$ 在无限区间 $(-\infty,+\infty)$ 积分的柯西主值是

$$\text{V. P.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx.$$

求下列积分的柯西主值:

(1) $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x}$, (2) $\int_0^3\frac{dx}{1-x}$, (3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x dx$,

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{arctg} x dx$.

8. 证明: 若无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=A$(常数)，则积分主值 $\text{V. P.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=A$. 但反之不成立.

§12.3. 含参变量的积分

一、含参变量的有限积分

设二元函数 $f(x,u)$ 在矩形域 $R(a\leqslant x\leqslant b, \alpha\leqslant u\leqslant\beta)$ 有定义，$\forall u\in[\alpha,\beta]$，一元函数 $f(x,u)$ 在 $[a,b]$ 可积，即积分

$$\int_a^b f(x,u)dx$$

存在. $\forall u\in[\alpha,\beta]$ 都对应唯一一个确定的积分(值) $\int_a^b f(x,u)dx$.

于是，积分 $\int_a^b f(x,u)dx$ 是定义在区间 $[\alpha,\beta]$ 的函数，表为

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\,dx,\quad u\in[\alpha,\beta],$$

称为含参变量的有限积分，u **称为参变量**.

下面讨论函数 $\varphi(u)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 的分析性质，即连续性、可微性与可积性.

定理1. 若函数 $f(x,u)$ 在矩形域 $R(a\leqslant x\leqslant b,\ \alpha\leqslant u\leqslant\beta)$ 连续，则函数 $\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\,dx$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 也连续.

证明 $\forall u\in[\alpha,\beta]$，取 Δu，使 $u+\Delta u\in[\alpha,\beta]$，有

$$\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)=\int_a^b[f(x,u+\Delta u)-f(x,u)]\,dx.$$

$$|\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)|\leqslant\int_a^b|f(x,u+\Delta u)-f(x,u)|\,dx.$$

根据§10.2定理8，函数 $f(x,u)$ 在闭矩形域 R 一致连续，即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$：$|x_1-x_2|<\delta,|y_1-y_2|<\delta$，有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon.$$

特别是，$\forall(x,u),(x,u+\Delta u)\in R$：$|\Delta u|<\delta$，有

$$|f(x,u+\Delta u)-f(x,u)|<\varepsilon.$$

于是，$|\Delta u|<\delta$，有

$$|\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)|\leqslant\int_a^b|f(x,u+\Delta u)-f(x,u)|\,dx<\varepsilon(b-a),$$

即函数 $\varphi(u)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 连续. □

设 $u_0\in[\alpha,\beta]$，由连续定义，有

$$\lim_{u\to u_0}\int_a^b f(x,u)\,dx=\lim_{u\to u_0}\varphi(u)=\varphi(u_0)$$

$$=\int_a^b f(x,u_0)\,dx=\int_a^b\lim_{u\to u_0}f(x,u)\,dx.$$

由此可见，函数 $f(x,u)$ 满足定理1的条件，积分与极限可以

交换次序.

定理 2. 若函数 $f(x,u)$ 与 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 在矩形域 $R(a\leqslant x\leqslant b,\ \alpha\leqslant u\leqslant\beta)$ 连续，则函数 $\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\,dx$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 可导，且 $\forall u\in[\alpha,\beta]$，有

$$\frac{d}{du}\varphi(u)=\int_a^b\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx$$

或
$$\frac{d}{du}\int_a^b f(x,u)\,dx=\int_a^b\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx.$$

简称积分号下可微分.

证明 $\forall u\in[\alpha,\beta]$，取 Δu，使 $u+\Delta u\in[\alpha,\beta]$，有

$$\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)=\int_a^b[f(x,u+\Delta u)-f(x,u)]dx.\quad(1)$$

已知 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 在 R 存在，根据微分中值定理，有

$$f(x,u+\Delta u)-f(x,u)=f'_u(x,u+\theta\Delta u)\Delta u,\quad 0<\theta<1.$$

将它代入(1)式，等号两端除以 Δu，有

$$\frac{\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)}{\Delta u}=\int_a^b f'_u(x,u+\theta\Delta u)dx,\quad 0<\theta<1.$$

在上面等式等号两端减去 $\int_a^b f'_u(x,u)\,dx$，有

$$\left|\frac{\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)}{\Delta u}-\int_a^b f'_u(x,u)\,dx\right|$$

$$\leqslant\int_a^b|f'_u(x,u+\theta\Delta u)-f'_u(x,u)|\,dx.$$

根据§10.2定理8，函数 $f'_u(x,u)$ 在闭矩形域 R 一致连续，即 $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall(x,u),(x,u+\Delta u)\in R$：$|\Delta u|<\delta$，有

$$|f'_u(x,u+\theta\Delta u)-f'_u(x,u)|<\varepsilon.$$

从而，有

$$\left|\frac{\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)}{\Delta u}-\int_a^b f'_u(x,u)\,dx\right|\leqslant \varepsilon(b-a),$$

即
$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)}{\Delta u}=\int_a^b f'_u(x,u)\,dx$$

或
$$\frac{d}{du}\varphi(u)=\int_a^b\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx.\qquad \Box$$

定理 2 指出，当函数$f(x,u)$满足定理2的条件时，导数与积分可以交换次序.

定理 3. 若函数 $f(x,u)$ 在矩形域 $R(a\leqslant x\leqslant b,\alpha\leqslant u\leqslant\beta)$ 连续，则函数 $\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\,dx$ 在区间$[\alpha,\beta]$可积，且

$$\int_\alpha^\beta\left\{\int_a^b f(x,u)\,dx\right\}du=\int_a^b\left\{\int_\alpha^\beta f(x,u)\,du\right\}dx. \tag{2}$$

简称积分号下可积分.

证明 根据定理 1，函数 $\varphi(u)$在$[\alpha,\beta]$ 连续，则函数 $\varphi(u)$在区间$[\alpha,\beta]$可积. 下面证明等式(2)成立. $\forall t\in[\alpha,\beta]$，设

$$L_1(t)=\int_\alpha^t\left\{\int_a^b f(x,u)\,dx\right\}du.\quad L_2(t)=\int_a^b\left\{\int_\alpha^t f(x,u)\,du\right\}dx.$$

根据 §8.4 定理 1，有

$$L'_1(t)=\int_a^b f(x,t)\,dx.$$

已知$\int_\alpha^t f(x,u)\,du$ 与 $\frac{\partial}{\partial t}\int_\alpha^t f(x,u)\,du$ 在R都连续，根据定理 2，有

$$\begin{aligned}L'_2(t)&=\frac{d}{dt}\int_a^b\left\{\int_\alpha^t f(x,u)\,du\right\}dx\\&=\int_a^b\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_\alpha^t f(x,u)\,du\right\}dx=\int_a^b f(x,t)\,dx.\end{aligned}$$

于是，$\forall t\in[\alpha,\beta]$，有 $L'_1(t)=L'_2(t)$. 由 §6.1 例 1，$L_1(t)-L_2(t)=C$，其中 C 是常数. 特别是，当 $t=\alpha$ 时，$L_1(\alpha)=L_2(\alpha)=0$，则 $C=0$，即 $L_1(t)=L_2(t)$. 特别是，当 $t=\beta$ 时，有 $L_1(\beta)=L_2(\beta)$，即

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\int_{a}^{b} f(x, u) dx\right\} du=\int_{a}^{b}\left\{\int_{\alpha}^{\beta} f(x, u) du\right\} dx. \qquad \square$$

定理 3 指出，函数 $f(x,u)$ 满足定理3的条件，关于不同变量的积分可以交换次序.

以上所讲的含参变量的有限积分，只是被积函数含有参变量. 一般情况，除被积函数含有参变量外，积分的上、下限也含有参变量，即 $a=a(u)$, $b=b(u)$. 不难看到，$\forall u\in[\alpha,\beta]$，对应唯一一个积分(值) $\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)dx$，它仍是区间$[\alpha,\beta]$的函数，设

$$\psi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x, u) dx, \quad u\in[\alpha, \beta].$$

这里只给出函数 $\psi(u)$ 在区间$[\alpha,\beta]$的可微性.

定理 4. 若函数 $f(x,u)$ 与$\frac{\partial f}{\partial u}$在矩形域 $R(a\leqslant x\leqslant b,\ \alpha\leqslant u\leqslant\beta)$ 连续，而函数 $a(u)$ 与 $b(u)$ 在区间$[\alpha,\beta]$可导，$\forall u\in[\alpha,\beta]$，有

$$a\leqslant a(u)\leqslant b, \quad a\leqslant b(u)\leqslant b,$$

则函数 $\psi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)dx$ 在区间$[\alpha,\beta]$可导，且

$$\frac{d}{du}\psi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx+f[b(u), u] b'(u) - f[a(u), u] a'(u).$$

证明 $\forall u\in[\alpha,\beta]$，设 $y=a(u)$，$z=b(u)$与

$$\int_{y}^{z} f(x, u) dx=F(y, z, u).$$

有
$$\psi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x, u) dx=F[a(u), b(u), u].$$

已知$\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{\partial F}{\partial u}$都是连续函数①. 由 § 10.3 定理 2与定理4，函数

① $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int_{y}^{z} f(x,u)dx=-f(y,u)$. 因为 $f(y,u)$是连续函数，所以$\frac{\partial F}{\partial y}$也是连续函数，同理，$\frac{\partial F}{\partial z}$也是连续函数. 根据定理 2，$\frac{\partial F}{\partial u}$也是连续函数.

$F(y,z,u)$关于变量 u 可导，有

$$\psi'(u)=\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{du}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{du},$$

其中
$$\frac{\partial F}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\int_y^z f(x,u)\,dx=\int_y^z\frac{\partial}{\partial u}f(x,u)\,dx,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int_y^z f(x,u)\,dx=-f(y,u),$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\int_y^z f(x,u)\,dx=f(z,u).$$

于是，

$$\psi'(u)=\int_y^z\frac{\partial}{\partial u}f(x,u)\,dx-f(y,u)\cdot y'+f(z,u)z'.$$

将 $y=a(u)$ 与 $z=b(u)$ 代入上式，有

$$\frac{d}{du}\psi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx+f[b(u),u]b'(u)-f[a(u),u]a'(u).\quad\square$$

显然，当 $a(u)$ 与 $b(u)$ 是常数时，$a'(u)=b'(u)=0$，定理 4 的特殊情况就是定理 2.

二、例(I)

例 1. 求函数 $F(y)=\int_0^1\ln(x^2+y^2)\,dx$ 的导数($y>0$).

解 $\forall y>0$，暂时固定，$\exists\varepsilon>0$. 使 $\varepsilon\leqslant y\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$. 显然，被积函数

$$\ln(x^2+y^2)\quad 与\quad \frac{\partial}{\partial y}\ln(x^2+y^2)=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

在闭矩形域 $R\left(0\leqslant x\leqslant 1,\ \varepsilon\leqslant y\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\right)$都连续. 根据定理 2，有

$$F'(y)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial y}\ln(x^2+y^2)\,dx=\int_0^1\frac{2y}{x^2+y^2}dx$$

$$=2\int_0^1\frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}=2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\Big|_0^1=2\operatorname{arctg}\frac{1}{y}.$$

因为 $\forall y>0,\exists\varepsilon>0$，使 $\varepsilon\leqslant y\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$，所以 $\forall y>0$，有

$$F'(y)=2\operatorname{arctg}\frac{1}{y}.$$

例 2. 求 $I(r)=\int_0^\pi\ln(1+r\cos x)dx,\quad |r|<1.$

解 $\forall r:|r|<1$，暂时固定，$\exists k>0$，使 $|r|\leqslant k<1$. 显然，被积函数及其关于 r 的偏导数，即

$$f(x,r)=\ln(1+r\cos x)\ 与\ \frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\cos x}{1+r\cos x}$$

在闭矩形域 $R(0\leqslant x\leqslant\pi,\ -k\leqslant r\leqslant k)$ 连续. 根据定理 2，有

$$I'(r)=\int_0^\pi\frac{\partial}{\partial r}\ln(1+r\cos x)dx=\int_0^\pi\frac{\cos x}{1+r\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{r}\int_0^\pi\frac{1+r\cos x-1}{1+r\cos x}dx=\frac{1}{r}\int_0^\pi\left(1-\frac{1}{1+r\cos x}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{r}-\frac{1}{r}\int_0^\pi\frac{dx}{1+r\cos x}.\qquad(r\neq0)$$

设 $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$（万能换元），有

$$\int\frac{dx}{1+r\cos x}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{1+r\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt=\int\frac{2}{(1+r)+(1-r)t^2}dt$$

$$=\frac{2}{1-r}\int\frac{dt}{\frac{1+r}{1-r}+t^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-r^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-r}{1+r}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+c.$$

从而，

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1+r\cos x}=\frac{2}{\sqrt{1-r^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-r}{1+r}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\Big|_0^\pi=\frac{\pi}{\sqrt{1-r^2}}.$$

于是，
$$I'(r)=\frac{\pi}{r}-\frac{\pi}{r\sqrt{1-r^2}}.\quad (r\neq 0) \tag{3}$$

又有
$$\lim_{r\to 0} I'(r)=\lim_{r\to 0}\left(\frac{\pi}{r}-\frac{\pi}{r\sqrt{1-r^2}}\right)=0.$$

将 $I'(r)$ 在 $r=0$ 作连续开拓．令 $I'(0)=0$．函数 $I'(r)$ 在区间 $[-k,k]$ 连续．对等式(3)等号两端求不定积分，有

$$I(r)=\int\left(\frac{\pi}{r}-\frac{\pi}{r\sqrt{1-r^2}}\right)dr\text{①}=\pi\left(\ln r+\ln\frac{1+\sqrt{1-r^2}}{r}\right)+C$$
$$=\pi\ln(1+\sqrt{1-r^2})+C.$$

已知 $I(0)=0$，有

$$C=-\pi\ln 2=\pi\ln\frac{1}{2}.$$

于是，
$$I(r)=\pi\ln(1+\sqrt{1-r^2})+\pi\ln\frac{1}{2}$$
$$=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-r^2}}{2}.$$

例 3. 证明：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续，则函数

$$y(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)\,dt,\quad x\in[a,b]$$

是微分方程 $y^{(n)}(x)=f(x)$ 的解，并满足条件 $y(a)=0, y'(a)=0, \cdots, y^{(n-1)}(a)=0$.

证明 逐次应用定理 4，求函数 $y(x)$ 的 n 阶导数，有

$$y'(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (n-1)(x-t)^{n-2}f(t)\,dt$$

---

① 求 $\int\frac{dr}{r\sqrt{1-r^2}}$. 换元，设 $r=\sin t$ 即可。

$$+\frac{1}{(n-1)!}(x-x)^{n-1}f(x)\cdot(x)'$$

$$=\frac{1}{(n-2)!}\int_a^x(x-t)^{n-2}f(t)dt,$$

$$y''(x)=\frac{1}{(n-3)!}\int_a^x(x-t)^{n-3}f(t)dt,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n-1)}(x)=\int_a^x f(t)dt,$$

$$y^{(n)}(x)=f(x),$$

即函数 $y(x)$是微分方程 $y^{(n)}(x)=f(x)$的解. 显然,当 $x=a$ 时,

$$y'(a)=0, y''(a)=0, \cdots, y^{(n-1)}(a)=0.$$

例 4. 证明:若函数 $f(x)$存在二阶导数,函数 $F(z)$存在连续导数,则函数

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(z)dz$$

是弦振动方程$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$的解.

证明 根据定理 4,有

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}[f'(x-at)(-a)+f'(x+at)a]$$

$$+\frac{1}{2a}[F(x+at)a-F(x-at)(-a)]$$

$$=\frac{a}{2}[f'(x+at)-f'(x-at)]$$

$$+\frac{1}{2}[F(x+at)+F(x-at)].$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{a^2}{2}[f''(x+at)+f''(x-at)]$$

$$+\frac{a}{2}[F'(x+at)-F'(x-at)].$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}[f'(x+at)+f'(x-at)]$$

$$+\frac{1}{2a}[F(x+at)-F(x-at)].$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}[f''(x+at)+f''(x-at)]$$

$$+\frac{1}{2a}[F'(x+at)-F'(x-at)].$$

于是，$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left\{\frac{1}{2}[f''(x+at)+f''(x-at)]\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2a}[F'(x+at)-F'(x-at)]\right\}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

即 $u(x,t)$ 是弦振动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的解.

例 5. 求积分 $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx,\quad 0<a<b.$

解 函数 $y(x)=\frac{x^b-x^a}{\ln x}$ 的原函数不是初等函数. 函数 $y(x)$ 在 0 与 1 没定义，却有极限

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^b-x^a}{\ln x}=0.$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{bx^{b-1}-ax^{a-1}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1^-}(bx^b-ax^a)=b-a.$$

将函数 $y(x)$ 在 0 与 1 作连续开拓，即

$$y(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \frac{x^b-x^b}{\ln x}, & 0<x<1,\\ b-a, & x=1.\end{cases}$$

从而，函数 $y(x)$ 在区间 $[0,1]$ 连续. 已知

$$y(x)=\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\left.\frac{x^y}{\ln x}\right|_a^b=\int_a^b x^y dy.$$

而函数 $f(x,y)=x^y$ 在闭矩形域 $R(0\leqslant x\leqslant 1, a\leqslant y\leqslant b)$ 连续，根据定理 3，有

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_0^1\left\{\int_a^b x^y dy\right\}dx=\int_a^b\left\{\int_0^1 x^y dx\right\}dy$$
$$=\int_a^b \frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_0^1 dy=\int_a^b\frac{dy}{y+1}=\ln\frac{1+b}{1+a}.$$

三、含参变量的无穷积分

设二元函数 $f(x,u)$ 在区域 $D(a\leqslant x<+\infty, \alpha\leqslant u\leqslant\beta)$ 有定义，$\forall u\in[\alpha,\beta]$，无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$ 都收敛，即 $\forall u\in[\alpha,\beta]$ 都对应唯一一个无穷积分（值）$\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$。于是，$\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$ 是区间 $[\alpha,\beta]$ 的函数，表为

$$\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)dx,\quad u\in[\alpha,\beta],$$

称为**含参变量的无穷积分**，有时也简称**无穷积分**①，u 是参变量。

已知无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散概念、敛散判别法及其性质基本上是平行的。不难想到，含参变量的无穷积分

$$\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$$

与函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之间亦应如此。讨论函数级数的和函数的分析性质，一致收敛起着重要作用。同样，讨论含参变量的无穷积分

---

① 无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$，因为被积函数是一元函数，所以是指 §12.1 中所说的无穷积分。

无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$，因为被积函数是二元函数，所以是指含参变量 u 的无穷积分。

所确定的函数的分析性质，一致收敛同样也起着重要的作用.

$\forall u\in[\alpha,\beta]$，无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$都收敛，即$\forall u\in[\alpha,\beta]$，有

$$\int_a^{+\infty}f(x,u)dx=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x,u)dx.$$

换句话说，$\forall\varepsilon>0$，$\exists A_u>0$，$\forall A>A_u$，有

$$\left|\int_a^{+\infty}f(x,u)dx-\int_a^A f(x,u)dx\right|=\left|\int_A^{+\infty}f(x,u)dx\right|<\varepsilon. \tag{4}$$

一般来说，对$[\alpha,\beta]$上不同的u_1和u_2，在ε相等的情况下，A_{u_1}与A_{u_2}也是不同的. 区间$[\alpha,\beta]$有无限多个点u，因而对应无限多个正数A_u($\forall A>A_u$，有(4)式成立)，是否存在一个"通用"的正数A_0($\forall A>A_0$，$\forall u\in[\alpha,\beta]$，有(4)式成立)呢？事实上，有的含参变量的无穷积分在区间$[\alpha,\beta]$存在着通用的正数A_0. 于是，有下面的一致收敛概念：

定义 设$\forall u\in I$(区间)①，无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$收敛. 若$\forall\varepsilon>0$，$\exists A_0$(通用)>0，$\forall A>A_0$，$\forall u\in I$，有

$$\left|\int_a^{+\infty}f(x,u)dx-\int_a^A f(x,u)dx\right|=\left|\int_A^{+\infty}f(x,u)dx\right|<\varepsilon,$$

则称无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$在区间I**一致收敛**.

若无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$在区间I不存在通用的$A_0>0$，就是非一致收敛. 现将一致收敛与非一致收敛列表对比如下：

无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$ 在区间 I	
一致收敛	$\forall\varepsilon>0,\exists A_0>0,\forall A>A_0,\forall u\in I$，有$\left\|\int_A^{+\infty}f(x,u)dx\right\|<\varepsilon$.
非一致收敛	$\exists\varepsilon_0>0,\forall A>0,\exists A_0>A,\exists u_0\in I$，有$\left\|\int_{A_0}^{+\infty}f(x,u_0)dx\right\|\geqslant\varepsilon_0$

① 区间I可以是开区间、闭区间、半开区间，有界区间或无界区间.

例 6. 证明：无穷积分 $\int_0^{+\infty} ue^{-xu}dx$ 在区间 $[a,b](a>0)$ 一致收敛.

证明 设 $A>0$，求无穷积分(将 u 看作常数)

$$\int_A^{+\infty} ue^{-xu}dx.$$

设 $xu=t$，$dx=\frac{1}{u}dt$，有

$$\int_A^{+\infty} ue^{-xu}dx=\int_{Au}^{+\infty} ue^{-t}\frac{1}{u}dt=\int_{Au}^{+\infty} e^{-t}dt=e^{-Au}.$$

已知 $a\leqslant u\leqslant b$，有

$$\left|\int_A^{+\infty} ue^{-xu}dx\right|=e^{-Au}\leqslant e^{-Aa}.$$

$\forall\varepsilon>0$，使不等式 $e^{-Aa}<\varepsilon$ 成立，解得 $A>\frac{1}{a}\ln\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $A_0=\frac{1}{a}\ln\frac{1}{\varepsilon}$. 于是，$\forall\varepsilon>0$，$\exists A_0=\frac{1}{a}\ln\frac{1}{\varepsilon}$，$\forall A>A_0$，$\forall u\in[a,b]$，有

$$\left|\int_A^{+\infty} ue^{-xu}dx\right|\leqslant e^{-Aa}<\varepsilon,$$

即无穷积分 $\int_0^{+\infty} ue^{-xu}dx$ 在区间 $[a,b]$ 一致收敛.

定理 5.（柯西一致收敛准则） 无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x,u)dx$ 在区间 I 一致收敛 $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists A_0>0,\forall A_1>A_0$ 与 $A_2>A_0$，$\forall u\in I$，有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,u)dx\right|<\varepsilon.$$

证明 必要性 由一致收敛的定义，$\forall\varepsilon>0,\exists A_0>0,\forall A>A_0$，$\forall u\in I$，有

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而，$A_1>A_0$ 与 $A_2>A_0$，分别有

$$\left|\int_{A_1}^{+\infty} f(x,u)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad 与 \quad \left|\int_{A_2}^{+\infty} f(x,u)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是,

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,u)dx\right| = \left|\int_{A_1}^{+\infty} f(x,u)dx - \int_{A_2}^{+\infty} f(x,u)dx\right|$$

$$\leqslant \left|\int_{A_1}^{+\infty} f(x,u)dx\right| + \left|\int_{A_2}^{+\infty} f(x,u)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

充分性 $\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 > 0, \forall A_1 > A_0$ 与 $A_2 > A_0, \forall u \in I$, 有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,u)dx\right| < \varepsilon.$$

令 $A_2 \to +\infty$, 有 $\left|\int_{A_1}^{+\infty} f(x,u)dx\right| \leqslant \varepsilon$, 即无穷积分$\int_0^{+\infty} f(x,u)dx$ 在区间 I 一致收敛. □

定理 6. 若 $\exists B > 0, \forall x > B, \forall u \in I$, 有

$$|f(x,u)| \leqslant F(x), \tag{5}$$

且无穷积分$\int_a^{+\infty} F(x)dx$ 收敛, 则无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在区间 I 一致收敛.

证明 已知无穷积分$\int_a^{+\infty} F(x)dx$ 收敛. 根据 § 12.1 定理 2, $\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 > 0, \forall A_1 > A_0$ 与 $A_2 > A_0$, 有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} F(x)dx\right| < \varepsilon.$$

由不等式(5), $\forall A_0 > B, \forall u \in I$, 有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,u)dx\right| \leqslant \left|\int_{A_1}^{A_2} |f(x,u)|dx\right| \leqslant \left|\int_{A_1}^{A_2} F(x)dx\right| < \varepsilon.$$

再根据定理 5 的充分性, 无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在区间 I 一致收敛. □

定理 6 中的函数 $F(x)$ 称为**优函数**. 定理 6 亦称为优函数判

别法.

例 7. 证明：无穷积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ux^2}dx$ 在区间$[a, +\infty)$一致收敛$(a>0)$.

证明 $\forall u\in[a, +\infty)$，有

$$e^{-ux^2}\leqslant e^{-ax^2}.$$

已知无穷积分$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx$收敛（见§12.1. 例7），根据定理6，则无穷积分$\int_0^{+\infty} e^{-ux^2}dx$ 在区间$[a, +\infty)$一致收敛

例 8. 证明：无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos xy}{x^2+y^2}dx$ 在 R 一致收敛.

证明 $\forall y\in R$，有

$$\left|\frac{\cos xy}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{1}{x^2}.$$

已知无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛，则无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos xy}{x^2+y^2}dx$ 在 R 一致收敛.

定理 6 是判别某些无穷积分一致收敛性的很简便的判别法，但这种方法有一定的局限性：凡能用定理 6 判别无穷积分是一致收敛，此无穷积分必然是绝对收敛；如果无穷积分是一致收敛，同时又是条件收敛，那么就不能用定理 6 来判别. 对于这种情况，不作详细讨论，只介绍与§12.1. 定理 8 相平行的定理.

定理 7. 若函数 $f(x, u)$在区域 $D(a\leqslant x<+\infty, u\in I)$ $(a>0)$，连续且

$$F(x, u)=\int_a^x f(t, u)\,dt$$

在D有界，即 $\exists C>0, \forall (x, u)\in D$，有

$$|F(x, u)|=\left|\int_a^x f(t, u)\,dt\right|\leqslant C.$$

则当 $\lambda>0$ 时，无穷积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{f(x,u)}{x^\lambda}dx$$

在区间 I 一致收敛.

证明与 § 12.1. 定理 8 的证法类似，留作练习.

例 9. 证明：无穷积分 $\int_0^{+\infty}e^{-yx}\frac{\sin x}{x}dx$ 在区间 $[0, +\infty)$ 一致收敛.

证明 因为 $\forall y\in[0,+\infty)$，有 $\lim\limits_{x\to 0}e^{-yx}\frac{\sin x}{x}=1$，所以 0 不是被积函数的瑕点. 因此将被积函数在 0 作连续开拓.

首先证明，无穷积分 $\int_1^{+\infty}e^{-yx}\frac{\sin x}{x}dx$① 在区间 $[0, +\infty)$ 一致收敛.

由 § 7.2. 例 6，有

$$F(x,y)=\int_1^x e^{-yt}\sin t\,dt=\left.\frac{-e^{-yt}(y\sin t+\cos t)}{1+y^2}\right|_1^x$$

$$=\frac{-e^{-yx}(y\sin x+\cos x)}{1+y^2}+\frac{e^{-y}(y\sin 1+\cos 1)}{1+y^2}.$$

$\forall (x,y)\in D(1\leqslant x<+\infty, 0\leqslant y<+\infty)$，有

$$|F(x,y)|\leqslant\frac{e^{-yx}(y+1)}{1+y^2}+\frac{e^{-y}(y+1)}{1+y^2}$$

$$\leqslant\frac{2(1+y)}{1+y^2}e^{-y}\longrightarrow 0\quad(y\to\infty).$$

于是，函数 $F(x,y)$ 在区域 D 有界，根据定理 7，无穷积分

$$\int_1^{+\infty}e^{-yx}\frac{\sin x}{x}dx=\int_1^{+\infty}\frac{e^{-yx}\sin x}{x}dx\quad(\lambda=1>0)$$

---

① 将要应用定理 7，而定理 7 要求 $a>0$. 为此这里证明 $\int_1^{+\infty}e^{-yx}\frac{\sin x}{x}dx$ 在区间 $[0, +\infty)$ 一致收敛.

在区间$[0,+\infty)$一致收敛．再根据柯西一致收敛准则，无穷积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-yx}\frac{\sin x}{x}dx$$

在区间$[0,+\infty)$一致收敛．

定理 8. 若函数$f(x, u)$在区域$D(a\leqslant x<-\infty,\ \alpha\leqslant u\leqslant\beta)$连续，且无穷积分$\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$在区间$[\alpha,\beta]$一致收敛，则函数$\varphi(u)$在区间$[\alpha,\beta]$连续．

证明 由一致收敛的定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists A_0>0$，$\forall A>A_0$，$\forall u\in[\alpha,\beta]$，有

$$\left|\int_A^{+\infty}f(x,u)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

$\forall u_0\in[\alpha,\beta]$，取$u_0+\Delta u\in[\alpha,\beta]$，有

$$\left|\int_A^{+\infty}f(x,u_0)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}\quad 与\quad \left|\int_A^{+\infty}f(x,u_0+\Delta u)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

根据定理 1，函数$p(u)=\int_a^A f(x,u)dx$在区间$[\alpha,\beta]$连续，当然在任意一点u_0也连续，即对上述同样的$\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$|\Delta u|<\delta$，有

$$\begin{aligned}&|p(u_0+\Delta u)-p(u_0)|\\ =&\left|\int_a^A f(x,u_0+\Delta u)dx-\int_a^A f(x,u_0)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

于是，$\forall\varepsilon>0(\exists A_0>0,\forall A>A_0)$，$\exists\delta>0$，$|\Delta u|<\delta$，有

$$\begin{aligned}&|\varphi(u_0+\Delta u)-\varphi(u_0)|\\ =&\left|\int_a^{+\infty}f(x,u_0+\Delta u)dx-\int_a^{+\infty}f(x,u_0)\,dx\right|\\ =&\left|\int_a^A f(x,u_0+\Delta u)dx+\int_A^{+\infty}f(x,u_0+\Delta u)dx\right.\\ &\left.\qquad-\int_a^A f(x,u_0)dx-\int_A^{+\infty}f(x,u_0)\,dx\right|\\ \leqslant&\left|\int_a^A f(x,u_0+\Delta u)dx-\int_a^A f(x,u_0)dx\right|\end{aligned}$$

$$+\left|\int_A^{+\infty} f(x,u_0+\Delta u)dx\right|+\left|\int_A^{+\infty} f(x,u_0)\,dx\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

所以函数 $\varphi(u)$在区间$[\alpha,\beta]$连续. □

定理 9. 若函数 $f(x, u)$在区域 $D(a\leqslant x<+\infty,\ \alpha\leqslant u\leqslant\beta)$连续,且无穷积分 $\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在区间$[\alpha,\beta]$一致收敛,则函数 $\varphi(u)$在区间$[\alpha,\beta]$可积,且

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)\,du=\int_a^{+\infty}\left\{\int_\alpha^\beta f(x,u)\,du\right\}dx,$$

即

$$\int_\alpha^\beta\left\{\int_a^{+\infty} f(x,u)dx\right\}du=\int_a^{+\infty}\left\{\int_\alpha^\beta f(x,u)\,du\right\}dx.$$

简称积分号下可积分.

证明 根据定理 8,函数$\varphi(u)$在区间$[\alpha,\beta]$连续,则函数$\varphi(u)$在区间$[\alpha,\beta]$可积. 由一致收敛定义,$\forall\varepsilon>0$, $\exists A_0>0$, $\forall A>A_0$, $\forall u\in[\alpha,\beta]$,有

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\,dx\right|<\varepsilon. \tag{6}$$

根据定理 3,有

$$\int_\alpha^\beta\left\{\int_a^A f(x,u)\,dx\right\}du=\int_a^A\left\{\int_\alpha^\beta f(x,u)\,du\right\}dx.$$

从而,$\forall A>A_0$ 时,由不等式(6),有

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)\,du=\int_\alpha^\beta\left\{\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx\right\}du=\int_\alpha^\beta\left\{\int_a^A+\int_A^{+\infty}\right\}du$$

$$=\int_\alpha^\beta\left\{\int_a^A f(x,u)\,dx\right\}du+\int_\alpha^\beta\left\{\int_A^{+\infty} f(x,u)\,dx\right\}du$$

$$=\int_a^A\left\{\int_\alpha^\beta f(x,u)\,du\right\}dx+\int_\alpha^\beta\left\{\int_A^{+\infty} f(x,u)\,dx\right\}du$$

于是，有

$$\left|\int_\alpha^\beta \varphi(u)du-\int_a^A\left\{\int_\alpha^\beta f(x,u)du\right\}dx\right|=\left|\int_\alpha^\beta\left\{\int_A^{+\infty}f(x,u)dx\right\}du\right|$$

$$\leqslant\int_\alpha^\beta\left|\int_A^{+\infty}f(x,u)dx\right|du<\varepsilon\int_\alpha^\beta du=\varepsilon(\beta-\alpha),$$

即
$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)du=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A\left\{\int_\alpha^\beta f(x,u)du\right\}dx$$

$$=\int_a^{+\infty}\left\{\int_\alpha^\beta f(x,u)du\right\}dx.\qquad □$$

定理10. 若函数 $f(x, u)$ 与 $f'_u(x, u)$ 在区域 $D(a\leqslant x<+\infty, \alpha\leqslant u\leqslant\beta)$ 连续，且无穷积分 $\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x, u)dx$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 收敛而无穷积分 $\int_a^{+\infty}f'_u(x,u)dx$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 一致收敛，则函数 $\varphi(u)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 可导，且

$$\varphi'(u)=\int_a^{+\infty}f'_u(x,u)dx,$$

即
$$\frac{d}{du}\int_a^{+\infty}f(x,u)dx=\int_a^{+\infty}\frac{\partial}{\partial u}f(x,u)dx.$$

简称积分号下可微分.

证明 $\forall u\in[\alpha,\beta]$，讨论积分

$$\int_\alpha^u\left\{\int_a^{+\infty}f'_t(x,t)dx\right\}dt.$$

根据定理9，有

$$\int_\alpha^u\left\{\int_a^{+\infty}f'_t(x,t)dx\right\}dt=\int_a^{+\infty}\left\{\int_\alpha^u f'_t(x,t)dt\right\}dx$$

$$=\int_a^{+\infty}\left\{f(x,t)\Big|_\alpha^u\right\}dx=\int_a^{+\infty}f(x,u)dx-\int_a^{+\infty}f(x,\alpha)dx$$

$$=\varphi(u)-\varphi(\alpha).$$

对上式两端关于 u 求导数，有

$$\varphi'(u)=\int_a^{+\infty}f'_u(x,u)dx.\qquad □$$

类似地，含参变量的瑕积分也有一致收敛及其判别法，以及含参变量瑕积分所定义函数的分析性质．从略．

四、例(II)

例 10. 证明：$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\ln\frac{b}{a},\quad 0<a<b.$

证明 将被积函数表成积分，即

$$\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=-\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}=-\frac{e^{-yx}}{x}\Big|_a^b$$

$$=\int_a^b\left(-\frac{e^{-yx}}{x}\right)'_y dy=\int_a^b e^{-yx}dy.$$

已知 $\forall y\in[a,b]$，有

$$e^{-yx}\leqslant e^{-ax}.$$

而无穷积分$\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx$ 收敛．根据定理 6，无穷积分$\int_0^{+\infty}e^{-yx}dx$ 在区间$[a,b]$一致收敛．根据定理 9，交换积分次序，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\int_0^{+\infty}\left\{\int_a^b e^{-yx}\,dy\right\}dx$$

$$=\int_a^b\left\{\int_0^{+\infty}e^{-yx}dx\right\}dy$$

$$=\int_a^b\frac{dy}{y}=\ln b-\ln a=\ln\frac{b}{a}.$$

例 11. 求无穷积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$

解 §12.1 例 11 证明了无穷积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛（条件收敛）．

因为被积函数$\frac{\sin x}{x}$不存在初等函数的原函数，所以不能直接求这个无穷积分．为此在被积函数中引入一个“收敛因子”e^{-yx} $(y\geqslant 0)$，讨论无穷积分

$$I(y)=\int_0^{+\infty}e^{-yx}\frac{\sin x}{x}dx. \tag{7}$$

显然，$I=I(0)$．无穷积分(7)的被积函数及其关于 y 的偏导数，即

$$e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\quad 与\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\right)=-e^{-yx}\sin x$$

在区域 $D(0\leqslant x<+\infty, 0\leqslant y<+\infty)$ 连续（连续开拓）．已知无穷积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-yx}\frac{\sin x}{x}dx$$

在区间$[0,+\infty)$一致收敛（见例 9）．下面证明，$\forall\varepsilon>0$，无穷积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\right)dx=-\int_0^{+\infty}e^{-yx}\sin x dx$$

在区间$[\varepsilon,+\infty)$一致收敛．事实上，$\forall y\in[\varepsilon,+\infty)$，有

$$|e^{-yx}\sin x|\leqslant e^{-yx}\leqslant e^{-\varepsilon x}.$$

已知无穷积分$\int_0^{+\infty}e^{-\varepsilon x}dx$ 收敛，由定理 6，无穷积分 $\int_0^{+\infty}e^{-yx}\sin x dx$ 在区间$[\varepsilon,+\infty)$一致收敛．根据定理 10，$\forall y\in[\varepsilon,+\infty)$，有

$$\begin{aligned}I'(y)&=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\right)dx=-\int_0^{+\infty}e^{-yx}\sin x dx\\&=\frac{e^{-yx}(y\sin x+\cos x)}{1+y^2}\Bigg|_0^{+\infty}=-\frac{1}{1+y^2}.\end{aligned}$$

从而
$$I(y)=-\int\frac{1}{1+y^2}dy=-\operatorname{arctg}y+C. \tag{8}$$

下面确定常数 C．$\forall y>0$ 等式(8)都成立．有

$$\begin{aligned}|I(y)|&=\left|\int_0^{+\infty}e^{-yx}\frac{\sin x}{x}dx\right|\leqslant\int_0^{+\infty}\left|e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\right|dx①\\&\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-yx}dx=-\frac{e^{-yx}}{y}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{y}\to 0\quad(y\to+\infty),\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{y\to+\infty}I(y)=0$．对等式(8)等号两端取极限$(y\to+\infty)$，有

---

① $\forall x\neq 0$，有 $\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant 1$.

$$\lim_{y\to+\infty} I(y) = -\lim_{y\to+\infty} \operatorname{arctg} y + C,$$

即 $0=-\frac{\pi}{2}+C$ 或 $C=\frac{\pi}{2}$. 于是

$$I(y) = -\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}. ① \tag{9}$$

下面证明函数$I(y)$在$y=0$右连续. 事实上，已知无穷积分(7)在区间$[0, +\infty)$一致收敛，根据定理8，函数$I(y)$在$y=0$右连续. 对等式(9)等号两端取极限($y\to0^+$)，有

$$\lim_{y\to0^+} I(y) = \lim_{y\to0^+}(-\operatorname{arctg} y) + \frac{\pi}{2},$$

即 $I(0)=\frac{\pi}{2}$，于是，

$$I = I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

例 12. 求无穷积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin yx}{x} dx$.

解 显然，$y=0$时， $\int_0^{+\infty} \frac{\sin yx}{x} dx = 0.$

当 $y\neq0$. 设 $yx=t$，$dx=\frac{1}{y}dt$，由例 11，有

$$y>0, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin yx}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

$$y<0, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin yx}{x} dx = \int_0^{-\infty} \frac{\sin t}{t} dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = -\frac{\pi}{2}.$$

于是，

---

① 因为 $y=0$ 不属于无穷积分$\int_0^{+\infty} e^{-yx}\sin x dx$ 的一致收敛区间，所以在(9)式中不能直接令 $y=0$.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin yx}{x}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & y>0,\\ 0, & y=0,\\ -\frac{\pi}{2}, & y<0.\end{cases}$$

著名的符号函数sgn y（见§1.1. 三、）可表为解析式：

$$\operatorname{sgn} y=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin yx}{x}dx=\begin{cases}1, & y>0,\\ 0, & y=0,\\ -1, & y<0.\end{cases}$$

例13. 求无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx$.

解 被积函数$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$是偶函数，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx=2\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{x^2}dx.$$

由分部积分公式与例12，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{x^2}dx=\int_0^{+\infty}(1-\cos 2x)d\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{1-\cos 2x}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2\sin 2x}{x}dx$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi.$$

五、Γ函数与B函数

Γ函数与B函数是两个含参变量的广义积分所定义的非初等函数，它们在数学、物理中有广泛的应用。

（一）Γ函数

函数 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ 称为**Γ函数**（喔玛函数）.

已知$\Gamma(\alpha)$函数的定义域是区间$(0,+\infty)$（见§12.2 例7）.下面讨论Γ函数的两个性质.

1. Γ 函数在区间$(0,+\infty)$连续.

事实上,$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$

$$=\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

$\forall\alpha\in(0,+\infty)$, $\exists\alpha_1$ 与 α_2, 使 $0<\alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2$.

$\forall x\in(0,1]$, 有 $\quad x^{\alpha-1}e^{-x}\leqslant x^{\alpha_1-1}e^{-x}$.

$\forall x\in[1,+\infty)$, 有 $\quad x^{\alpha-1}e^{-x}\leqslant x^{\alpha_2-1}e^{-x}$.

已知瑕积分$\int_0^1 x^{\alpha_1-1}e^{-x}dx$ 与无穷积分 $\int_1^{+\infty}x^{\alpha_2-1}e^{-x}dx$ 都收敛, 则无穷积分$\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ 在区间$[\alpha_1,\alpha_2]$一致收敛. 而被积函数 $x^{\alpha-1}e^{-x}$ 在区域 $D(0<x<+\infty,\alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2)$连续, 根据定理 8, Γ 函数在区间$[\alpha_1,\alpha_2]$连续. 于是, Γ函数在点α连续. 因为α是区间$(0,+\infty)$任意一点, 所以Γ函数在区间$(0,+\infty)$连续.

2. 递推公式 $\quad\forall\alpha>0$, 有 $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$.

事实上, 由分部积分公式, $\forall\alpha>0$, 有

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}x^{\alpha}d(-e^{-x})$$

$$=-x^{\alpha}e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\alpha\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\alpha\Gamma(\alpha).$$

设 $n<\alpha\leqslant n+1$, $n\in\mathbf{N}$, 逐次应用递推公式, 有

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)=\alpha(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)=\cdots$$

$$=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)\Gamma(\alpha-n).$$

而 $0<\alpha-n\leqslant1$. 由此可见, 只要知道Γ函数在区间$(0,1]$的函数值, 由递推公式就能计算出任意正数α的函数值 $\Gamma(\alpha)$.

特别是, $\alpha=n$, $n\in\mathbf{N}$, 有

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots$$

$$=n(n-1)\cdots2\cdot1\Gamma(1).$$

而 $\quad \Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=1$，即

$$\Gamma(n+1)=n!=\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx.$$

这是 $n!$ 的一个分析表达式

（二） B 函数

函数 $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 称为 $\boldsymbol{B}$ 函数（贝塔函数）.

已知$B(p,q)$的定义域是区域$D(0<p<+\infty,0<q<+\infty)$（见§12.2 例 8）. 下面讨论 $B(p,q)$的三个性质：

1. 对称性 $B(p,q)=B(q,p)$.

事实上，设 $x=1-t$，$dx=-dt$，有

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=-\int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}dt$$

$$=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt=B(q,p).$$

2. 递推公式 $\quad \forall p>0,q>1$，有 $B(p,q)=\dfrac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$.

事实上，由分部积分公式，$\forall p>0,q>1$，有

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^1 (1-x)^{q-1}d\left(\frac{x^p}{p}\right)$$

$$=\frac{x^p}{p}(1-x)^{q-1}\Big|_0^1+\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}dx$$

$$=\frac{q-1}{p}\int_0^1 [x^{p-1}-x^{p-1}(1-x)](1-x)^{q-2}dx$$

$$=\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}dx-\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

$$=\frac{q-1}{p}B(p,q-1)-\frac{q-1}{p}B(p,q),$$

即 $\quad B(p,q)=\dfrac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1).$

由对称性，$\forall p>1, q>0$，又有

$$B(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}B(q,p-1).$$

特别是，$q=n, n\in\mathbf{N}$，逐次应用递推公式，有

$$\begin{aligned}B(p,n)&=\frac{n-1}{p+n-1}B(p,n-1)\\&=\frac{(n-1)(n-2)}{(p+n-1)(p+n-2)}\quad B(p,n-2)\\&=\cdots=\frac{(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1}{(p+n-1)(p+n-2)\cdots(p+1)}\quad B(p,1).\end{aligned}$$

而 $B(p,1)=\int_0^1 x^{p-1}dx=\frac{1}{p}$，即

$$B(p,n)=\frac{(n-1)!}{p(p+1)\cdots(p+n-1)}.$$

当 $p=m, q=n (m,n\in\mathbf{N})$，有

$$B(m,n)=\frac{(n-1)!}{m(m+1)\cdots(m+n-1)}=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$$

或

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

这个公式表明，尽管B函数与Γ函数的定义在形式上没有关系，但它们之间却有着内在的联系．这个公式可推广为

$\forall p>0, q>0$，有

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.\tag{10}$$

证明从略。

3．$\forall p>0, q>0, B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi d\varphi.$

事实上，设 $x=\cos^2\varphi, dx=-2\sin\varphi\cos\varphi d\varphi$，有

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^0(\cos^2\varphi)^{p-1}(\sin^2\varphi)^{q-1}(-2\sin\varphi\cos\varphi)d\varphi.$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi d\varphi. \tag{11}$$

由公式(11)，有下面几个简单公式：$\forall p>0, q>0$，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi d\varphi=\frac{1}{2}B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{2\Gamma(p+q)}. \tag{12}$$

在公式(12)中，令 $q=\frac{n+1}{2}$ 与 $p=\frac{1}{2}$. $\forall n>-1$，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\varphi d\varphi=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}. \tag{13}$$

在公式(13)中，令 $n=0$，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(1)}=\frac{1}{2}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2,$$

$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\pi$，即

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

六、例(III)

例14. 求概率积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ 与 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

解 设 $x^2=t, dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$，有

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

于是， $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$

例 15. 求 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx,\quad p>0,q>0.$

解 设 $\frac{1}{1+x}=t,dx=-\frac{1}{t^2}dt$，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx=-\int_1^0\left(\frac{1-t}{t}\right)^{p-1}\cdot t^{p+q}\cdot\frac{1}{t^2}dt$$

$$=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt=B(q,p).$$

例 16. 证明尤拉等式

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{\pi}{4}.$$

证明 分别求等号左端的每个积分:

设 $t=x^4,\ dx=\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}dt$，有

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{4}\int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{4}B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right).$$

$$\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{4}\int_0^1 t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{4}B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right).$$

于是， $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{4}B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{4}B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)$

$$=\frac{1}{16}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{16}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\frac{\pi}{4}.$$

例 17. 证明：若 $\alpha>0,\beta>0,b>a$，有

$$\int_a^b (x-a)^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1}dx=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(b-a)^{\alpha+\beta-1}.$$

证明 设 $u=\frac{x-a}{b-a}$，$x-a=(b-a)u, b-x=(b-a)(1-u)$，

$dx=(b-a)du$，有

$$\int_a^b (x-a)^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1}dx$$

$$=\int_0^1[(b-a)u]^{\alpha-1}[(b-a)(1-u)]^{\beta-1}(b-a)du$$

$$=(b-a)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du$$

$$=(b-a)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta)$$

$$=(b-a)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

例 18. 证明 勒让德公式：$\forall a>0$，有

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a).$$

证明 $$B(a,a)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1}dx=\int_0^1[x(1-x)]^{a-1}dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}[x(1-x)]^{a-1}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1[x(1-x)]^{a-1}dx.$$

对等号右端第二个积分作变换．设 $x=1-t, dx=-dt$，有

$$\int_{\frac{1}{2}}^1[x(1-x)]^{a-1}dx=-\int_{\frac{1}{2}}^0[t(1-t)]^{a-1}dt=\int_0^{\frac{1}{2}}[x(1-x)]^{a-1}dx.$$

$$B(a,a)=2\int_0^{\frac{1}{2}}[x(1-x)]^{a-1}dx=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{a-1}dx.$$

设$\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}\sqrt{t}$，$dx=-\frac{dt}{4\sqrt{t}}$，有

$$B(a,a)=\frac{1}{2^{2a-1}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{a-1}dt=\frac{1}{2^{2a-1}}B\left(\frac{1}{2},a\right).$$

由公式(10)，有

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(a)}{\Gamma(2a)}=\frac{1}{2^{2a-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(a)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}.$$

已知 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$，即

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a).$$

特别是，令 $a=\frac{1}{4}$，有

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{1}{2}-1}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\,\pi.$$

练 习 题 12.3

1. 设有二元函数 $f(x,y)=\operatorname{sgn}(x-y)$，$(x,y)\in\mathbf{R}^2$。证明：一元函数

$$F(y)=\int_0^1 f(x,y)\,dx$$

在$\mathbf{R}$连续，并描绘函数$F(y)$的图象。（提示：分别就$y<0$；$0\leqslant y\leqslant 1$；$y>1$求函数$F(y)$）

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{y\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,dx$，　　(2) $\lim\limits_{y\to 0}\int_0^2 x^2\cos yx\,dx$，

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$。

3. 求 $F'(y)$：

(1) $F(y)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{(1+y\sin x)^2}$，

(2) $F(y)=\int_{x}^{x^2} e^{-xy^2}dx$, (3) $F(y)=\int_{a+y}^{b+y}\frac{\sin yx}{x}dx$

4. 设 $F(y)=\int_0^y (y+x)f(x)dx$，其中 $f(x)$ 是可微函数，求 $F''(y)$

5. 设 $F(x)=\int_0^h\left\{\int_0^h f(x+\xi+\eta)\,d\eta\right\}d\xi$ $(h>0)$，其中 $f(x)$ 是连续函数，求 $F''(x)$.

6. 证明：函数 $y(x)=\int_0^x \Phi(t)\sin(x-t)dt$ 满足方程

$$y''(x)+y(x)=\Phi(x),\quad y(0)=0,$$

其中函数 $\Phi(x)$ 是连续函数.

7. 证明：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续，则 $\forall x\in[a,b]$，有

$$\int_a^x\left\{\int_a^y f(t)\,dt\right\}dy=\int_a^x f(t)(x-t)\,dt.$$

(提示：等号两端关于 x 求导数.)

8. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,A]$ 连续，则 $\forall x\in[a,A)$，有

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]dt=f(x)-f(a).$$

9. 用积分号下可微分，求下列积分：

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin^2x+a^2\cos^2x)\,dx,\ a>0.$$

10. 证明下列无穷积分在指定区间一致收敛：

(1) $\int_0^{+\infty}e^{-tx}\sin x\,dx$, $a\leqslant t<+\infty$ $(a>0)$.

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{t\cos tx}{x^2+t^3}dx$, $1\leqslant t\leqslant 10$.

(3) $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos tx\,dx$, $t\in\mathbb{R}$.

11. 证明下列无穷积分在指定区间非一致收敛：

(1) $\int_0^{+\infty}ye^{-yx}dx$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{y}{(x+y)^2}dx$, $0<y<+\infty$.

12. 设 $\forall u\in[\alpha,\beta]$，点 (b,u) 都是 $f(x,u)$ 的瑕点. 定义瑕积分 $\int_a^b f(x,u)\,dx$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 一致收敛，并叙述其非一致收敛，并验证瑕积分 $\int_0^1(1-x)^{\alpha-1}dx$

在区间$[a,+\infty)$ $(a>0)$一致收敛，在区间$(0,+\infty)$非一致收敛.

13. 证明: $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $a>0$. (提示:应用例14.)

14. 应用积分号下可微分，求无穷积分:

$$I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2}-e^{-ax^2}}{x}dx,\qquad a>0.$$

15. 应用积分号下可积分，求无穷积分:

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin x dx,\ a>0b,>0.$$

$\left(\text{提示: } \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-yx}dy.\right)$

16. 证明: (1) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^4}dx=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$,

(2) $\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n}dx=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right), n>0, m>-1.$

17. 用Γ函数与B函数求下列积分:

(1) $\int_0^1\sqrt{x-x^2}dx$, (2) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$.

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^4 x dx$, (4) $\int_{-1}^1(1-x^2)^n dx, n\in\mathbf{N}$.

18. 证明 (1) $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$, $n\in\mathbf{N}$.

(2) $$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\varphi d\varphi=\begin{cases}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\ \frac{\pi}{2}, & n=2m.\\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n=2m+1.\end{cases}$$

* * *

19. 证明: 椭圆积分 $E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$ 满足微分方程

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)-\frac{E(k)}{1-k^2}=0,\quad 0<k<1.$$

20. 证明: 若函数$f(x)$连续，且

$$k(x,y)=\begin{cases}y(1-x), & y<x,\\ x(1-y), & y\geq x,\end{cases}$$

则函数 $u(x)=\int_0^1 k(x,y)f(y)dy$ 满足微分方程

$$\begin{cases} u''(x)+f(x)=0, \\ u(0)=0, \quad u(1)=0. \end{cases}$$

21. 证明：若函数 $f(x,u)$ 在矩形域 $R(a\leqslant x\leqslant b,\alpha\leqslant u\leqslant\beta)$ 连续，而函数 $a(u)$ 与 $b(u)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 也连续，且 $\forall u\in[\alpha,\beta]$，有

$$a\leqslant a(u)\leqslant b, \quad a\leqslant b(u)\leqslant b,$$

则函数 $\psi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}f(x,u)\,dx$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 连续.

22. 证明定理 7.

23. 证明：Γ 函数在区间 $(0,+\infty)$ 存在任意阶连续导数，$n\in\mathbf{N}$，有

$$\Gamma^{(n)}(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}(\ln x)^n dx.$$

24. 证明：若 $f(t)=\left(\int_0^t e^{-x^2}dx\right)^2$，$g(t)=\int_0^1\frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2}dx$，则

$$f'(t)+g'(t)=0, \quad f(t)+g(t)=\frac{\pi}{4} \quad (t\geqslant 0).$$

由此求概率积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$$\left(\text{提示：} f'(t)=2\int_0^t e^{-(t^2+x^2)}dx=-g'(t).\right)$$

第十三章 重 积 分

解决许多几何、物理以及其它实际问题，不仅需要一元函数的积分(即定积分)，而且还需要各种不同的多元函数的积分. 后面将看到这些简单实例. 一元函数积分的积分域很简单，是数直线上的区间. 由于多元函数自变量个数的不同和积分域形状的不同就有各种不同的多元函数的积分. 例如：二元函数在平面有界区域上有二重积分；在平面曲线上有平面曲线积分，三元函数在空间有界体上有三重积分；在空间曲线上有空间曲线积分；在有界曲面上有曲面积分. 一般情况，n 元函数就有 n 重积分，等等.

尽管多元函数的积分有多种，但是定义这些多元函数积分的方法与步骤和定义定积分的方法与步骤是相同的，都是按照分割(分法)，代替，作和与取极限步骤定义的，而且对每种多元函数积分所讨论的问题与定积分所讨论的问题也基本相同. 因此，本章摘其要者予以证明，有的述而不证，有的从略.

§13.1. 二 重 积 分

一、曲顶柱体的体积

设有个立体，它的下面是坐标平面上可求面积的有界闭区域 R①，它的上面是定义在 R 上的正值连续函数 $z=f(x,y)$ 所表示的曲面，它的侧面是以 R 的边界为准线与 z 轴平行的柱面，这样的立体称为**曲顶柱体**(如图 13.1).

何谓曲顶柱体的体积？为了定义曲顶柱体的体积，首先用任意曲线把区域 R 分成 n 个小区域：

$$R_1, R_2, \cdots, R_n.$$

---

① 本书所说的有界区域都是可求面积的，下同.

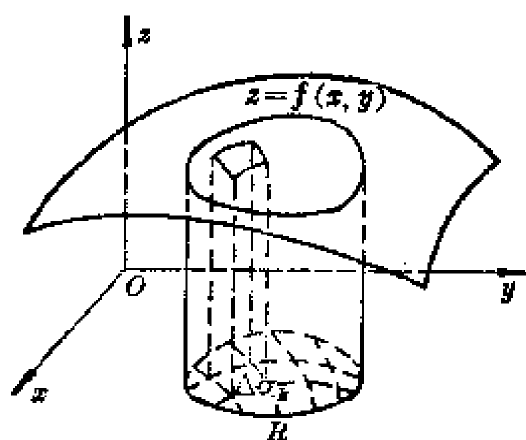


图 13.1

设 R_k 的面积是$\Delta\sigma_k$. 将这个分法表为T. 通过 $R_k(k=1,2,\cdots n)$ 的边界作平行于 z 轴的柱面. 于是，分法T将原曲顶柱体分成了以 R_k 为底的 n 个小曲顶柱体. 这 n 个小曲顶柱体的体积之和就是原曲顶柱体的体积. 由于函数 $z=f(x,y)$的连续性，当小区域 R_k 很小时，每个小曲顶柱体的体积可近似地看为(平顶)柱体的体积.

在每个小区域 R_k 上任取一点 $P_k(\xi_k,\eta_k)$，则以 R_k 为底（其面积是$\Delta\sigma_k$)以 $f(\xi_k,\eta_k)$为高的(平顶)柱体的体积

$$f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

应是第 k 个小曲顶柱体的体积近似值. 于是，和数

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

应是原曲顶柱体体积的近似值. 显然，对区域 R 的分法T越来越细时，和数应该越来越趋近于原曲顶柱体的体积.

分法T的 n 个小区域：R_1, $R_2,\cdots$, R_n 的直径分别是 $d(R_1)$, $d(R_2),\cdots,d(R_n)$. 设

$$\|T\|=\max\{d(R_1),d(R_2),\cdots,d(R_n)\}.$$

所谓对区域R的分法T越来越细就是指对区域 R 逐次分下去，使

$\|T\|\to 0$. 不难看到，当$\|T\|\to 0$时，就一个小区域 R_k 来说，不仅它的面积越来越小，而且无限地向一点收缩. 于是，当$\|T\|\to 0$时，和数$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$的极限就应该是原曲顶柱体的体积. 因为曲顶柱体的体积是唯一的，所以体积不能由于分法 T 的不同与点 $P_k(\xi_k, \eta_n)$的取法不同而变化.

若当$\|T\|\to 0$时，n 个柱体的体积之和$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$存在极限，设极限是 V，即

$$\lim_{\|T\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k = V, \tag{1}$$

则称 V 是**曲顶柱体的体积**.

曲顶柱体的体积定义原则上给出了计算曲顶柱体体积的方法. 但是，按照定义计算曲顶柱体的体积要进行复杂的运算，下面有简便的计算方法.

二、二重积分概念

不仅计算曲顶柱体的体积要用到(1)式的极限，凡是计算平面有界闭区域上不均匀量的总和，例如，非均匀薄片的质量，曲面的面积，等等，都要用到形如(1)式的极限. 因此有必要抽象地讨论(1)式的极限.

设二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 R 有定义. 用任意分法 T 将 R 分成 n 个小区域：$R_1, R_2, \cdots, R_n$，设它们的面积分别是$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$. 在小区域 R_k 上任取一点 $P_k(\xi_k, \eta_k)$ $(k=1,2,\cdots,n)$，作和

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k, \tag{2}$$

称为二元函数 $f(x,y)$ 在区域 R 的**积分和**.

令 $\|T\|=\max\{d(R_1),d(R_2),\cdots,d(R_n)\}$.

定义 设二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 R 有定义. 若当 $\|T\|\to 0$ 时, 二元函数 $f(x,y)$ 在区域 R 的积分和(2)存在极限 I(数 I 与分法 T 无关,也与点 P_k 的取法无关),表为

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k=I, \tag{3}$$

即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall T:\|T\|<\delta,\forall(\xi_k,\eta_k)\in D_k,k=1,2,\cdots,n$, 有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k-I\right|<\varepsilon, \tag{4}$$

则称函数 $f(x,y)$ 在 R **可积**, I 是函数 $f(x,y)$ 在 R 的**二重积分**, 表为

$$I=\iint_R f(x,y)d\sigma \quad 或 \quad I=\iint_R f(x,y)dxdy,$$

其中 R 称为**积分区域**, $f(x,y)$ 称为**被积函数**, $d\sigma$ 或 $dxdy$ 称为**面积微元**.

由二重积分的定义不难看到, 定义在有界闭区域 R 上的正值连续函数 $f(x,y)$ 为曲顶的曲顶柱体的体积 V 就是函数 $f(x,y)$ 在 R 的二重积分,即

$$V=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k=\iint_R f(x,y)dxdy.$$

不难证明,函数 $f(x,y)$ 在 R 可积的必要条件是函数 $f(x,y)$ 在 R 有界.

为了进一步讨论函数 $f(x,y)$ 在 R 可积的充分条件, 与定积分类似,先引入大和与小和的概念.

如果函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 R 有界. 分法 T 将 R 分成 n 个小闭区域: $R_1,R_2,\cdots,R_n$, 它们的面积分别是 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$. 设

M_k 与 m_k 分别是函数 $f(x,y)$ 在 R_k 的上确界与下确界，则和数

$$s(T)=\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta\sigma_k \quad 与 \quad S(T)=\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta\sigma_k$$

分别称为函数 $f(x,y)$ 在 R 关于分法 T 的小和与大和. 二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 R 的小和与大和的性质与§8.2第一段一元函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 的小和与大和的性质完全类似，证法相同，此处从略.

数 $M_k-m_k=\omega_k$，称为函数 $f(x,y)$ 在 R_k 的**振幅**. 于是，有与§8.2定理1′完全类似的二重积分存在的必要充分条件：

定理 1. 函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 R 可积 $\Longleftrightarrow$

$$\lim_{\|T\|\to 0}[S(T)-s(T)]=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta\sigma_k=0. \qquad (5)$$

证明　必要性　已知函数 $f(x,y)$ 在 R 可积，设二重积分是 I，即

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall T:\|T\|<\delta,\forall P_k(\xi_k,\eta_k)\in R_k,有$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k-I\right|<\varepsilon$$

或
$$I-\varepsilon<\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k<I+\varepsilon.$$

又已知小和 $s(T)$ 与大和 $S(T)$ 分别是积分和 $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$ 的下确界与上确界. 于是

$$I-\varepsilon\leqslant s(T)\leqslant S(T)<I+\varepsilon,$$

或
$$S(T)-s(T)=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta\sigma_k<2\varepsilon,$$

即　$\lim_{\|T\|\to 0}[S(T)-s(T)]=0.$

充分性 设 $\sup_T\{s(T)\}=I_0,\inf_T\{S(T)\}=I^0$. $\forall T$,有

$$s(T)\leqslant I_0\leqslant I^0\leqslant S(T).$$

由已知条件,当$\|T\|\to 0$时,有$I_0=I^0$,设$I=I_0=I^0$. $\forall T$,有

$$s(T)\leqslant I\leqslant S(T).$$

又已知$\forall T,\forall P_k(\xi_k,\eta_k)\in R_k$, 对积分和$\sum_{k=1}^n f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$,有

$$s(T)\leqslant\sum_{k=1}^n f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k\leqslant S(T).$$

由上面两个不等式,$\forall T$,有

$$\left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k-I\right|\leqslant S(T)-s(T).$$

再由已知条件,有

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{k=1}^n f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k=I,$$

即函数$f(x,y)$在有界闭区域R可积. □

应用定理1能够证明下列两类函数是可积的:

定理2. 若函数$f(x,y)$在有界闭区域R连续,则函数$f(x,y)$在R可积.

证明 根据§10.2定理8, 函数$f(x,y)$在R一致连续,即$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)\in R$: $|P_1-P_2|<\delta$,有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\frac{\varepsilon}{R}.$$

其中R表示R的面积. $\forall T$: $\|T\|<\delta$,它将R分成n个小闭区域R_1, $R_2,\cdots,R_n$. 根据§10.2定理6, 函数$f(x,y)$在R_k必能取到最大值M_k与最小值m_k,即R_k上存在两点(ξ_k',η_k')与(ξ_k'',η_k''),使

$$f(\xi_k',\eta_k')=M_k\text{ 与 }f(\xi_k'',\eta_k'')=m_k\quad(k=1,2,\cdots,n),$$

从而，

$$\omega_k=M_k-m_k=f(\xi'_k,\eta'_k)-f(\xi''_k,\eta''_k)<\frac{\varepsilon}{\bar{R}}\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

有
$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta\sigma_k<\frac{\varepsilon}{\bar{R}}\sum_{k=1}^{n}\Delta\sigma_k=\varepsilon.$$

根据定理 1，函数 $f(x,y)$在R可积. □

定理 3. 若函数 $f(x,y)$在有界闭区域R有界，间断点只分布在有限条光滑曲线上，则函数 $f(x,y)$在R可积.

证明从略.

三、二重积分的性质

二重积分具有与定积分类似的性质，其证法与定积分的相应性质的证法相同. 这里只给出二重积分中值定理的证明，其余性质的证明从略. 为了书写简便，有时将函数 $f(x,y)$表为 f.

定理 4. 若 $f(x,y)\equiv 1$，则 $\iint\limits_R dxdy=\bar{R}$，其中 $\bar{R}$ 表示R的面积.

定理 5. 若函数 f 在R可积，k是常数，则函数 kf 在R也可积，且

$$\iint\limits_R kfd\sigma=k\iint\limits_R fd\sigma.$$

定理 6. 若函数 f_1 与 f_2 在R都可积，则函数 $f_1\pm f_2$ 在R也可积，且

$$\iint\limits_R(f_1\pm f_2)d\sigma=\iint\limits_R f_1d\sigma\pm\iint\limits_R f_2d\sigma.$$

定理 7. 若函数 f 在 R_1 与 R_2 都可积，则 f 在 $R_1\cup R_2$ 也可积. 当 R_1 与 R_2 没有公共内点时，有

$$\iint\limits_{R_1\cup R_2}fd\sigma=\iint\limits_{R_1}fd\sigma+\iint\limits_{R_2}fd\sigma.$$

定理 8. 若函数 f_1 与 f_2 在 R 可积，且 $\forall(x,y)\in R$，有

$$f_1(x,y)\leqslant f_2(x,y),$$

则

$$\iint\limits_R f_1 d\sigma\leqslant\iint\limits_R f_2 d\sigma.$$

定理 9. 若函数 f 在 R 可积，则函数 $|f|$ 在 R 也可积，且

$$\left|\iint\limits_R f d\sigma\right|\leqslant\iint\limits_R |f| d\sigma.$$

定理 10.（中值定理） 若函数 f 在有界闭区域 R 连续，则至少存在一点 $(\xi,\eta)\in R$，使

$$\iint\limits_R f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\overline{R},$$

其中 $\overline{R}$ 表示 R 的面积.

证明 根据§10.2 定理 6，在 R 上必存在两点 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2,y_2)$，函数 $f(x,y)$ 在此两点分别取到最大值 M 与最小值 m，即

$$f(x_1,y_1)=M \quad 与 \quad f(x_2,y_2)=m.$$

于是，$\forall(x,y)\in R$，有

$$m\leqslant f(x,y)\leqslant M.$$

根据定理 8 与定理 5定理 4，有

$$m\overline{R}\leqslant\iint\limits_R f(x,y)d\sigma\leqslant M\overline{R}$$

或

$$m\leqslant\frac{1}{\overline{R}}\iint\limits_R f(x,y)d\sigma\leqslant M.$$

根据§10.2 定理 7（连续函数的介值性），至少存在一点 $(\xi,\eta)\in R$，使

$$f(\xi,\eta)=\frac{1}{\overline{R}}\iint\limits_R f(x,y)d\sigma,$$

即

$$\iint_R f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)R. \qquad \square$$

练习题 13.1(一)

1. 按照二重积分的定义，求二重积分

$$\iint_R xydxdy,$$

其中 $R[0\leqslant x\leqslant 1;\ 0\leqslant y\leqslant 1]$. (提示：可将每个边 n 等分，将 R 分成 n^2 个小正方形区域，取 $(\xi_i,\ \eta_k)=\left(\frac{i}{n},\ \frac{k}{n}\right)$)

2. 证明：函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x\text{与}y\text{都是有理数},\\ 0, & x\text{与}y\text{至少有一个无理数},\end{cases}$$

在任意有界闭区域都不可积.

3. 设 $R[0\leqslant x\leqslant 1;\ 0\leqslant y\leqslant 1]$, $\forall(x,y)\in R$, 定义函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x=y,\\ 0, & x\neq y.\end{cases}$$

证明：函数 $f(x,y)$ 在 R 可积，且 $\iint_R f(x,y)dxdy=0$.

4. 证明定理5、定理6、定理8.

5. 证明：若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 R 连续，且 $f(x,y)>0$, 则

$$\iint_R f(x,y)dxdy>0.$$

6. 证明：若函数 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 在有界闭区域 R 都连续，且 $g(x,y)\geqslant 0$, 则 $\exists(\xi,\eta)\in R$, 使

$$\iint_R f(x,y)g(x,y)dxdy=f(\xi,\eta)\iint_R g(x,y)dxdy.$$

7. 证明：若函数 $f(x,\ y)$ 在区域 R 连续，且对任意有界闭区域 $D\subset R$ 都有

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=0,$$

则 $\forall (x,y)\in R$, 有 $f(x,y)=0$. (提示：用反证法.)

8. 证明：若函数 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 在有界闭区域 R 可积，则乘积函数 $f(x,y)g(x,y)$ 在 R 也可积. (提示：参见§8.3定理4的证明)

*　　*　　*　　*

9. 证明：若函数 $f(x,y)$ 在正方形区域 D 可积，且在点 $(x_0,y_0)\in D$ 连续，则

$$\lim_{d(G)\to 0}\frac{1}{\bar{G}}\iint_G f(x,y)\,dxdy=f(x_0,y_0),$$

其中 G 是满足 $(x_0,y_0)\in G\subset D$ 的任意区域，$d(G)$ 表 G 的直径，$\bar{G}$ 表 G 的面积.

10. 证明：若连续函数列 $\{f_n(x,y)\}$ 在有界闭区域 R 上一致收敛于函数 $f(x,y)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\iint_R f_n(x,y)\,dxdy=\iint_R f(x,y)\,dxdy.$$

四、二重积分的计算

二重积分的定义本身也给出了二重积分的计算方法. 由于计算积分和很繁杂，按照二重积分的定义计算二重积分有很大的局限性. 本段将给出计算二重积分经常使用的方法——化二重积分为两次定积分法或累次积分法.

定理 11. 若函数 $f(x,y)$ 在闭矩形域 $R[a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d]$ 可积，且 $\forall x\in[a,b]$，定积分 $I(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$ 存在，则累次积分 $\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx$ 也存在，且

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx.$$

证明 设区间 $[a,b]$ 与 $[c,d]$ 的分点分别是：

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b,$$

$$c=y_0<y_1<\cdots<y_{k-1}<y_k<\cdots<y_m=d.$$

这个分法表为T. 于是，分法T将闭矩形域R分成$n\times m$个小闭矩形(如图 13.2). 小闭矩形表为

$$R_{ik}[x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i;\ y_{k-1}\leqslant y\leqslant y_k]$$
$$i=1,2,\cdots,n;\ k=1,2,\cdots,m.$$

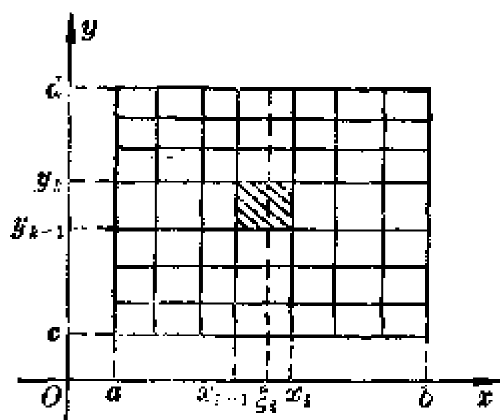


图 13.2

设 $$M_{ik}=\sup_{R_{ik}}\{f(x,y)\},\qquad m_{ik}=\inf_{R_{ik}}\{f(x,y)\}.$$

$\forall \xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,有

$$m_{ik}\leqslant f(\xi_i,y)\leqslant M_{ik},\qquad y_{k-1}\leqslant y<y_k.$$

已知一元函数$f(\xi_i,y)$在$[y_{k-1},y_k]$可积,有

$$m_{ik}\Delta y_k\leqslant\int_{y_{k-1}}^{y_k}f(\xi_i,y)dy\leqslant M_{ik}\Delta y_k,\ \Delta y_k=y_k-y_{k-1}.$$

将此不等式对$k=1,2,\cdots,m$相加,有

$$\sum_{k=1}^m m_{ik}\Delta y_k\leqslant\sum_{k=1}^m\int_{y_{k-1}}^{y_k}f(\xi_i,\ y)dy\leqslant\sum_{k=1}^m M_{ik}\Delta y_k,$$

其中 $$\sum_{k=1}^m\int_{y_{k-1}}^{y_k}f(\xi_i,\ y)dy=\int_c^d f(\xi_i,y)dy=I(\xi_i),$$

即 $$\sum_{k=1}^m m_{ik}\Delta y_k\leqslant I(\xi_i)\leqslant\sum_{k=1}^m M_{ik}\Delta y_k.$$

再将此不等式乘以Δx_i,然后对$i=1,2,\cdots,n$相加,有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} m_{ik}\Delta x_i\Delta y_k \leqslant \sum_{i=1}^{n} I(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} M_{ik}\Delta x_i\Delta y_k.$$

此不等式的左右两端分别是分法T的小和$s(T)$与大和$S(T)$，即

$$s(T) \leqslant \sum_{i=1}^{n} I(\xi_i)\Delta x_i \leqslant S(T). \tag{6}$$

已知函数$f(x,y)$在R可积，根据定理1，有

$$\lim_{\|T\|\to 0} S(T) = \lim_{\|T\|\to 0} s(T) = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy,$$

由不等式(6)，有 $$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} I(\xi_i)\Delta x_i = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy,$$

即 $$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b I(x)\,dx = \int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx. \quad \square$$

类似地，若$f(x,y)$在闭矩形域$R[a\leqslant x\leqslant b; c\leqslant y\leqslant d]$可积，且$\forall y\in[c, d]$，定积分$J(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx$存在，则累次积分

$$\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy$$

也存在，且 $$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy.$$

为了书写方便，将累次积分$\int_c^d\left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right]dy$表为

$$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx.$$

推论 若函数$\varphi(x)$在$[a,b]$可积，函数$\psi(y)$在$[c, d]$可积，则乘积函数$\varphi(x)\psi(y)$在闭矩形域$R[a\leqslant x\leqslant b; c\leqslant y\leqslant d]$也可积，且

$$\iint_R \varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy = \int_a^b \varphi(x)\,dx\cdot\int_c^d \psi(y)\,dy.$$

证明 将函数$\varphi(x)$与$\psi(y)$都看作是二元函数，它们在R都

可积. 根据练习题 13.1(一)第 8 题，乘积函数 $\varphi(x)\psi(y)$在 R 可积.根据定理 11,有

$$\iint_R \varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_c^d \varphi(x)\psi(y)\,dy$$

$$=\int_a^b \varphi(x)\left[\int_c^d \psi(y)\,dy\right]dx=\int_a^b \varphi(x)\,dx\int_c^d \psi(y)\,dy.\ \square$$

例 1. 求二重积分 $\iint_R \frac{dx\,dy}{(x+y)^2}$，其中$R[3\leqslant x\leqslant 4;\ 1\leqslant y\leqslant 2]$.

解 被积函数$\frac{1}{(x+y)^2}$在R连续,有

$$\iint_R \frac{dx\,dy}{(x+y)^2}=\int_1^2 dy\int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2}\quad (\text{关于 } x \text{ 积分}, y \text{ 当作常数})$$

$$=\int_1^2\left(\frac{1}{y+3}-\frac{1}{y+y}\right)dy=\ln\frac{25}{24}.$$

例 2. 求曲顶柱体的体积，其底是正方形区域 $R[0\leqslant x\leqslant a;\ 0\leqslant y\leqslant a]$,其顶是定义在 R 上的曲面 $z=e^{px+qy}$(p, q 是常数).

解 已知曲顶柱体的体积V是二重积分

$$V=\iint_R e^{px+qy}\,dx\,dy.$$

根据推论,有

$$\iint_R e^{px+qy}\,dx\,dy=\int_0^a e^{px}dx\cdot\int_0^a e^{qy}dy$$

$$=\frac{1}{p}e^{px}\Big|_0^a\cdot\frac{1}{q}e^{qy}\Big|_0^a=\frac{1}{pq}(e^{ap}-1)(e^{aq}-1).$$

例 3. 若函数 $f(x)$在$[a,b]$是正值连续函数,则

$$\iint_R \frac{f(x)}{f(y)}\,dx\,dy\geqslant(b-a)^2,$$

其中 $R[a\leqslant x\leqslant b;\ a\leqslant y\leqslant b]$.

证明 函数 $f(x)$ 与 $\frac{1}{f(y)}$ 在 $[a,b]$ 都可积. 闭正方形域 R 关于直线 $y=x$ 对称(如图 13.3), 有

$$\iint_R \frac{f(x)}{f(y)}dx\,dy=\iint_R \frac{f(y)}{f(x)}dx\,dy,$$

则
$$\iint_R \frac{f(x)}{f(y)}dx\,dy=\frac{1}{2}\iint_R\left(\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right)dx\,dy$$

$$=\iint_R \frac{f^2(x)+f^2(y)}{2f(x)f(y)}dx\,dy\geqslant\iint_R dx\,dy\text{①}=\overline{R}$$

$$=(b-a)^2.$$

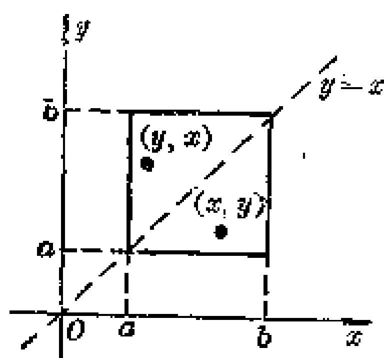


图 13.3

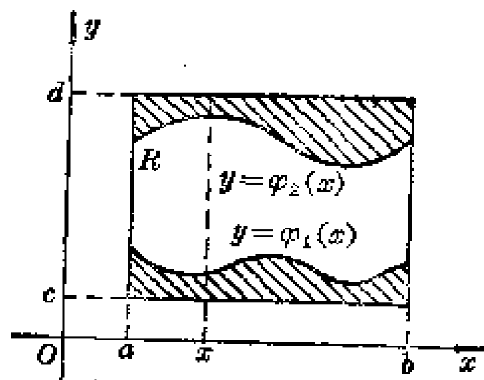


图 13.4

定理 12. 设有界闭区域 R 是由两条光滑曲线 $y=\varphi_1(x)$ 与 $y=\varphi_2(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, 且 $\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)$, 以及直线 $x=a$ 与 $x=b$ 所围成(如图 13.4). 若函数 $f(x,y)$ 在 R 可积, 且 $\forall x\in[a,b]$, 定积分

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

存在, 则累次积分

$$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

也存在, 且

---

① $\forall a>0, b>0$, 有 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 或 $\frac{a^2+b^2}{2ab}\geqslant 1$.

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

证明 将R包含在闭矩形域$P[a\leqslant x\leqslant b;\ c\leqslant y\leqslant d]$内（如图13.4），有

$$c\leqslant\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant d,\qquad a\leqslant x\leqslant b.$$

在闭矩形域P上定义新函数

$$f^*(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & (x,y)\in R,\\ 0, & (x,y)\in P-R.\end{cases}$$

根据定理3，新函数$f^*(x,y)$在P可积．根据定理11，有

$$\iint_P f^*(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_c^d f^*(x,y)\,dy.$$

由新函数$f^*(x,y)$的定义，有

$$\iint_P f^*(x,y)\,dx\,dy=\iint_R f(x,y)\,dx\,dy. \tag{7}$$

$\forall x\in[a,b]$，有

$$\begin{aligned}&\int_a^b dx\int_c^d f^*(x,y)\,dy\\ =&\int_a^b dx\left[\int_c^{\varphi_1(x)} f^*dy+\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f^*dy+\int_{\varphi_2(x)}^{d} f^*dy\right]\\ =&\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.\end{aligned}$$

于是，由(7)式，有

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.\quad \square$$

定理12指出，求如图13.4所示的R上的二重积分，可化成先对y，后对x的累次积分．安置积分限的方法如下：首先将R投影到x轴上，得闭区间$[a,b]$．在区间$[a,b]$上任取一点x，关于y积分，在R内y的积分限由$\varphi_1(x)$到$\varphi_2(x)$．然后在投影区间$[a,b]$上关于x积分．

类似的，设有界闭区域R是由两条光滑曲线$x=\psi_1(y)$与$x=\psi_2(y)$，$c\leqslant y\leqslant d$，且$\psi_1(y)\leqslant\psi_2(y)$，以及直线$y=c$与$y=d$所围成(如图 13.5)．若函数$f(x,y)$在$R$可积，且$\forall y\in[c,d]$，定积分$\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$存在，则累次积分

$$\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

也存在，且

$$\iint_R f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

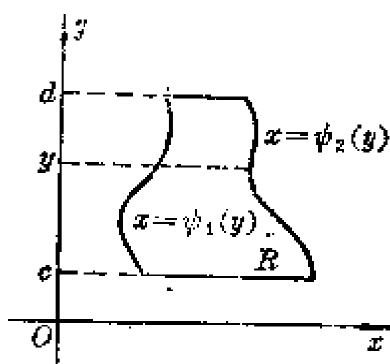


图 13.5

如果区域R不是图 13.4 与图 13.5 的形状，可将它分成有限个如图 13.4 和如图 13.5 的区域，分别求每个区域上的二重积分，然后再相加．

例 4. 求四个平面$x+y+z=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$所围成的四面体的体积(如图 13.6)．

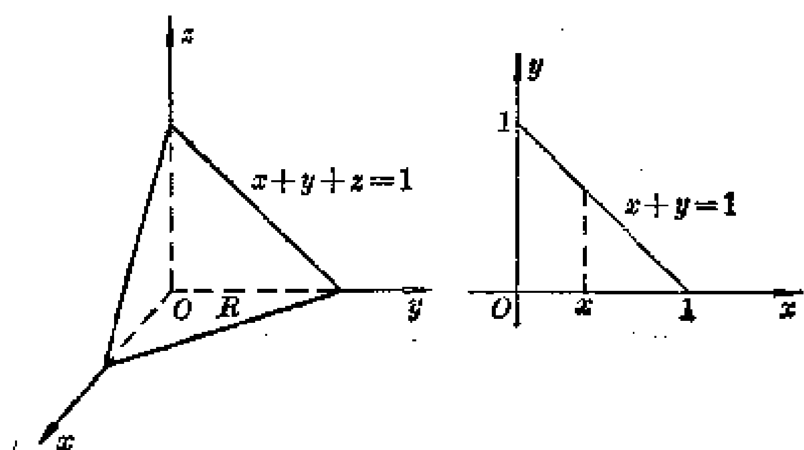


图 13.6

解 四面体在xy平面的投影是直线$x=0$，$y=0$与$x+y=1$所围成的三角形区域R．上面是定义在R上的平面$z=1-x-y$．于是，四面体的体积I是二重积分，即

$$I=\iint\limits_{R}(1-x-y)\,dx\,dy.$$

先对 y 积分后对 x 积分. 将三角形区域 R 投影到 x 轴上, 得闭区间 $[0,1]$. 在 $[0,1]$ 上任取一点 x, 关于 y 积分, 在 R 内 y 的积分限由 $y=0$ 到 $y=1-x$. 然后在投影区间 $[0,1]$ 上关于 x 积分, 即

$$\iint\limits_{R}(1-x-y)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dy$$

$$=\int_0^1\left[(1-x)y-\frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_0^{1-x}dx=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^2\,dx=\frac{1}{6}.$$

先对 x 积分后对 y 积分, 类似地有

$$\iint\limits_{R}(1-x-y)\,dx\,dy=\int_0^1 dy\int_0^{1-y}(1-x-y)\,dx=\frac{1}{6}.$$

例 5. 证明: 若函数 $f(x,y)$ 在由直线 $y=a$, $x=b$, $y=x\,(a<b)$ 所围成的三角形区域 R (如图 13.7) 连续, 则

$$\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)\,dy=\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)\,dx.$$

证明 先对 y 积分后对 x 积分, 有

$$\iint\limits_{R}f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)\,dy.$$

先对 x 积分后对 y 积分, 有

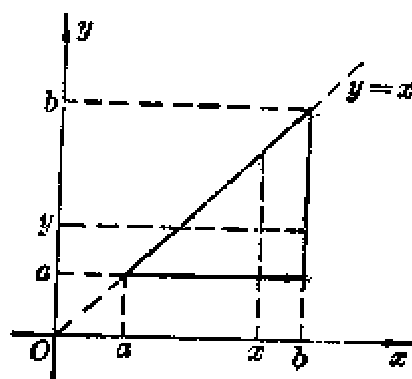


图 13.7

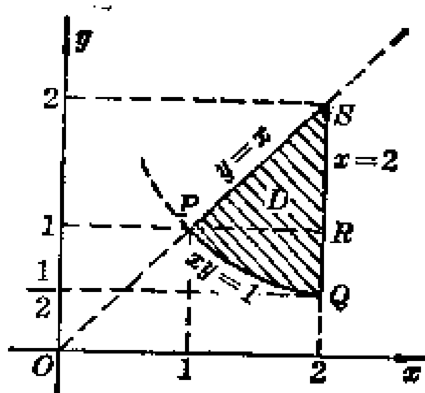


图 13.8

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)\,dx.$$

于是，

$$\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)\,dy=\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)\,dx.$$

例 6. 求二重积分 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dx\,dy$，其中 D 是由直线 $x=2$, $y=x$ 和双曲线 $xy=1$ 所围成(如图 13.8).

解 先对 y 积分，后对 x 积分. 将 D 投影在 x 轴上，得闭区间 $[1,2]$. $\forall x\in[1,2]$，关于 y 积分，在 D 内 y 的积分限是 $y=\frac{1}{x}$ 到 $y=x$，然后在投影区间 $[1,2]$ 上关于 x 积分，即

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}dx\,dy=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy=\int_1^2 (x^3-x)\,dx=\frac{9}{4}.$$

如果先对 x 积分，后对 y 积分. 因为 D 的左侧边界(曲线)不是由一个解析式给出，而是由两个解析式 $xy=1$ 和 $y=x$ 给出的，所以必须将图 13.8 所示的区域 D 分成两个区域 (PRS) 与 (PRQ)，分别在其上求二重积分，然后再相加，即

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}dx\,dy=\iint\limits_{(PRQ)}\frac{x^2}{y^2}dx\,dy+\iint\limits_{(PRS)}\frac{x^2}{y^2}dx\,dy$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{1}{y}}^{2}\frac{x^2}{y^2}dx+\int_1^2 dy\int_y^2\frac{x^2}{y^2}dx=\frac{9}{4}.$$

例 7. 将二重积分 $\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy$ 化为按不同积分次序的累次积分，其中 R 是由上半圆周 $y=\sqrt{2ax-x^2}$、抛物线 $y^2=2ax$ $(y\geqslant 0)$ 和直线 $x=2a(a>0)$ 所围成. 如图 13.9.

解 先对 y 积分后对 x 积分，有

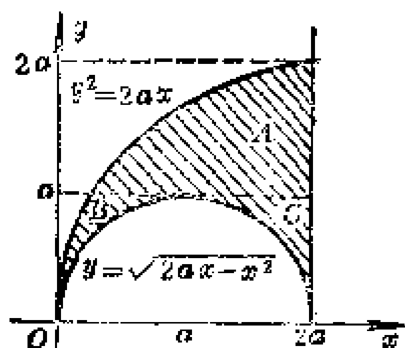


图 13.9

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{2a}dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\,dy.$$

先对 x 积分，后对 y 积分，首先将区域 R 分成三个小区域 A，B，C，其次分别在每个小区域上将二重积分化为累次积分，即

$$\begin{aligned}&\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy\\&=\iint\limits_A f(x,y)\,dx\,dy+\iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy+\iint\limits_C f(x,y)\,dx\,dy\\&=\int_a^{2a}dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a}f(x,y)\,dx+\int_0^a dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)\,dx\\&\qquad+\int_0^a dy\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}f(x,y)\,dx.\end{aligned}$$

在例 6 与例 7 中，化二重积分为累次积分，先对 y 积分，后对 x 积分比较简单，先对 x 积分，后对 y 积分比较复杂，但也有与此相反的情况. 因此，用累次积分求二重积分要注意选取简便易算的积分次序.

五、二重积分的换元

求二重积分，由于某些积分区域的边界曲线比较复杂，仅仅将二重积分化为累次积分并不能达到简化计算的目的. 但是，常常经过一个适当的换元或变换可将给定的积分区域变换为简单的区

域，如矩形域、圆域或部分圆域等等，从而简化了重积分的计算.

定理 13. 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 R 连续，函数组

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v) \tag{8}$$

将 uv 平面上区域 R' 一对一地变换为 xy 平面上区域 R. 且函数组(8)在 R' 上对 u 与对 v 存在连续偏导数，$\forall(u,v)\in R'$，有

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0,$$

则
$$\iint\limits_{R} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{R'} f[x(u,v),y(u,v)]\,|J(u,v)|\,du\,dv. \tag{9}$$

证明 用任意分法 T 将区域 R 分成 n 个小区域：$R_1,R_2,\cdots,R_n$. 设其面积分别是 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$. 于是，在 R' 上有对应的分法 T'，它将 R' 对应地分成 n 个小区域 $R'_1,R'_2,\cdots,R'_n$. 设其面积分别是 $\Delta\sigma'_1,\Delta\sigma'_2,\cdots,\Delta\sigma'_n$. 根据§11.2. 定理 3，$\forall(u,v)\in R'_k$，有

$$\Delta\sigma_k\approx\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Delta\sigma'_k=|J(u,v)|\Delta\sigma'_k.$$

$\forall(\xi_k,\eta_k)\in R_k$，在 R'_k 对应唯一一点 (α_k,β_k)，而

$$\xi_k=x(\alpha_k,\beta_k),\qquad \eta_k=y(\alpha_k,\beta_k).$$

于是，

$$\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\ \eta_k)\Delta\sigma_k\approx\sum_{k=1}^{n}f[x(\alpha_k,\beta_k),y(\alpha_k,\beta_k)]\,|J(\alpha_k,\beta_k)|\,\Delta\sigma'_k. \tag{10}$$

根据§11.1 定理 3 的推论，函数组(8)在有界闭区域 R 上存在反函数组 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，并且此函数组在 R 一致连续，所以当 $\|T\|\to0$ 时，也有 $\|T'\|\to0$. 对(10)取极限($\|T\|\to0$)，有

$$\iint\limits_{R} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{R'} f[x(u,v),y(u,v)]\,|J(u,v)|\,du\,dv.\quad\square$$

例 8. 求曲线 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\,(a>0,\quad b>0)$ 与 $y=0$ 所围

成区域R的面积$\overline{R}$.

解 已知区域R的面积(被积函数$f(x,y)\equiv 1$)

$$\overline{R}=\iint\limits_{R} dx\,dy.$$

设 $u=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$, $v=\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}$ 或 $x=\dfrac{a}{2}(u+v)$, $y=\dfrac{b}{2}(u-v)$.

这个函数组将xy平面上的区域R变换为uv平面上的区域R', R'是曲线$u^2=v$和$u=v$所围成的区域(如图 13.10).

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{a}{2} & \dfrac{a}{2}\\ \dfrac{b}{2} & -\dfrac{b}{2}\end{vmatrix}=-\frac{ab}{2}.$$

由(9)式,有

$$\overline{R}=\iint\limits_{R} dx\,dy=\iint\limits_{R'}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv=\frac{ab}{2}\int_0^1 du\int_{u^2}^{u} dv=\frac{ab}{12}.$$

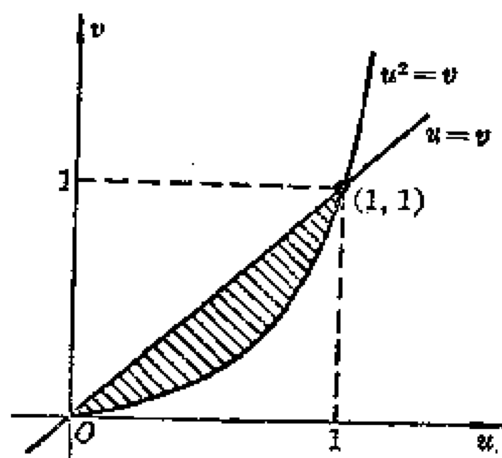


图 13.10

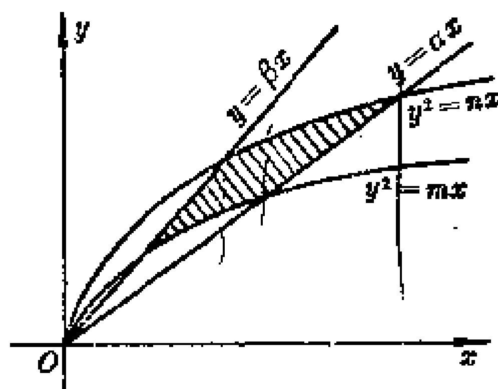


图 13.11

例 9. 求两条抛物线$y^2=mx$与$y^2=nx$和两条直线$y=\alpha x$与$y=\beta x$所围成区域R的面积$\overline{R}$($0<m<n$, $0<\alpha<\beta$)(如图 13.11).

解 已知区域R的面积

$$\overline{R}=\iint\limits_{R} dx\,dy.$$

设 $u=\frac{y^2}{x}, v=\frac{y}{x}$. 这个函数组将 xy 平面上的区域 R 变换为 uv 平面上的区域 R', R' 是由直线 $u=m, u=n$ 和 $v=\alpha, v=\beta$ 所围成的矩形.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}-\dfrac{y^2}{x^2} & 2\dfrac{y}{x}\\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x}\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{x^3}{y^2}=\frac{y^2}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^4=\frac{u}{v^4}.$$

由(9)式, 有

$$\overline{R}=\iint\limits_{R}dx\,dy=\iint\limits_{R'}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv=\int_{\alpha}^{\beta}dv\int_{m}^{n}\frac{u}{v^4}\,du$$

$$=\frac{n^2-m^2}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dv}{v^4}=\frac{(n^2-m^2)(\beta^3-\alpha^3)}{6\alpha^3\beta^3}.$$

常用的二重积分变换是极坐标变换. 变换公式是

$$x=r\cos\varphi, \qquad y=r\sin\varphi \, . \tag{11}$$

它将 $r\varphi$ 平面上的区域 R' 变换为 xy 平面上的区域 R. 如区域 R 是以原点为心以 a 为半径的圆域 $x^2+y^2\leqslant a^2$, 则极坐标变换(11)的逆变换将此圆域 R 变换为矩形域 R' [$0\leqslant r\leqslant a$; $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$](如图 13.12).

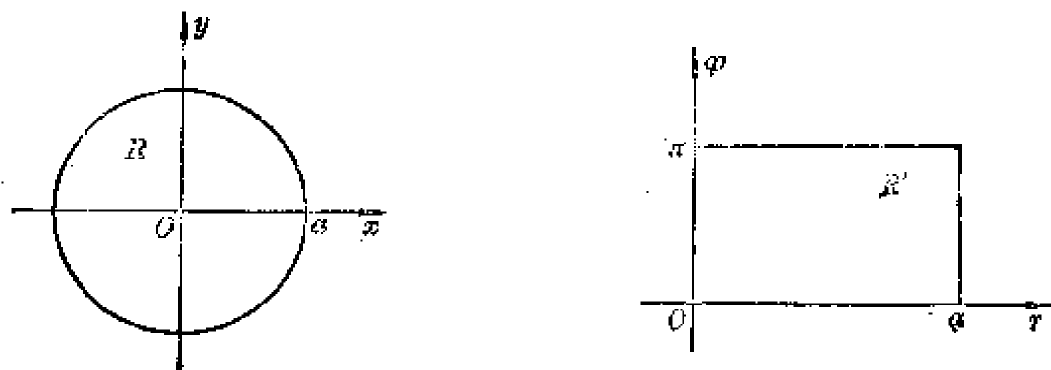


图 13.12

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r.$$

由(9)式，有

$$\iint\limits_{R} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{R'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi. \tag{12}$$

注 在$r\varphi$平面上，当$r=0$和$\forall\varphi\in[0,2\pi]$，有$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}=0$，即极坐标变换(11)将$\varphi$轴上的线段$[0,2\pi]$变换为$xy$平面上的原点$(0,0)$，不满足定理13中的一对一的条件。为此讨论闭区域$R'_{\rho\varepsilon}=[\rho\leqslant r\leqslant a;0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi-\varepsilon]$，其中$\rho$与$\varepsilon$都是充分小的正数(如图13.13)。$\forall(r,\varphi)\in R'_{\rho\varepsilon}$，$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\neq 0$，且极坐标变换(11)将$R'_{\rho\varepsilon}$一对一地变换为$R_{\rho\varepsilon}$(如图 13.13)。于是，由(9)式，有

$$\iint\limits_{R_{\rho\varepsilon}} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{R'_{\rho\varepsilon}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

令$\rho\to 0$，$\varepsilon\to 0$，上式的极限就是(12)式。

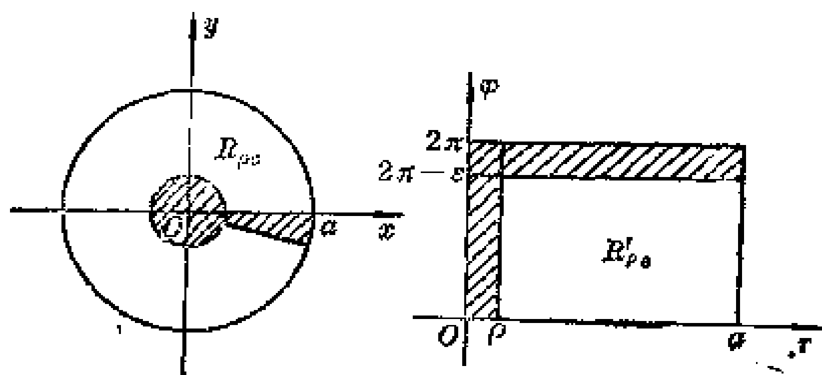


图 13.13

上述事实说明：如果$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$在$R'$中个别点或在某些线段上皆为0，公式(9)仍然成立。

例10. 求以圆域R：$x^2+y^2\leqslant a^2$为底，R上的曲面是z

$=e^{-(x^2+y^2)}$的曲顶柱体的体积.

解 已知曲顶柱体的体积

$$V=\iint_R e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy.$$

作极坐标变换$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$. 它将圆域$R$: $x^2+y^2\leqslant a^2$变换为矩形域 $R'[0\leqslant r\leqslant a; 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi]$, 且

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right|=r.$$

由公式(12), 有

$$V=\iint_R e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy=\iint_{R'}e^{-r^2}r\,dr\,d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a re^{-r^2}dr$$

$$=2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^a=\pi(1-e^{-a^2}).$$

例11. 求球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 所截得的那部分立体的体积.

解 如图 13.14, 所截得的那部分立体关于 xy 平面对称, 也关于 xz 平面对称. 于是所截得的那部分立体的体积V是第一卦限那部分曲顶柱体的体积的四倍, 即

$$V=4\iint_R\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

其中R是圆 $x^2+y^2=ax$ 与直线 $y=0$(取 $y\geqslant 0$)所围成的半圆域(如图 13.14).

作极坐标变换 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$, 区域$R$的边界曲线的极坐标方程是 $r=a\cos\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$. 由公式(12), 有

$$V=4\iint_R\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr$$

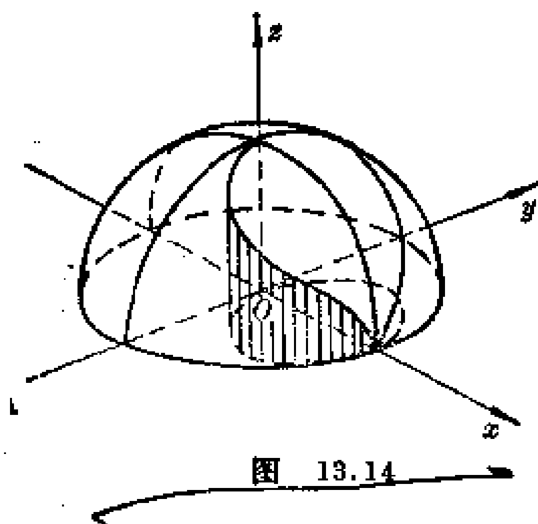


图 13.14

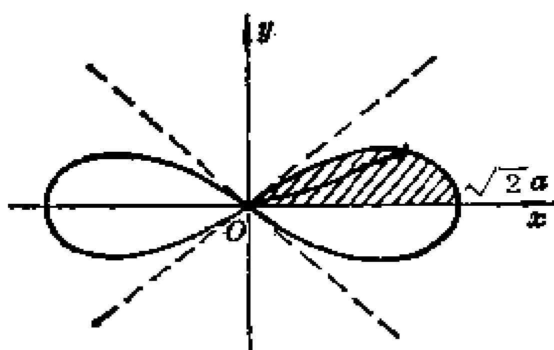


图 13.15

$$=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\varphi)\,d\varphi=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

例12. 求双纽线$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$所围成区域的面积.

解 作极坐标变换$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$. 双纽线的极坐标方程是

$$r^2=2a^2\cos2\varphi.$$

双纽线关于x轴与y轴都对称. 于是,双纽线所围成区域R的面积$\bar{R}$是第一象限内那部分区域面积的四倍(如图 13.15). 第一象限的部分区域是:$0\leqslant r\leqslant a\sqrt{2\cos2\varphi},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$. 由公式(12),有

$$\bar{R}=\iint\limits_R dx\,dy=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{2\cos2\varphi}}r\,dr$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\varphi\,d\varphi=2a^2.$$

一般来说,求二重积分,当被积函数含有“x^2+y^2”或围成积分区域的边界曲线方程含有“x^2+y^2”时,可考虑使用极坐标变换.

六、曲面的面积

设有有界曲面S,它的参数方程是

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v),\quad (u,v)\in R,\qquad (13)$$

其中 R 是 uv 平面上的有界闭区域. 若函数 $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ 所有偏导数在 R 连续, 且矩阵

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$$

的秩是 2, 则称曲面 S 是光滑曲面.

曲面 S 的向量形式是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=x(u,v)\boldsymbol{i}+y(u,v)\boldsymbol{j}+z(u,v)\boldsymbol{k},\quad (u,v)\in R.$$

在 uv 平面上, 用平行坐标轴的任意两族直线 $u=u_i$ 与 $v=v_j$ $(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$ 将 R 分成一些小区域. 在曲面 S 上与这两族直线分别对应着两族 u-曲线和 v-曲线, 如图 13.16.

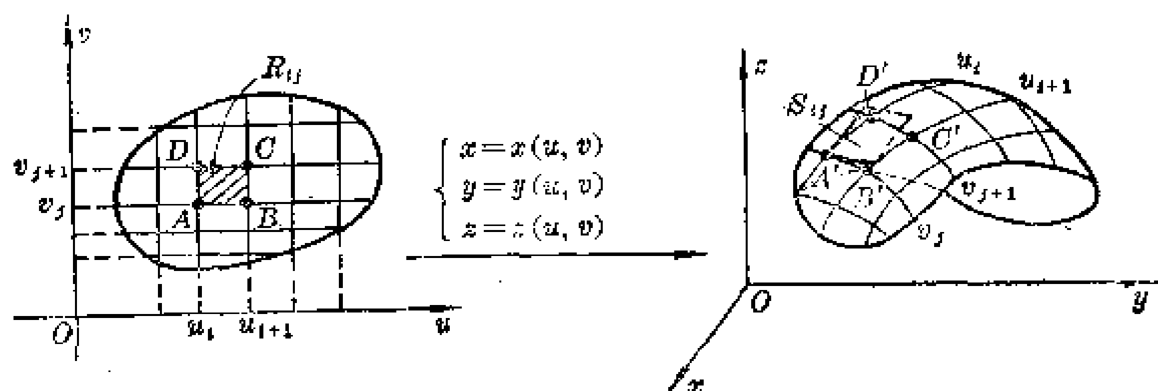


图 13.16

设四条直线 $u=u_i$, $u=u_{i+1}$, $v=v_j$, $v=v_{j+1}$ 围成的小矩形区域 $ABCD$ 是 R_{ij}. 令 $\Delta u_i=u_{i+1}-u_i$, $\Delta v_j=v_{j+1}-v_j$. 显然, R_{ij} 的面积是 $\Delta u_i\Delta v_j$.

设在曲面 S 上与小矩形区域 $ABCD$ 对应的小曲面块 $A'B'C'D'$ 是 S_{ij}, 即

点 $A(u_i,v_j)$ 对应点是

$$A'[x(u_i,v_j),y(u_i,v_j),z(u_i,v_j)],$$

点 $B(u_{i+1},v_j)$ 对应点是

$$B'[x(u_{i+1},v_j),y(u_{i+1},v_j),z(u_{i+1},v_j)],$$

点 $C(u_{i+1},v_{j+1})$ 对应点是

$$C'[x(u_{i+1},v_{j+1}),y(u_{i+1},v_{j+1}),z(u_{i+1},v_{j+1})],$$

点 $D(u_i,v_{j+1})$ 对应点是

$$D'[x(u_i,v_{j+1}),y(u_i,v_{j+1}),z(u_i,v_{j+1})].$$

下面讨论小曲面块 S_{ij} 的"面积"与小矩形区域 R_{ij} 的面积之间的关系:

根据微分中值定理，与点 $A(u_i,v_j)$ 和 $B(u_{i+1},v_j)$ 对应的向量之差 $\boldsymbol{r}(u_{i+1},v_j)-\boldsymbol{r}(u_i,v_j)$，以及与点 $A(u_i,v_j)$ 和 $D(u_i,v_{j+1})$ 对应的向量之差 $\boldsymbol{r}(u_i,v_{j+1})-\boldsymbol{r}(u_i,v_j)$，有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{r}(u_{i+1},v_j)-\boldsymbol{r}(u_i,v_j)\\&=[x(u_{i+1},v_j)-x(u_i,v_j)]\boldsymbol{i}+[y(u_{i+1},v_j)-y(u_i,v_j)]\boldsymbol{j}\\&\qquad+[z(u_{i+1},v_j)-z(u_i,v_j)]\boldsymbol{k}\\&\approx x'_u(u_i,v_j)\Delta u_i\boldsymbol{i}+y'_u(u_i,v_j)\Delta u_i\boldsymbol{j}+z'_u(u_i,v_j)\Delta u_i\boldsymbol{k}\\&=\boldsymbol{r}'_u(u_i,v_j)\Delta u_i.\end{aligned}$$

同理 $$\boldsymbol{r}(u_i,v_{j+1})-\boldsymbol{r}(u_i,v_j)\approx\boldsymbol{r}'_v(u_i,v_j)\Delta v_j.$$

以上二式,近似等号两端的绝对值之差分别是关于 Δu_i 与 Δv_j 的高阶无穷小. 不难看到,向量 $\boldsymbol{r}'_u(u_i,v_j)\Delta u_i$ 与 $\boldsymbol{r}'_v(u_i,v_j)\Delta v_j$ 分别是在曲面 S 上点 A' 关于 u-曲线(曲线 $A'D'$)与 v-曲线(曲线 $A'B'$)的切向量,如图 13.16. 因此,这两个向量所确定的平面与曲面 S 在点 A' 相切. 由向量的外积，向量 $\boldsymbol{r}'_u(u_i,v_j)\Delta u_i$ 与 $\boldsymbol{r}'_v(u_i,v_j)\Delta v$ 所确定的平行四边形的面积应该认为是小曲面 S_{ij}"面积"的近似值,即

$$\begin{aligned}S_{ij}\text{ 的"面积"}&\approx|\boldsymbol{r}'_u(u_i,v_j)\Delta u_i\times\boldsymbol{r}'_v(u_i,v_j)\Delta v_j|\\&=|\boldsymbol{r}'_u(u_i,v_j)\times\boldsymbol{r}'_v(u_i,v_j)|\Delta u_i\Delta v_j.\end{aligned}$$

于是，和数 $\sum\limits_{i,j}|\boldsymbol{r}'_u(u_i,v_j)\times\boldsymbol{r}'_v(u_i,v_j)|\Delta u_i\Delta v_j$ 应该是曲面 S 的

“面积”σ 的近似值.

定义 设有在有界闭区域R的光滑曲面S:

$$\boldsymbol{r}(u,v)=x(u,v)\boldsymbol{i}+y(u,v)\boldsymbol{j}+z(u,v)\boldsymbol{k},\quad (u,v)\in R.$$

若上述和数存在极限,设

$$\sigma=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i,j}|\boldsymbol{r}_u'(u_i,v_j)\times\boldsymbol{r}_v'(u_i,v_j)|\Delta u_i\Delta v_j$$

$$=\iint_R|\boldsymbol{r}_u'\times\boldsymbol{r}_v'|dudv,$$

则称σ是**曲面S的面积**其中 $d\sigma=|\boldsymbol{r}_u'\times\boldsymbol{r}_v'|dudv$ 称为曲面S的**面积微元**.

由外积公式①,有

$$|\boldsymbol{r}_u'\times\boldsymbol{r}_v'|=\sqrt{\boldsymbol{r}_u'^2\boldsymbol{r}_v'^2-(\boldsymbol{r}_u'\cdot\boldsymbol{r}_v')^2}.$$

令

$$E=\boldsymbol{r}_u'^2=x_u'^2+y_u'^2+z_u'^2,$$

$$G=\boldsymbol{r}_v'^2=x_v'^2+y_v'^2+z_v'^2,$$

$$F=\boldsymbol{r}_u'\cdot\boldsymbol{r}_v'=x_u'x_v'+y_u'y_v'+z_u'z_v'.$$

E,G,F 称为曲面的**高斯系数**,有

$$|\boldsymbol{r}_u'\times\boldsymbol{r}_v'|=\sqrt{EG-F^2}.$$

于是,参数方程(13)表示的光滑曲面S的面积

$$\sigma=\iint_R\sqrt{EG-F^2}\,dudv \tag{14}$$

其中 $d\sigma=\sqrt{EG-F^2}\,dudv$ 是面积微元.(14)式是曲面S的面积公式.

由此可见,光滑曲面可求面积.

如果光滑曲面S是定义在有界闭区域D的函数 $z=z(x,y)$.它可化为参数方程

$$x=x,\quad y=y,\quad z=z(x,y),\quad (x,y)\in D.$$

---

① $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$.

有 $E=1+z_x'^2,\qquad G=1+z_y'^2,\qquad F=z_x'z_y'.$

面积微元

$$d\sigma=\sqrt{EG-F^2}\,dxdy=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy.$$

于是，函数 $z=z(x,y)$ 表示的曲面 S 的面积

$$\sigma=\iint_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy. \tag{15}$$

例 13. 求半径为 a 的球面的面积.

解 在直角坐标系中，取球心在原点半径为 a 的球面方程

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

此球面关于三个坐标面都对称．球面的面积 σ 是球面在第一卦限部分面积的 8 倍．球面在第一卦限部分的方程是

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

定义域 R 是圆 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 的四分之一(如图 13.17)．由公式(15)，球面的面积

$$\sigma=8\iint_R\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy,$$

其中

$$z_x'=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad z_y'=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

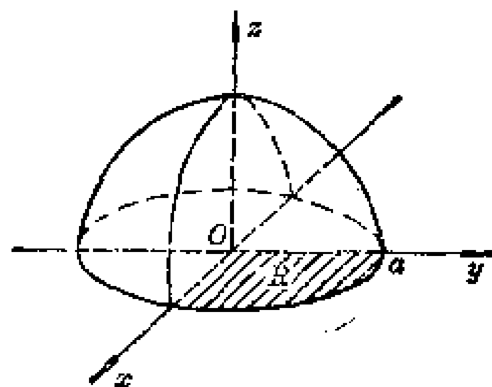


图 13.17

于是，$$\sigma=8a\iint\limits_R\frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

作极坐标变换，设 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$，有

$$\sigma=8a\iint\limits_R\frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=8a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}dr①$$

$$=4\pi a\int_0^a\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}dr=4\pi a^2.$$

球心在原点半径为 a 的球面的参数方程是

$$x=a\sin\varphi\cos\theta,\quad y=a\sin\varphi\sin\theta,\quad z=a\cos\varphi,$$

其中 $R[0\leqslant\theta\leqslant2\pi;0\leqslant\varphi\leqslant\pi]$，如图 13.18，有

$$E=x_\theta'^2+y_\theta'^2+z_\theta'^2=a^2\sin^2\varphi,$$

$$G=x_\varphi'^2+y_\varphi'^2+z_\varphi'^2=a^2.$$

$$F=x_\theta'x_\varphi'+y_\theta'y_\varphi'+z_\theta'z_\varphi'=0.$$

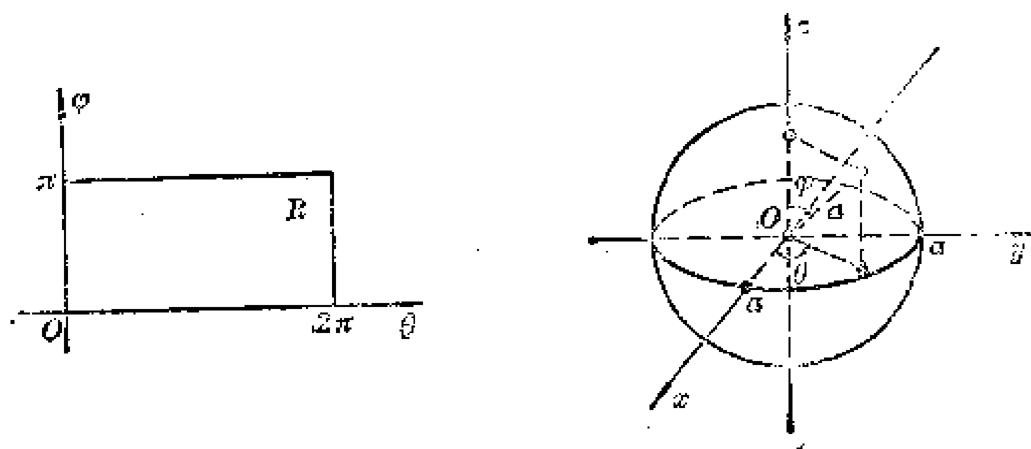


图 13.18

由公式(14)，球面的面积

$$\sigma=\iint\limits_R\sqrt{EG-F^2}\,d\varphi d\theta=a^2\iint\limits_R\sin\varphi d\varphi d\theta$$

① a 是被积函数的瑕点，不难验证，这个瑕积分收敛。

$$=a^2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi=4\pi a^2.$$

例 14. 求在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上被柱面 $x^2+y^2-ax=0$ 所截取部分曲面 S 的面积(如图 13.14).

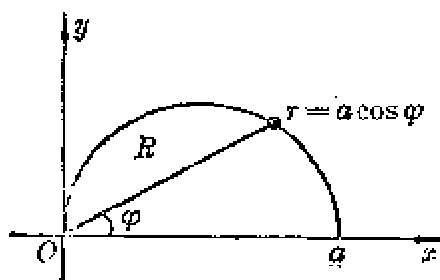


图 13.19

解 曲面 S 关于 xy 平面与 xz 平面都对称. 曲面 S 的面积 σ 是第一卦限那部分曲面面积的四倍. 在第一卦限球面方程是

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

定义域 R 是半圆域: $x^2+y^2\leqslant ax$, 且 $y\geqslant 0$(如图 13.19).

$$z'_x=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad z'_y=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

由公式(15), 曲面 S 的面积

$$\sigma=4\iint\limits_R\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dxdy=4a\iint\limits_R\frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

作极坐标变换, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. 区域 R 的边界方程是

$$r=a\cos\varphi\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)\quad 与\quad \varphi=0.$$

有

$$\sigma=4a\iint\limits_R\frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}dr$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi)d\varphi=2a^2(\pi-2).$$

练 习 题 13.1(二)

1. 求下列二重积分:

(1) $\iint\limits_R (x^3+3x^2y+y^3)\,dxdy$, $R[0\leqslant x\leqslant 1;\ 0\leqslant y\leqslant 1]$.

(2) $\iint\limits_R \sin(x+y)\,dxdy$, $R\left[0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2};0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right]$.

(3) $\iint\limits_R (x+y)e^{x+y}dxdy$, $R[0\leqslant x\leqslant 1;\ 2\leqslant y\leqslant 4]$.

2. 将二重积分 $\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy$ 化为不同次序(先对 x 后对 y 与先对 y 后对 x)的累次积分,其中区域 R 分别是:

(1) 以 $(0,0)$, $(2,1)$, $(-2,1)$ 为顶点的三角形区域.

(2) $x^2+y^2\leqslant 1$. (3) $x^2+y^2\leqslant 2y$.

3. 描绘下列积分区域,并改变累次积分的次序:

(1) $\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)\,dy$. (2) $\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$.

(3) $\int_{-6}^{2} dx\int_{\frac{x^2-4}{4}}^{2-x} f(x,y)\,dy$.

4. 求下列积分:

(1) $\int_0^1 dx\int_x^1 e^{-y^2}dy$, (2) $\int_\pi^{2\pi} dy\int_{y-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx$.

(提示: 改变累次积分的次序)

5. 求下列限定在 R 上的曲顶柱体的体积:

(1) $f(x,y)=x^2y^2$, R 是 $xy=1$, $xy=2$, $y=x$ 与 $y=4x$ 所围成.

(2) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, R 是 $a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2$, $a<b$.

6. 求下列曲线围成区域的面积:

(1) 椭圆 $(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$, $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$.

(2) $y^2=2px$, $y^2=2qx$, $x^2=2ry$, $x^2=2sy$, $0<p<q$; $0<r<s$.

7. 证明下列等式:

(1) $\iint\limits_R f(x+y)\,dxdy=\int_{-1}^1 f(u)\,du$, R: $|x|+|y|\leqslant 1$.

(2) $\iint\limits_R f(xy)\,dxdy=\ln 2\int_1^2 f(u)\,du$,　R 是 $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=4x$ 所围成.

8. 设 $I(r)=\int_{-r}^{r}e^{-u^2}du$.

(1) 证明, $I^2(r)=\iint\limits_R e^{-(x^2+y^2)}dxdy$,

其中 $R[-r\leqslant x\leqslant r,\ -r\leqslant y\leqslant r]$.

(2) 若 D_1 与 D_2 分别是正方形区域 R 的内切圆域与外接圆域, 则

$$\iint\limits_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy<I^2(r)<\iint\limits_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

(3) 求二重积分 $\iint\limits_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ 与 $\iint\limits_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$. (见例 10).

(4) 证明: $\lim\limits_{r\to+\infty} I(r)=\sqrt{\pi}$, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}\quad 或\quad \int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

9. 求下列曲面的面积:

(1) 柱面 $x^2+z^2=a^2$ 与 $y^2+z^2=a^2$ 所围成立体的表面积.

(2) 环面

$x=(a+b\cos\varphi)\sin\theta$,　$y=(a+b\cos\varphi)\cos\theta$,　$z=b\sin\varphi$,

$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$,　$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$,　$0<b<a$.

*　　*　　*　　*

10. 求下列二重积分:

(1) $\iint\limits_R |x+y|\,dxdy$,　$R[-1\leqslant x\leqslant 1;\ -1\leqslant y\leqslant 1]$.

(2) $\iint\limits_R |\cos(x+y)|\,dxdy$, R　$[0\leqslant x\leqslant\pi;\ 0\leqslant y\leqslant\pi]$.

(3) $\iint\limits_R [x+y]\,dxdy$,　$R[0\leqslant x\leqslant 2;\ 0\leqslant y\leqslant 2]$.

11. 设函数 $f(x,y)$ 定义在 $R[0\leqslant x\leqslant 1;\ 0\leqslant y\leqslant 1]$, 且 $\forall y\in[0,1]$,

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x\ 是无理数,\\ 3y^2, & x\ 是有理数.\end{cases}$$

证明　(1) $f(x,y)$ 在 R 不可积.

(2) 累次积分$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$ 存在.

(3) 先对x后对y的累次积分不存在.

12. 证明：若m和n为正整数，且其中至少有一个是奇数，则

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n dxdy=0.\quad (a>0)$$

13. 设函数 $f(x,y)$连续，$F(t)=\iint\limits_{R_t} f(x,y)dxdy$，其中 $R_t: x^2+y^2\leqslant t^2$，求 $F'(t)$.

14. 证明：若函数$f(x,y)$在$R[a_1\leqslant x\leqslant b_1;\ a_2\leqslant y\leqslant b_2]$连续，$\forall(\alpha,\beta)\in R$，令 $R_{\alpha\beta}[a_1\leqslant x\leqslant\alpha, a_2\leqslant y\leqslant\beta]$，则

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\iint\limits_{R_{\alpha\beta}} f(x,y)dxdy=f(\alpha,\beta).$$

§13.2. 三 重 积 分

一、三重积分概念

三重积分不仅是二重积分的推广，也是解决某些实际问题所必需. 例如，计算物体的质量等.

设三维空间有可求体积的有界物体 V①. 如果体V上每一点 $P(x,y,z)$的密度是三元函数 $\rho(x,y,z)$，求体V的质量.

首先将体V任意分成n个小体：

$$V_1, V_2, \cdots, V_n.$$

将此分法表为T. 设小体V_k的体积是ΔV_k. 在小体V_k上任取一点$P_k(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)$. 以点$P_k$的密度$\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)$近似代替小体$V_k$上每一点的密度，则$\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta V_k$应是小体$V_k$质量的近似值 $(k=1,2,\cdots,n)$. 于是，和数

$$\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta V_k$$

① 本书所说的有界体都是可求体积的.

应是体 V 质量的近似值. 设分法 T 的 n 个小体的直径①最大者是 $\|T\|$, 即

$$\|T\| = \max\{d(V_1), d(V_2), \cdots, d(V_n)\}.$$

于是, 体 V 的质量 m 应该是

$$m = \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta V_k. \tag{1}$$

下面抽象地讨论(1)式的极限, 就有三重积分的定义:

设三元函数 $f(x,y,z)$ 在有界闭体 V 有定义. 用分法 T 将 V 分成 n 个小体: $V_1, V_2, \cdots, V_n$. 设它们的体积分别是 $\Delta V_1, \Delta V_2, \cdots, \Delta V_n$. 在小体 V_k 上任取一点 $P_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 作和

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta V_k. \tag{2}$$

称为三元函数 $f(x,y,z)$ 在体 V 的**积分和**.

令 $\quad \|T\| = \max\{d(V_1), d(V_2), \cdots, d(V_n)\}.$

定义 设三元函数 $f(x,y,z)$ 在有界闭体 V 有定义. 若当 $\|T\| \to 0$ 时, 三元函数 $f(x,y,z)$ 在体 V 的积分和(2)存在极限 J (数 J 与分法 T 无关, 也与点 P_k 的取法无关), 即

$$\lim_{\|T\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta V_k = J,$$

则称函数 $f(x,y,z)$ 在体 V **可积**, J 是函数 $f(x,y,z)$ 在体 V 的**三重积分**, 表为

$$\iiint_V f(x,y,z) dV \quad \text{或} \quad \iiint_V f(x,y,z) dx dy dz,$$

其中体 V 称为**积分区域**, $f(x,y,z)$ 称为**被积函数**, dV 或 $dxdydz$ 称

---

① 有界体 V 的任意两点距离的上确界, 即 $\sup\{|P-Q| \mid P, Q \in V\}$, 称为体 V 的直径, 表为 $d(V)$. 例如, 长方体的直径是它的斜对角线之长.

为体积微元.

根据三重积分定义，不难看到，如果三维空间中物体 V 上每点 $P(x,y,z)$ 的密度是三元函数 $\rho(x,y,z)$，则体 V 的质量 m 是三重积分，即

$$m=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\ \eta_k,\zeta_k)\Delta V_k=\iiint\limits_V\rho(x,y,z)dxdydz.$$

关于三重积分的存在性及其性质，读者可仿照二重积分的存在性及其性质一一写出，并可用相同的方法予以证明.

特别是，若 $\forall(x,y,z)\in V$，有 $f(x,y,z)\equiv 1$，则三重积分

$$\iiint\limits_V dxdydz$$

就是体 V 的体积.

二、三重积分的计算

求三重积分的方法是将三重积分化成一次定积分与一次二重积分，从而又进一步可将三重积分化成三次定积分. 在一定条件下，三重积分可化成三次定积分的证明与二重积分可化成二次定积分的证法相同，从略. 这里只给出求三重积分安置积分限的方法.

设体 V 是由上、下两个曲面及母线平行 z 轴的柱面所围成(如图 13.20). 体 V 在 xy 平面上的投影是区域 R. 下、上两个曲面分别是 R 上的连续函数:

$$z=z_1(x,y)\quad 与\quad z=z_2(x,y).$$

设区域 R 在 x 轴上的投影是区间 $[a,b]$. 围成区域 R 的下、上两条曲线分别是区间 $[a,b]$ 上的连续函数:

$$y=\varphi_1(x)\quad 与\quad y=\varphi_2(x).$$

函数 $f(x,y,z)$ 在体 V 上的三重积分可化成三次定积分，即

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz. \quad (3)$$

或
$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\iint_R dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz.$$

在(3)式中，$\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz$ 表示当$(x,y)\in R$暂时固定时，对z积分．在体V内，z的变化由$z_1(x,y)$到$z_2(x,y)$．这是在体V内沿平行于z轴的线段上的积分．其次，当$x\in[a,b]$暂时固定时，对y积分，即$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz$，在体$V$内(或在投影区域$R$内)，$y$的变化由$\varphi_1(x)$到$\varphi_2(x)$．这是在体$V$内完成了体$V$与过点$x$且垂直于$x$轴的平面截口区域上的积分．最后，对$x$积分，即$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz$，在体$V$内(或在投影区域$R$内)，$x$的变化由$a$到$b$．完成了在体$V$上的积分(如图 13.20)．

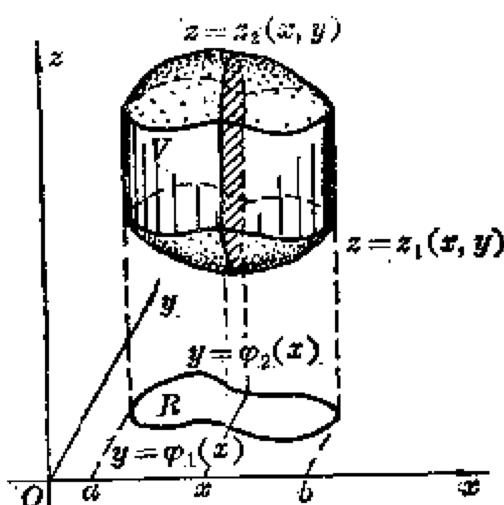


图 13.20

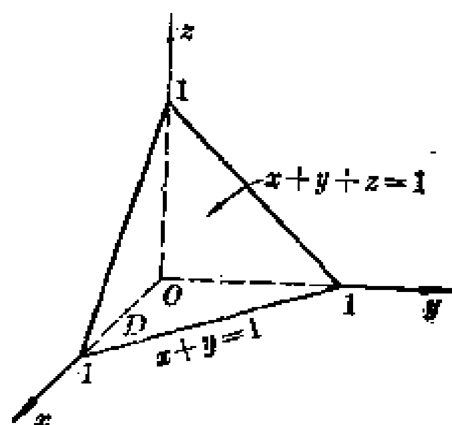


图 13.21

例1． 求平面 $x=0, y=0, z=0$ 与 $x+y+z=1$ 所围成的四面体的体积(见§13.1例4)．

解 已知四面体的体积I是三重积分

$$I=\iiint_V dxdydz,$$

其中体V是平面$x=0$, $y=0$, $z=0$与$x+y+z=1$所围成（如图13.21）.

如果先对z作积分，将体V投影到xy平面上，投影区域D是直线$x=0, y=0, x+y=1$所围成的三角形区域．在区域D上任取一点(x,y)，在体V内，z的变化由$z=0$到$z=1-x-y$．其次对y积分，将区域D投影到x轴上是区间$[0,1]$．当$x\in[0,1]$，在区域D内，y的变化由$y=0$到$y=1-x$．最后对x积分．显然，x的变化从0到1，即

$$
\begin{aligned}
I&=\iiint\limits_{V}dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}dz\\
&=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy=\int_0^1\left(y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x}dx\\
&=\int_0^1\left[1-x-x(1-x)-\frac{1}{2}(1-x)^2\right]dx\\
&=\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}x^2\right)dx=\frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

例2. 求三重积分

$$\iiint\limits_{V}zdxdydz,$$

其中体V是上半椭球体：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$, $z\geqslant 0$（如图13.22）.

解 如果先对z积分，将体V投影到xy平面上，投影区域D是椭圆域$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$．在区域$D$上任取一点$(x,y)$，在体$V$内，$z$的变化由$z=0$到$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$．其次对$y$积分，将区域$D$投影到$x$轴上是区间$[-a, a]$．当$x\in[-a, a]$，在区域$D$内，$y$的变化由$y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$到$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$．最后对$x$积分，显然，$x$的变

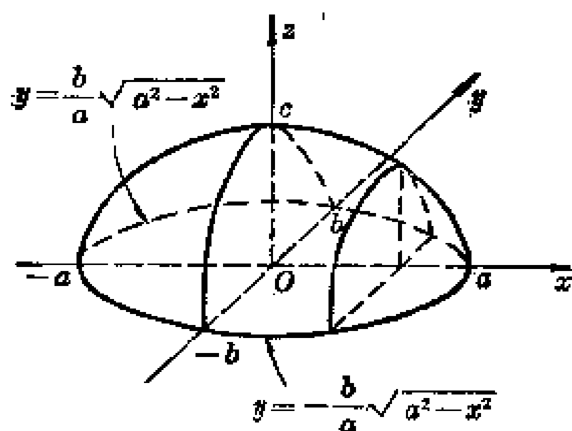


图 13.22

化由 $-a$ 到 a，即

$$\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}z\,dz$$

$$=\frac{c^2}{2}\int_{-a}^{a}dx\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy$$

$$=c^2\int_{-a}^{a}dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy①$$

$$=\frac{2bc^2}{3a^3}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{4bc^2}{3a^3}\int_0^{a}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{\pi}{4}abc^2.$$

三、三重积分的换元

对各种积分来说，换元是简化积分计算的一种重要方法．关于三重积分的换元（或变换）公式可仿照二重积分换元公式写出来，并可用同样的方法予以证明．本段只给出三重积分换元公式，

① 因为椭圆区域关于 x 轴对称，被积函数又是关于 y 的偶函数，所以

$$\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=2\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy.$$

注意，如果积分区域关于 x 轴对称，而被积函数不是关于 y 的偶函数，不能写成此式．

证明从略.

若函数 $f(x,y,z)$在有界闭体V 连续,则三重积分

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$

存在. 设函数组

$$\begin{cases}x=x(u,v,w),\\ y=y(u,v,w),\\ z=z(u,v,w),\end{cases} \tag{4}$$

在 uvw 空间体 V' 有定义. 若满足下列条件:

1) 函数 $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$所有的偏导数在 V' 连续;

2) $\forall P'(u,v,w)\in V'$,函数组(4)的函数行列式不是 0, 即

$$\left.\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|_{P'}\neq 0;$$

3) 函数组(4) 将 uvw 空间中的体 V' 一一对应地变换为 xyz 空间中的体 V,

则有三重积分的换元公式

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$

$$=\iiint_{V'} f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw. \tag{5}$$

例 3. 求六个平面

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=\pm h_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z=\pm h_2,\\ a_3x+b_3y+c_3z=\pm h_3,\end{cases}\qquad \Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0,$$

所围成的平行六面体V 的体积, 其中 a_i,b_i,c_i,h_i 都是常数,且 $h_i>0(i=1,2,3)$.

解 已知平行六面体V的体积I是三重积分

$$I=\iiint_V dxdydz.$$

设 $\begin{cases}u=a_1x+b_1y+c_1z,\\v=a_2x+b_2y+c_2z,\\w=a_3x+b_3y+c_3z.\end{cases}$ 有 $\begin{cases}u=\pm h_1,\\v=\pm h_2,\\w=\pm h_3.\end{cases}$

于是，xyz空间中的平行六面体变成uvw空间中的长方体：

$$-h_1\leqslant u\leqslant h_1,\quad -h_2\leqslant v\leqslant h_2,\quad -h_3\leqslant w\leqslant h_3.$$

由函数行列式的性质，有

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}=\frac{1}{\Delta}.$$

由公式(5)，有

$$I=\iiint_V dxdydz=\frac{1}{|\Delta|}\iiint_{V'}dudvdw$$

$$=\frac{1}{|\Delta|}\int_{-h_1}^{h_1}du\int_{-h_2}^{h_2}dv\int_{-h_3}^{h_3}dw=\frac{8}{|\Delta|}h_1h_2h_3.$$

在三重积分的换元中有两个最常用的变换：

1. 柱面坐标变换.

设
$$\begin{cases}x=r\cos\varphi,\\y=r\sin\varphi,\\z=z,\end{cases}\tag{6}$$

其中$0\leqslant r<+\infty$，$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$，$-\infty<z<+\infty$，称为**柱面坐标**(如图13.23)。构成柱面坐标的三族坐标面：$r=$常数，是以z轴为中心轴的圆柱面；$\varphi=$常数，是以z轴为边缘的半平面；$z=$常数，是平行于xy坐标面的平面.

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r,$$

有 $$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{V'} f[r\cos\varphi, r\sin\varphi, z]\,rdrd\varphi dz, \tag{7}$$

其中体 V' 是体 V 在柱面坐标变换 (6) 下所对应的 $r\varphi z$ 空间中的体.

一般来说，当围成体V的曲面的函数或被积函数含有“x^2+y^2”或“$x^2+y^2+z^2$”时，可考虑使用柱面坐标变换(6).

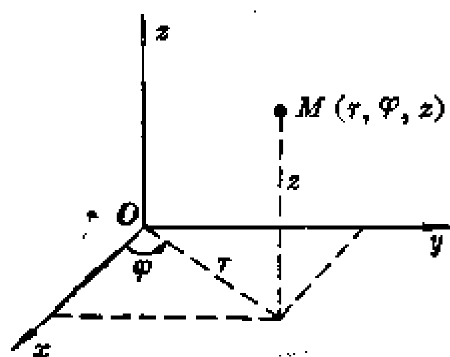


图 13.23

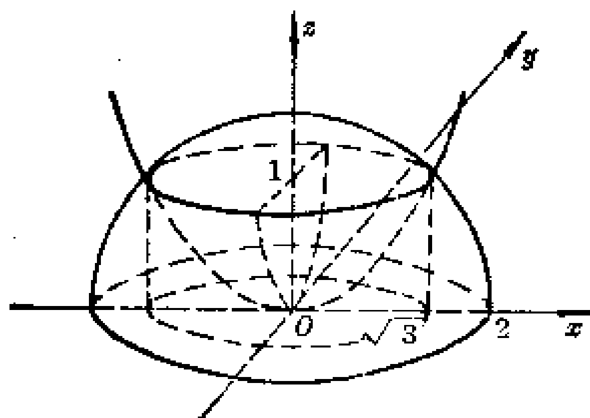


图 13.24

例 4. 求三重积分

$$\iiint\limits_{V} z\,dxdydz,$$

其中体 V 由上半球面 $x^2+y^2+z^2=4(z\geqslant 0)$ 和旋转抛物面 $x^2+y^2=3z$ 所围成(如图 13.24).

解 围成体 V 的上、下曲面分别是

$$z=\sqrt{4-x^2-y^2} \quad 与 \quad z=\frac{1}{3}(x^2+y^2).$$

这两个曲面的交线(联立方程组的解)：$z=1, x^2+y^2=3$，即平面 $z=1$ 上的圆 $x^2+y^2=3$. 于是，体 V 在 xy 平面上的投影是圆域 $x^2+y^2\leqslant 3$. 作柱面坐标变换，设

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi,\\ z=z.\end{cases}\qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}=r.$$

曲面方程和圆 $x^2+y^2=3$ 方程分别是

$$z=\sqrt{4-r^2},\quad z=\frac{r^2}{3}\quad 及\quad r^2=3.$$

于是，$\frac{r^2}{3}\leqslant z\leqslant\sqrt{4-r^2}$，$0\leqslant r\leqslant\sqrt{3}$，$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. 由公式(7)，有

$$\iiint\limits_V z\,dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}dr\int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}}zr\,dz=\frac{13}{4}\pi.$$

例 5. 求抛物面 $x^2+y^2=az(a>0)$，柱面 $x^2+y^2=2ax$ 与平面 $z=0$ 所围成体 V 的体积.

解 体 V 在 xy 平面上的投影是圆域 $x^2+y^2\leqslant 2ax$. 作柱面坐标变换，设

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi,\\ z=z.\end{cases}\qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}=r.$$

于是，$0\leqslant z\leqslant\frac{r^2}{a}$，$0\leqslant r\leqslant 2a\cos\varphi$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$. 体 V 的体积

$$I=\iiint\limits_V dxdydz=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r\,dr\int_0^{\frac{r^2}{a}}dz$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r\,dr\int_0^{\frac{r^2}{a}}dz=\frac{2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^3dr$$

$$=8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,d\varphi=\frac{3}{2}\pi a^3.$$

2. 球面坐标变换

设
$$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi,\end{cases} \tag{8}$$

其中$0\leqslant r<+\infty$,$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$,$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$,称为**球面坐标**(如图13.25).构成球面坐标的三组坐标面:$r=$常数,是以原点为心的球面;$\varphi=$常数,是以原点为顶点以z轴为中心轴的圆锥面;$\theta=$常数,是以z轴为边缘的半平面.注意,角φ是以z轴为始边到OM的夹角.

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\end{vmatrix}$$
$$=r^2\sin\varphi.$$

因为$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$,所以$|r^2\sin\varphi|=r^2\sin\varphi$.有

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$
$$=\iiint\limits_{V'} f[r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi]\cdot r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta, \tag{9}$$

其中体V'是体V在球面坐标变换(8)下所对应的$r\varphi\theta$空间中的体.

一般来说,当围成体V的曲面函数或被积函数含有"$x^2+y^2+z^2$"或"x^2+y^2",可考虑使用球面坐标变换.特别是,当体V是以原点为心以a为半径的球体:$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$,应用球面坐标变换最为简便.由球面坐标变换(8),有

$$x^2+y^2+z^2=r^2(\sin^2\varphi\cos^2\theta+\sin^2\varphi\sin^2\theta+\cos^2\varphi)=r^2.$$

于是,球体:$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$在球面坐标变换下变换为$r\varphi\theta$空间的长方体:

$$0\leqslant r\leqslant a,\quad 0\leqslant\theta\leqslant2\pi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi.$$

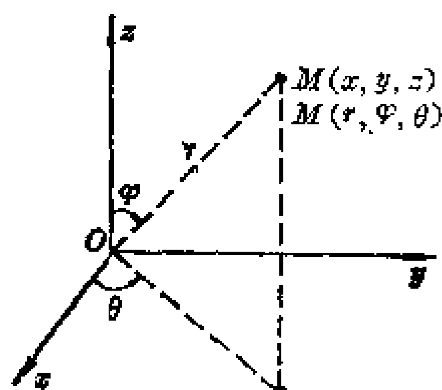


图 13.25

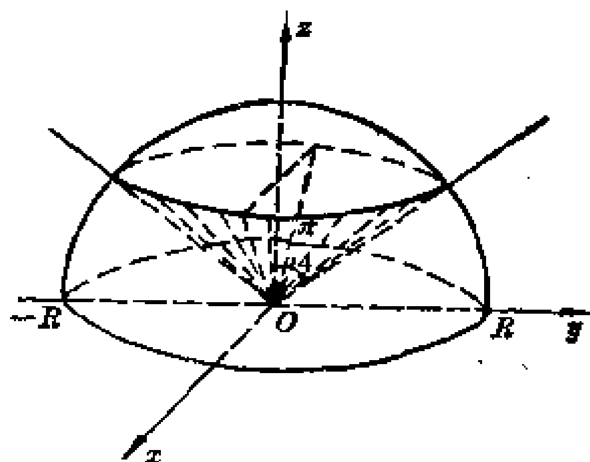


图 13.26

例 6. 求三重积分

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz,$$

其中体 V 由圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2\ (z\geqslant 0)$ 所围成(如图 13.26).

解 设 $\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta, \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z=r\cos\varphi. \end{cases}$ $\qquad \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=r^2\sin\varphi.$

圆锥面与上半球面在球面坐标中的方程分别是

$$\varphi=\frac{\pi}{4} \quad 与 \quad r=R.$$

于是,体 V 经过球面坐标变换对应的体 V' 是

$$0\leqslant r\leqslant R,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

由公式(9),有

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^R r^2\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^R r^4dr=\frac{2-\sqrt{2}}{5}\pi R^5.$$

例 7. 求椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ 的体积.

解 作广义球面坐标变换，即

$$\begin{cases}x=ar\sin\varphi\cos\theta,\\ y=br\sin\varphi\sin\theta,\\ z=cr\cos\varphi.\end{cases}\qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=abcr^2\sin\varphi.$$

椭球体 V 在广义球面坐标变换下对应于 $r\varphi\theta$ 空间的长方体：

$$0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

由公式(5)，椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ 的体积

$$I=\iiint\limits_V dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 abcr^2\sin\varphi dr$$

$$=\frac{4}{3}abc\pi.$$

四、简单应用

1. 物体的重心坐标

设三维空间有 n 个质量分别是 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 的质点组，它们的坐标分别是 (ξ_1,η_1,ζ_1)，(ξ_2,η_2,ζ_2)，$\cdots$，(ξ_n,η_n,ζ_n). 由静力学知，这个质点组的重心是 (ξ,η,ζ)，其坐标分别是

$$\xi=\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i m_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\qquad \eta=\frac{\sum_{i=1}^{n}\eta_i m_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\qquad \zeta=\frac{\sum_{i=1}^{n}\zeta_i m_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}.$$

如果已知三维空间的有界闭体 V 上每一点 (x,y,z) 的密度是连续函数 $\rho(x,y,z)$. 将体 V 任意分成 n 个小体：$V_1,V_2,\cdots,V_n$，分法表为 T. 小体 V_i 的体积表为 ΔV_i. 在小体 V_i 上任意取一点 $P_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$. 于是，小体 V_i 的质量可近似表为

$$\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i.$$

将体 V 近似地看作是由 n 个质点组成. 于是, 体 V 的重心 (α,β,γ) 的坐标分别近似地是

$$\alpha\approx\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i}{\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i},$$

$$\beta\approx\frac{\sum_{i=1}^{n}\eta_i\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i}{\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i},$$

$$\gamma\approx\frac{\sum_{i=1}^{n}\zeta_i\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i}{\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i}.$$

当 $\|T\|\to 0$ 时, 它们都存在极限, 即

$$\alpha=\frac{\iiint\limits_V x\rho(x,y,z)dv}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dv},\qquad \beta=\frac{\iiint\limits_V y\rho(x,y,z)dv}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dv},$$

$$\gamma=\frac{\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)dv}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dv}.$$

如果体 V 是均匀的, 即密度函数 $\rho(x,y,z)$ 是常数, 不妨设 $\rho(x,y,z)\equiv 1$, 体 V 的体积是 I, 则体 V 重心 (α,β,γ) 坐标分别是

$$\alpha=\frac{1}{I}\iiint\limits_V xdv,\qquad \beta=\frac{1}{I}\iiint\limits_V ydv,\qquad \gamma=\frac{1}{I}\iiint\limits_V zdv.\tag{10}$$

例 8. 求密度函数 $\rho(x,y,z)\equiv 1$ 的均匀上半球体 V：$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 的重心.

解　因为均匀半球体对 yz 与 zx 坐标面都对称，所以在公式(10)中，$\alpha=\beta=0$. 下面求γ. 设 I 是半径为 a 的半球体积，已知 $I=\frac{2}{3}\pi a^3$. 求三重积分 $\iiint\limits_V z dv$. 作柱面坐标变换，设

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z.$$

有

$$\iiint\limits_V z dv=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r dr\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}}z dz=\frac{1}{4}\pi a^4.$$

$$\gamma=\frac{1}{I}\iiint\limits_V z dv=\frac{3}{8}a.$$

于是，均匀上半球的重心是$\left(0,0,\frac{3}{8}a\right)$.

2. 物体的转动惯量

在三维空间有 n 个质量分别是 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 的质点组，它们的坐标分别是$(\xi_1,\eta_1,\zeta_1),(\xi_2,\eta_2,\zeta_2),\cdots,(\xi_n,\eta_n,\zeta_n)$. 这个质点组绕着某一个直线 l 旋转. 设这 n 个质点到直线 l 的距离分别是 $d_1,d_2,\cdots,d_n$. 由力学知，质点组对直线 l 的转动惯量

$$J=\sum_{i=1}^n d_i^2 m_i.$$

特别是，当 l 分别是 x 轴，y 轴，z 轴时，则质点组分别对 x 轴，y 轴，z 轴的转动惯量 J_x,J_y,J_z 分别是

$$J_x=\sum_{i=1}^n(\eta_i^2+\zeta_i^2)m_i,\qquad J_y=\sum_{i=1}^n(\xi_i^2+\zeta_i^2)m_i,$$

$$J_z=\sum_{i=1}^n(\xi_i^2+\eta_i^2)m_i.$$

设三维空间中有界闭体 V 上任意一点 (x,y,z) 的密度是连续

函数 $\rho(x,y,z)$，求它对 x 轴，y 轴与 z 轴的转动惯量。

应用微元法写出转动惯量的公式. 在体 V 上任取一点 (x,y,z). 在"该点上的体积"是 dv(即点 (x,y,z) 的体积微元)，"该点的质量"是 $\rho(x,y,z)dv$. 该点到 x 轴的距离是 $\sqrt{y^2+z^2}$. 于是，该质点到 x 轴的转动惯量就是 $(y^2+z^2)\rho(x,y,z)dV$. 将体 V 上任意一点 (x,y,z) 处的质量关于 x 轴的转动惯量在体 V 上"连续相加"(即三重积分)，就是体 V 对 x 轴的转动惯量 J_x，即

$$J_x=\iiint\limits_V(y^2+z^2)\rho(x,y,z)dv.$$

同样，体 V 关于 y 轴和 z 轴的转动惯量 J_y 与 J_z 分别是

$$J_y=\iiint\limits_V(z^2+x^2)\rho(x,y,z)dv$$

与
$$J_z=\iiint\limits_V(x^2+y^2)\rho(x,y,z)dv.$$

例 9. 求密度函数 $\rho(x,y,z)\equiv1$ 的均匀球体 V: $x^2+y^2+z^2\leqslant1$ 关于三个坐标轴的转动惯量.

解 由上面公式知，球体 V 关于三个坐标轴的转动惯量分别是

$$J_x=\iiint\limits_V(y^2+z^2)dv,\quad J_y=\iiint\limits_V(z^2+x^2)dv,$$

$$J_z=\iiint\limits_V(x^2+y^2)dv.$$

因为球体关于三个坐标面对称，被积函数关于每个变量都是偶函数，所以 $J_x=J_y=J_z$. 设 $J=J_x=J_y=J_z$，有

$$3J=\iiint\limits_V2(x^2+y^2+z^2)dv$$

或
$$J=\frac{2}{3}\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)dv.$$

作球面坐标变换，有

$$J=\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^4dr=\frac{8}{15}\pi.$$

即 $J_x=J_y=J_z=\frac{8}{15}\pi$.

练 习 题 13.2

1. 求下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz$, 其中 V 是曲面 $z=xy$ 与平面 $y=x, x=1, z=0$ 所围成.

(2) $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 V 是平面 $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$ 所围成.

(3) $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, 其中

$V=\{(x, y, z)|x^2+y^2+z^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0\}$.

(4) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, 其中 V 是曲面 $x^2+y^2=z^2$ 与 $z=1$ 所围成.

2. 将下列三重积分按不同的次序安置积分限:

(1) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}f(x,y,z)dz$,

(2) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)dz$.

3. 用适当的变换求下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\ dxdydz$, 其中 V 是曲面 $x^2+y^2=2z$ 与平面 $z=2$ 所围成.

(2) $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\ dxdydz$, 其中 V 是曲面 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 与平面 $z=0$, $z=a, y=0$ 所围成 $(a>0)$.

(3) $\iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dxdydz$，其中 V 是椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$.

(4) $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz$，其中 V 是曲面 $z=\sqrt{b^2-x^2-y^2}$ 与 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(b>a>0)$ 及平面 $z=0$ 所围成。

4. 求下列曲面所围成体的体积：

(1) $z=xy$, $x^2+y^2=x$, $z=0$.

(2) $z=x^2+y^2$, $z=2(x^2+y^2)$, $y=x, y=x^2$.

(3) $x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2+z^2=b^2, x^2+y^2=z^2(z\geqslant 0)$ $(0<a<b)$.

(4) $(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=h^2$，其中 $h>0$,

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

5. 求下列曲面所围成的均匀物体(设 $\rho(x,y,z)\equiv 1$)的重心坐标：

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$, $z=c$ $(c>0)$

(2) $z=x^2+y^2$, $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $|x|+|y|=1$.

6. 求下列曲面所围成的均匀物体(设 $\rho(x, y, z)\equiv 1$)关于 z 轴的转动惯量：

(1) $z=x^2+y^2$, $|x|+|y|=1$, $z=0$.

(2) $x^2+y^2+z^2=2$, $x^2+y^2=z^2$ $(z>0)$.

*　　*　　*　　*

7. 证明：

$$\int_0^x dv\int_0^v du\int_0^u f(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)\,dt.$$

8. 设 $F(t)=\iiint\limits_V f(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$，其中 V: $x^2+y^2+z^2\leqslant t^2$，f 是可微函数，求 $F'(t)$.

9. 设函数 $f(x,y,z)$ 在体 V: $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 连续，V_r: $x^2+y^2+z^2\leqslant r^2$ $(0<r\leqslant 1)$. 求极限

$$\lim_{r\to 0}\frac{3}{r^3}\iiint_{V_r} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

10. 求下列曲面所围成的体积:

(1) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$.

(2) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x}{h}$ $(h>0)$.

11. 求三重积分

$$\iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}},$$

其中V是球体$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$,且$a>1$.(提示:用球面坐标替换)

12. 证明:若函数$f(x,y,z)$连续,则

$$\iiint_V f(ax+by+cz)\,dxdydz=\iiint_{V'} f(ku)\,dudvdw,$$

其中V: $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$; V': $u^2+v^2+w^2\leqslant 1$; $k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.(提示:设$u=\frac{a}{k}x+\frac{b}{k}y+\frac{c}{k}z$. u轴的方向余弦是$l_1=\frac{a}{k}$, $m_1=\frac{b}{k}$, $n_1=\frac{c}{k}$.任选v轴与w轴,使u,v,w构成直角坐标系. 设$u=l_1x+m_1y+n_1z$, $v=l_2x+m_2y+n_2z$, $w=l_3x+m_3y+n_3z$,这是线性变换. $u^2+v^2+w^2=x^2+y^2+z^2$. $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ $=\pm 1$(正交变换))

第十四章　曲线积分与曲面积分

§14.1　曲 线 积 分

一、第一型曲线积分

首先讨论物质曲线的质量．如果在 xy 平面上有一条可求长的曲线 C(如图 14.1)，已知曲线 C 上点 (x,y) 的线密度是 $\rho(x,y)$，求曲线 C 的质量．

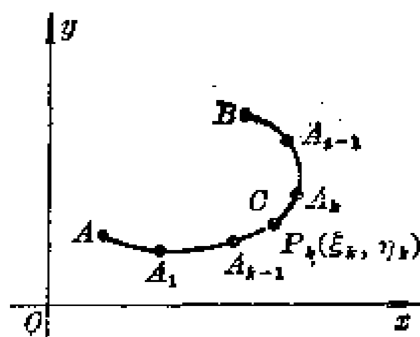


图　14.1

在曲线 C 上依次任取一组点：

$$A=A_0, A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_n=B,$$

表为分法 T．它们将曲线 C 分成 n 个小弧：

$$\widehat{A_0A_1}, \widehat{A_1A_2}, \cdots, \widehat{A_{k-1}A_k}, \cdots, \widehat{A_{n-1}A_n}.$$

设第 k 个小弧 $\widehat{A_{k-1}A_k}$ 的长是 Δs_k，在其上任取一点 $P_k(\xi_k, \eta_k)$．以点 P_k 的线密度 $\rho(\xi_k,\eta_k)$ 近似代替第 k 个小弧 $\widehat{A_{k-1}A_k}$ 上每一点的线密度．于是，$\rho(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$ 应是第 k 个小弧 $\widehat{A_{k-1}A_k}$ 质量的近似值，$k=1,2,\cdots,n$．它们的和，即

$$\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$$

应是曲线 C 质量的近似值．设 $\lambda(T)$ 是分法 T 的 n 个小弧之长中最大者．$\lambda(T)$ 越小，$\sum\limits_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$ 越接近于曲线 C 的质量．于是，曲线 C 的质量 m 应该是

$$m = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k.$$

抽去上式的物理意义就得到第一型曲线积分.

设二元函数 $f(x,y)$ 在 xy 平面上一条可求长曲线 $C(A,B)$①上有定义. 用任意分法 T,将曲线 C 依次分成n个小弧:

$$\widehat{A_0A_1}, \widehat{A_1A_2}, \cdots, \widehat{A_{n-1}A_n}, \quad 其中 A_0 = A, A_n = B.$$

设它们的弧长分别是 $\Delta s_1, \Delta s_2, \cdots, \Delta s_n$. 在小弧$\widehat{A_{k-1}A_k}$上任取一点$P_k(\xi_k, \eta_k)$, $k=1,2,\cdots,n$, 作和

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k, \qquad (1)$$

称为二元函数 $f(x,y)$在曲线 $C(A,B)$的**积分和**.

令 $$\lambda(T) = \max\{\Delta s_1, \Delta s_2, \cdots, \Delta s_n\}.$$

定义 设二元函数 $f(x,y)$在可求长曲线 $C(A,B)$有定义. 若当 $\lambda(T)\to 0$ 时, 二元函数 $f(x,y)$在曲线 $C(A,B)$ 的积分和(1)存在极限 I,即

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} P_n = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k = I,$$

则称 I 是函数 $f(x,y)$在曲线 C 的**第一型曲线积分**,表为

$$I = \int_{C(A,B)} f(x,y)\,ds,$$

其中 ds 是弧长微元.

不难看到, 在 xy 平面上一条物质曲线 $C(A,B)$, 若其上每一点(x,y)的线密度是 $\rho(x,y)$, 则物质曲线 C 的质量m是第一型曲线积分,即

---

① 下面所讨论的曲线都是光滑的或逐段光滑的, 当然是可求长的. 不再重述.

$$m=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k=\int_{C(A,B)}\rho(x,y)ds.$$

根据第一型曲线积分定义，不难证明，第一型曲线积分有下述性质(仅列举其中四个性质)：

1. $\int_{C(A,B)}f(x,y)ds=\int_{C(B,A)}f(x,y)ds$，

即第一型曲线积分与曲线 C 的方向(由 A 到 B 或由 B 到 A) 无关. 事实上，在和数 P_n 中小弧 $\widehat{A_{k-1}A_k}$ 之长 Δs_k 与曲线 C 的方向无关.

2. $$\int_{C(A,B)}[f(x,y)\pm g(x,y)]ds$$
$$=\int_{C(A,B)}f(x,y)ds\pm\int_{C(A,B)}g(x,y)ds.$$

3. $\int_{C(A,B)}kf(x,y)ds=k\int_{C(A,B)}f(x,y)ds$，其中 k 是常数.

4. $\int_{C(A,B)}f(x,y)ds=\int_{C(A,P)}f(x,y)ds+\int_{C(P,B)}f(x,y)ds.$

定理1. 若曲线$C(A,B):x=\varphi(t),y=\psi(t),\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，是光滑的，即 $\varphi'(t),\psi'(t)$在$[\alpha,\beta]$连续，且不同时为0，函数 $f(x,y)$在 C 连续，则函数 $f(x,y)$在 $C(A,B)$存在第一型曲线积分，且

$$\int_{C(A,B)}f(x,y)ds=\int_{\alpha}^{\beta}f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt. \tag{2}$$

证明 给区间$[\alpha,\beta]$任意分法 T，分点依次是 $\alpha=t_0<t_1<t<\cdots<t_n=\beta$. 第 k 个小区间$[t_{k-1},t_k]$对应曲线 C 上第 k 个小弧 $\widehat{A_{k-1}A_k}$，设其长是Δs_k. 由 § 8.5 弧长公式与定积分中值定理，有

$$\Delta s_k=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt=\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\tau_k)}\Delta t_k,$$

其中 $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$，$t_{k-1}\leqslant\tau_k\leqslant t_k$. 在$[t_{k-1},t_k]$上任取一点 η_k，在曲线 C 上对应点是 $P[\varphi(\eta_k),\psi(\eta_k)]$. 作和

$$P_n=\sum_{k=1}^{n}f[\varphi(\eta_k),\psi(\eta_k)]\Delta s_k$$

$$=\sum_{k=1}^{n}f[\varphi(\eta_k),\psi(\eta_k)]\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\tau_k)}\Delta t_k. \quad (3)$$

注意上面等式中 η_k 与 τ_k 都属于$[t_{k-1},t_k]$，但是不一定相等．为此将它改写为

$$P_n=\sum_{k=1}^{n}f[\varphi(\eta_k),\psi(\eta_k)]\sqrt{\varphi'^2(\eta_k)+\psi'^2(\eta_k)}\Delta t_k$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta t_k, \quad (4)$$

其中

$$\omega_k=f[\varphi(\eta_k),\psi(\eta_k)](\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\tau_k)}$$
$$-\sqrt{\varphi'^2(\eta_k)+\psi'^2(\eta_k)}).$$

(4)式等号右端第一个和数是连续函数

$$f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$$

在区间$[\alpha,\beta]$的积分和．因此，有

$$\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}f[\varphi(\eta_k),\psi(\eta_k)]\sqrt{\varphi'^2(\eta_k)+\psi'^2(\eta_k)}\Delta t_k$$

$$=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

下面证明 $$\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta t_k=0.$$

事实上，已知函数 $f[\varphi(t),\psi(t)]$在闭区间$[\alpha,\beta]$连续，从而它在$[\alpha,\beta]$有界；函数$\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$在闭区间$[\alpha,\beta]$连续，从而一致连续，即

$\exists M>0,\forall t\in[\alpha,\beta]$，有$|f[\varphi(t),\psi(t)]|\leqslant M$.

又 $\forall \varepsilon>0,\exists\delta>0,\Delta t_k<\delta(|\tau_k-\eta_k|<\delta)$，有

$$\left|\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\tau_k)}-\sqrt{\varphi'^2(\eta_k)+\psi'^2(\eta_k)}\right|<\varepsilon.$$

于是，当 $l(T)<\delta$ 时，有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta t_k\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{n}|f[\varphi(\eta_k),\psi(\eta_k)]| \\ &\cdot\left|\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\tau_k)}-\sqrt{\varphi'^2(\eta_k)+\psi'^2(\eta_k)}\right||\Delta t_k| \\ &\leqslant M\varepsilon\sum_{k=1}^{n}|\Delta t_k|=M(\beta-\alpha)\varepsilon,\end{aligned}$$

即
$$\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta t_k=0.$$

当 $\lambda(T)\to 0$ 时，有 $l(T)\to 0$①．由(4)式，当 $\lambda(T)\to 0$ 时，P_n 存在极限，即函数 $f(x,y)$ 在曲线 C 上存在第一型曲线积分，即

$$\int_{C(A,B)}f(x,y)ds=\int_{\alpha}^{\beta}f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.\quad\square$$

(2) 式将第一型曲线积分化成了定积分，它就是计算第一型曲线积分的公式.

特别是，曲线 $C(A,\ B)$ 是由方程 $y=y(x)$ 给出，且 $y'(x)$ 在 $[a,b]$ 连续时，(2)式是

$$\int_{C(A,B)}f(x,y)ds=\int_{a}^{b}f[x,y(x)]\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx.\tag{5}$$

例 1. 求 $I=\int_C xyds$，其中 $C:x=a\cos t,\quad y=b\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$.

解 $x'=-a\sin t,\quad y'=b\cos t.$

$$\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}.$$

① 当曲线 $C:x=\varphi(t),y=\psi(t)$ 是光滑时，可以证明：$l(T)\to 0\Longleftrightarrow\lambda(T)\to 0$.

由公式(2)，有

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos t b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$$

$$=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{a^2\frac{1-\cos 2t}{2}+b^2\frac{1+\cos 2t}{2}}\,dt.$$

设　$z=\cos 2t, dz=-2\sin 2t\,dt$　或　$\sin 2t\,dt=-\frac{1}{2}dz$，有

$$I=\frac{ab}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}z}\,dz$$

$$=\frac{ab}{4}\frac{2}{b^2-a^2}\frac{2}{3}\left(\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}z\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{ab}{3}\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

例 2.　求 $I=\int_C\sqrt{x^2+y^2}\,ds$，其中 C 是圆周 $x^2+y^2=ax$.

解　如图 14.2.　$C=C_1+C_2$.

$$C_1: y=\sqrt{ax-x^2}.$$

$$C_2: y=-\sqrt{ax-x^2}.$$

$$y'=\pm\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}.$$

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}dx.$$

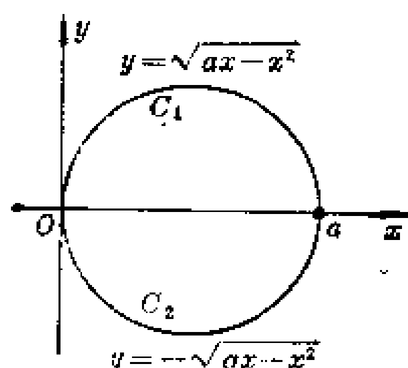


图　14.2

由公式(5)，有

$$I=\int_C\sqrt{x^2+y^2}ds=\int_{C_1}\sqrt{x^2+y^2}ds+\int_{C_2}\sqrt{x^2+y^2}ds$$

$$=\int_0^a\sqrt{x^2+(ax-x^2)}\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}dx$$

$$+\int_0^a\sqrt{x^2+(ax-x^2)}\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}dx$$

$$=2\int_0^a\frac{a\sqrt{ax}}{2\sqrt{ax-x^2}}dx=a\sqrt{a}\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a-x}}$$

$$=a\sqrt{a}\cdot2\sqrt{a}=2a^2.$$

设三维空间有一条可求长的曲线 $C(A,B)$. 函数 $f(x,y,z)$ 在曲线 C 有定义. 可仿照平面（二维空间）第一型曲线积分定义给出函数 $f(x,y,z)$ 在空间曲线 C 上的第一型曲线积分

$$\int_{C(A,B)}f(x,y,z)ds \tag{6}$$

的定义，其中 ds 是空间曲线 C 的弧长微分.

若三维空间光滑曲线 C 的参数方程是

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

则三维空间第一型曲线积分(6)，可化成定积分，有公式

$$\int_{C(A,B)}f(x,y,z)ds$$

$$=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt, \tag{7}$$

其中 $\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$ 是空间曲线 C 的弧长微分，即

$$ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$$

$$=\sqrt{[x'(t)dt]^2+[y'(t)dt]^2+[z'(t)dt]^2}$$

$$=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

例3. 求 $\int_C(x^2+y^2+z^2)ds$，其中 C 是圆柱螺旋线：

$x=a\cos t, \quad y=a\sin t, \quad z=bt, \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$

解 $x'=-a\sin t, \quad y'=a\cos t, \quad z'=b.$

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}dt=\sqrt{a^2+b^2}dt.$$

$$\int_C(x^2+y^2+z^2)ds=\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}dt$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(2a^2\pi+\frac{8}{3}b^2\pi^3\right).$$

二、第二型曲线积分

首先讨论力场作功问题. 我们知道,若质点在常力 $\boldsymbol{F}$(大小与方向都不变)的作用下沿直线运动,位移是 $\boldsymbol{l}$(有向线段),则常力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功 W 是 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{l}$ 的内积, 即

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{l}=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{l}|\cos\theta,$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{l}$ 之间的夹角.

设有一质点在平面力场 $\boldsymbol{F}=(P(x,y),Q(x,y))$ 的作用下, 沿光滑的有向曲线 C 由点 A 到点 B, 求力场 $\boldsymbol{F}$ 所作的功(如图14.3).

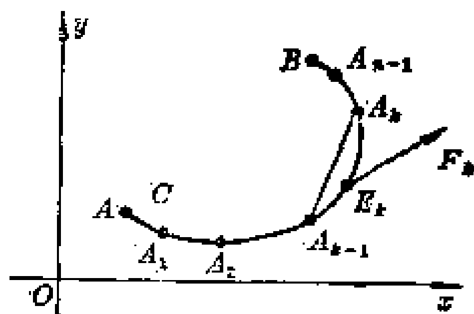


图 14.3

用任意分法 T,将曲线 C 分成 n 个有向的小弧:

$$\overset{\frown}{A_0A_1},\ \overset{\frown}{A_1A_2},\cdots,\ \overset{\frown}{A_{n-1}A_n}, \quad 其中\ A_0=A,\ A_n=B.$$

设 A_k 的坐标是 (x_k,y_k). 将第 k 个有向的小弧 $\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$ 的弦表为 $\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$, 则弦 $\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$ 在 x 与 y 轴上的投影分别是 x_k-x_{k-1} 与 y_k-y_{k-1}, 即

$$\overrightarrow{A_{k-1}A_k}=(x_k-x_{k-1},y_k-y_{k-1})=(\Delta x_k,\Delta y_k).$$

在第 k 个小弧 $\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$ 上任取一点 $E_k(\xi_k,\eta_k)$. 在点 E_k 的(力)向量是

$$\boldsymbol{F}_k(\xi_k,\eta_k)=(P(\xi_k,\eta_k),Q(\xi_k,\eta_k)).$$

以点 E_k 的向量近似代替第 k 个小弧 $\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$ 上每一点的向量. 于

是，内积 $\boldsymbol{F}_k(\xi_k,\eta_k)\cdot\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$ 应是质点在力场 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，沿第 k 个小弧 $\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$ 由点 A_{k-1} 到点 A_k 所作功的近似值．它们的和

$$\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}_k(\xi_k,\eta_k)\cdot\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$$

应是质点在力场 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，沿曲线 C 由点 A 到点 B 所作功 W 的近似值．当 $\lambda(T)$ 越小，近似程度越好．于是，当 $\lambda(T)\to 0$ 时，有

$$W=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}_k(\xi_k,\eta_k)\cdot\overrightarrow{A_{k-1}A_k}.$$

由内积公式，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_k(\xi_k,\eta_k)\overrightarrow{A_{k-1}A_k}&=(P(\xi_k,\eta_k),Q(\xi_k,\eta_k))(\Delta x_k,\Delta y_k)\\&=P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}W&=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}[P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]\\&=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k.\end{aligned}\tag{8}$$

抽去(8)式的物理意义就得到第二型曲线积分．

设平面上有光滑有向曲线 $C(A,B)$，二元函数 $f(x,y)$ 在曲线 C 上有定义．用任意分法 T，将曲线 C 依次分成 n 个有向小弧：

$$\overset{\frown}{A_0A_1},\ \overset{\frown}{A_1A_2},\ \cdots,\ \overset{\frown}{A_{n-1}A_n},\quad 其中\ A_0=A,\ A_n=B.$$

设第 k 个小弧 $\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$ 的弦 $\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$ 在 x 轴与 y 轴上的投影区间的长(带有符号)分别是 Δx_k 与 Δy_k．在第 k 个小弧 $\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$ 上任取一点 $E_k(\xi_k,\eta_k)$．作和

$$\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k\quad 与\quad\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k.\tag{9}$$

分别称为二元函数 $f(x,y)$ 在曲线 $C(A,B)$ 关于 x 与 y 的**积分和**.

令 $\lambda(T)=\max\{\Delta s_1,\Delta s_2,\cdots,\Delta s_n\}$. ($\Delta s_k$ 是第 k 个小弧 $\widehat{A_{k-1}A_k}$ 的长)

定义 设二元函数 $f(x,y)$ 在有向光滑曲线 $C(A,B)$ 有定义. 若当 $\lambda(T)\to 0$ 时, 二元函数 $f(x,y)$ 在曲线 $C(A,B)$ 关于 x(或y) 的积分和(9)存在极限 J_x(或J_y), 即

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k=J_x\quad\left(\text{或}\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k=J_y\right),$$

称 J_x(或J_y)是 $f(x,y)dx$(或$f(x,y)dy$)在曲线 $C(A,B)$ 的**第二型曲线积分**, 表为

$$\int_{C(A,B)} f(x,y)dx\quad\left(\text{或}\int_{C(A,B)} f(x,y)dy\right).$$

由(8)式不难看到, 质点在平面力场 $\boldsymbol{F}=(P(x,y),Q(x,y))$ 的作用下, 沿光滑的有向曲线 C 由点 A 到点 B, 力场$\boldsymbol{F}$所作的功W是 $P(x,y)dx$ 与 $Q(x,y)dy$ 在曲线 $C(A,B)$ 的第二型曲线积分之和, 即

$$\begin{aligned} W&=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\\ &=\int_{C(A,B)} P(x,y)\,dx+\int_{C(A,B)} Q(x,y)dy. \end{aligned}$$

通常上式简写为

$$W=\int_{C(A,B)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy. \tag{10}$$

由弧长微分知, dx 与 dy 分别是弧长微分 ds 在 x 轴与 y 轴上的投影. 弧长微分 ds 的方向就是曲线 $C(A,B)$ 的方向, 则弧长向量微元 $d\boldsymbol{s}=(dx,dy)$. 于是, 功W可写成向量形式的积分

$$W=\int_{C(A,B)} \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{s}. \tag{11}$$

注 第二型曲线积分与曲线 $C(A,B)$ 的方向有关. 因为 Δx_k 与 Δy_k 分别是第 k 个有向小弧 $\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$ 的弦 $\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$ 在 x 轴与 y 轴上的投影，当改变曲线 C 的方向时，Δx_k 与 Δy_k 要改变符号，所以第二型曲线积分也要改变符号，即

$$\int_{C(A,B)} f(x,y)dx = -\int_{C(B,A)} f(x,y)dx$$

与

$$\int_{C(A,B)} f(x,y)dy = -\int_{C(B,A)} f(x,y)dy.$$

定理 2. 如果函数 $f(x,y)$ 在有向光滑曲线 $C(A,B)$: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 连续，且 $A[x(\alpha),y(\alpha)]$, $B[x(\beta),y(\beta)]$，则 $f(x,y)dx$ 与 $f(x,y)dy$ 在 $C(A,B)$ 的第二型曲线积分都存在，且

$$\int_{C(A,B)} f(x,y)dx = \int_\alpha^\beta f[x(t),y(t)]x'(t)dt, \tag{12}$$

$$\int_{C(A,B)} f(x,y)dy = \int_\alpha^\beta f[x(t),y(t)]y'(t)dt. \tag{13}$$

证明 只给出等式(12)的证明，同法可证等式(13).

给区间 $[\alpha,\beta]$ 任意分法 T，分点是 $\alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=\beta$. 第 k 个小区间 $[t_{k-1},t_k]$ 对应曲线 C 上第 k 个小弧 $\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$，在 $[t_{k-1},t_k]$ 上任取一点 τ_k. 在第 k 个小弧 $\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$ 上有对应的点 $E_k(\xi_k,\eta_k)$，其中 $\xi_k=x(\tau_k)$, $\eta_k=y(\tau_k)$. 于是，

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k,\eta_k)(x_k-x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^n f[x(\tau_k),y(\tau_k)][x(t_k)-x(t_{k-1})]$$

$$= \sum_{k=1}^n f[x(\tau_k),y(\tau_k)]\int_{t_{k-1}}^{t_k} x'(t)dt$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} f[x(\tau_k),y(\tau_k)]x'(t)dt. \tag{14}$$

另一方面，(12)式等号右端可改写为

$$J=\int_{\alpha}^{\beta} f[x(t),y(t)]x'(t)dt$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} f[x(t),y(t)]x'(t)dt \tag{15}$$

(14)式与(15)式等号两端之差是

$$\sigma_n-J=\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\{f[x(\tau_k),y(\tau_k)]-f[x(t),y(t)]\}x'(t)dt.$$

因为函数$f[x(t),y(t)]$在闭区间$[\alpha,\beta]$连续，所以它在$[\alpha,\beta]$一致连续，即$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall T: l(T)<\delta$，$\forall t\in[t_{k-1},t_k]$，$k=1,2,\cdots,n$，有

$$|f[x(\tau_k),y(\tau_k)]-f[x(t),y(t)]|<\varepsilon.$$

又因为$x'(t)$在闭区间$[\alpha,\beta]$连续，所以$x'(t)$在$[\alpha,\beta]$有界，即$\exists M>0$，$\forall t\in[\alpha,\beta]$，有

$$|x'(t)|\leqslant M.$$

于是，当$l(T)<\delta$时，有

$$|\sigma_n-J|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}|f[x(\tau_k),y(\tau_k)]-f[x(t),y(t)]||x'(t)|dt$$

$$<\varepsilon M\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}dt=M(\beta-\alpha)\varepsilon,$$

从而$\lim\limits_{l(T)\to 0}\sigma_n=J$，即

$$\int_{C(A,B)} f(x,y)dx①=\int_{\alpha}^{\beta} f[x(t),y(t)]x'(t)dt.\ \square$$

---

① 参见第365页底注。

若光滑有向曲线 $C(A,B)$ 的方程是

$$y=y(x),\quad a\leqslant x\leqslant b$$

$A[a,y(a)]$, $B[b,y(b)]$, 而 $y'(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 则

$$\int_{C(A,B)} f(x,y)dx=\int_a^b f[x,y(x)]dx.$$

例 4. 求 $\int_C y^2dx+x^2dy$,

其中曲线 C 是上半椭圆 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, 取顺时针的方向.

解 $dx=-a\sin t\,dt$, $dy=b\cos t\,dt$, 由公式(12)与(13)有

$$\begin{aligned}&\int_C y^2dx+x^2dy\\&=\int_\pi^0[b^2\sin^2t(-a\sin t)+a^2\cos^2t\cdot b\cos t]dt\\&=-ab^2\int_\pi^0\sin^3t\,dt+a^2b\int_\pi^0\cos^3t\,dt=\frac{4}{3}ab^2.\end{aligned}$$

例 5. 求 $I=\int_C 2xydx+x^2dy$,

其中曲线 C 分别是 1) 直线 $y=x$; 2) 抛物线 $y=x^2$; 3) 立方抛物线 $y=x^3$, 都是由原点(0, 0)到点(1, 1).

解 1) 沿直线 $y=x$, $dy=dx$, 有

$$I=\int_C 2xydx+x^2dy=\int_0^1 2x^2dx+\int_0^1 x^2dx=\int_0^1 3x^2dx=1.$$

2) 沿抛物线 $y=x^2$, $dy=2xdx$, 有

$$I=\int_C 2xydx+x^2dy=\int_0^1 2x^3dx+\int_0^1 2x^3dx=\int_0^1 4x^3dx=1.$$

3) 沿立方抛物线 $y=x^3$, $dy=3x^2dx$, 有

$$I=\int_C 2xydx+x^2dy=\int_0^1 2x^4dx+\int_0^1 3x^4dx=\int_0^1 5x^4dx=1.$$

例 6. 求 $J=\int_C xydx+(y-x)dy$,

其中曲线 C 与例 5 相同，并有与例 5 相同的始点与终点.

解 1) 沿直线 $y=x$， $dy=dx$，有

$$J=\int_C xydx+(y-x)dy=\int_0^1 x^2 dx=\frac{1}{3}.$$

2) 沿抛物线 $y=x^2$， $dy=2xdx$，有

$$J=\int_C xydx+(y-x)dy=\int_0^1 (3x^3-2x^2)dx=\frac{1}{12}.$$

3) 沿立方抛物线 $y=x^3$，$dy=3x^2dx$，有

$$J=\int_C xydx+(y-x)dy=\int_0^1 (3x^5+x^4-3x^3)dx=-\frac{1}{20}.$$

例 7. 有质量为 m 的质点，在重力的作用下，沿铅垂面上曲线 C 由点 A 到点 B，求重力 F 所作的功，如图 14.4.

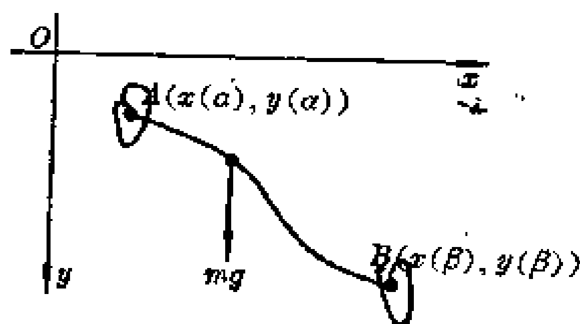


图 14.4

解 设平面曲线 C 的参数方程是

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

$A[x(\alpha),y(\alpha)]$，$B[x(\beta),y(\beta)]$. 已知 $\boldsymbol{F}=(0,mg)$. 于是，重力所作的功

$$W=\int_{C(A,B)}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_{C(A,B)}(0,mg)\cdot(dx,dy)=\int_{C(A,B)}mgdy$$

$$=\int_\alpha^\beta mgy'(t)dt=mg[y(\beta)-y(\alpha)].$$

此例说明，质点从点 A 移动到点 B，重力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功只与 A 与 B 的位置有关，而与曲线 C 无关. 这是重力场的一个重要物理

特性.

从上述三例看到，当始点与终点相同，沿着不同的曲线，有的曲线积分相等(如例 5 与例 7)；有的曲线积分不相等(如例 6)。那么在什么条件之下，当始点与终点取定时，曲线积分与所沿的曲线无关呢？后面我们将讨论这个问题.

设三维空间有有向光滑曲线 $C(A,B)$，函数 $f(x,y,z)$ 在曲线 C 上有定义. 可仿照平面(二维空间)第二型曲线积分定义，给出 $f(x,y,z)dx$($f(x,y,z)dy$ 与 $f(x,y,z)dz$)在曲线 $C(A,B)$ 的第二型曲线积分

$$\int_{C(A,B)} f(x,y,z)dx$$

$$\left(\int_{C(A,B)} f(x,y,z)dy \quad 与 \quad \int_{C(A,B)} f(x,y,z)dz\right),$$

其中 dx(dy 与 dz)是有向弧长微元 $d\boldsymbol{s}$ 在 x 轴（y 轴与 z 轴）上的投影.

当曲线 $C(A,B)$ 改变方向时，有

$$\int_{C(A,B)} f(x,y,z)dx = -\int_{C(B,A)} f(x,y,z)dx.$$

不难写出，向量场 $\boldsymbol{F}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 在有向光滑曲线 $C(A,B)$ 的第二型曲线积分是

$$\int_{C(A,B)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$$

$$=\int_{C(A,B)} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz, \qquad (16)$$

其中 $d\boldsymbol{s}=(dx,dy,dz)$.

如果三维空间的有向光滑曲线 $C(A,B)$ 是参数方程

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

t 由 α 到 β 对应曲线 C 上由点 A 到点 B，则三维空间的第二型曲线积分可化成定积分，有公式

$$\int_{C(A,B)} f(x,y,z)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t),y(t),z(t)]x'(t)dt.$$

$$\int_{C(A,B)} f(x,y,z)dy = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t),y(t),z(t)]y'(t)dt. \qquad (17)$$

$$\int_{C(A,B)} f(x,y,z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t),y(t),z(t)]z'(t)dt.$$

例 8. 求 $\int_{C}(x+y+z)dx$,

其中曲线 C: $x=\cos t, y=\sin t, z=t$, $0\leqslant t\leqslant \pi$, 从 $t=0$ 到 $t=\pi$.



解 由公式(17)有

$$\int_{C}(x+y+z)dx = \int_{0}^{\pi}(\cos t+\sin t+t)(-\sin t)dt$$

$$= -\int_{0}^{\pi}\cos t\sin t\,dt - \int_{0}^{\pi}\sin^2 t\,dt - \int_{0}^{\pi} t\sin t\,dt = -\frac{3}{2}\pi.$$

三、第一型曲线积分与第二型曲线积分的关系

在三维空间中，由于弧长微分 ds 与它在坐标轴上的投影 dx, dy, dz 有密切联系，因此两类曲线积分可以互相转换.

设三维空间有有向光滑曲线 $C(A,B)$，取弧长 s 为参数，曲线 C 的参数方程是

$$x=x(s), \quad y=y(s), \quad z=z(s). \quad 0\leqslant s\leqslant l.$$

l 表曲线 C 的长. $A[x(0),y(0),z(0)]$, $B[x(l),y(l),z(l)]$. 在曲线 C 上任取一点 $G(x,y,z)$ (如图 14.5). 已知在点 G 的切线 GT 的切向量是 $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, 弧长微分 ds 是

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

又有

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1.$$

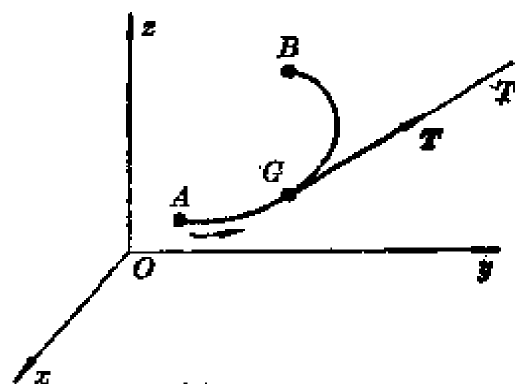


图 14.5

于是，$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$就是曲线$C$在点$G$的切线$GT$的方向余弦. 设$\alpha, \beta, \gamma$分别表切线$GT$与$x$轴，$y$轴，$z$轴正向的交角，$GT$的方向余弦是$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$，即

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds}=\cos\beta, \quad \frac{dz}{ds}=\cos\gamma,$$

或 $$dx=\cos\alpha ds, \quad dy=\cos\beta ds, \quad dz=\cos\gamma ds. \tag{18}$$

由(18)式，可将第二型曲线积分(16)化为第一型曲线积分，即

$$\int_{C(A,B)} Pdx+Qdy+Rdz$$
$$=\int_{C(A,B)} (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds. \tag{19}$$

注 $P, Q, R, \alpha, \beta, \gamma$ 都是曲线C上点(x, y, z)的函数. 而α, β, γ表示向着弧长增加方向的切线与x轴，y轴，z轴正向的夹角. 当曲线$C(A, B)$改变方向为$C(B, A)$时，切线也要改变方向. 于是$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$都要变号，即等式(19)两端同时变号.

如果用$\boldsymbol{T}$表示切线GT的单位向量，即 $\boldsymbol{T}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$，则(19)式可写为向量形式：

$$\int_{C(A,B)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_{C(A,B)} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}ds.$$

显然，在xy平面上$\left(即\ \gamma=\frac{\pi}{2}, \cos\gamma=0\right)$，第一型与第二型曲

线积分的转换公式是

$$\int_{C(A,B)} Pdx+Qdy=\int_{C(A,B)}(P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$$

或

$$\int_{C(A,B)} Pdx+Qdy=\int_{C(A,B)}(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)ds.$$

这个公式有时用曲线的法线与坐标轴正向的夹角表示比较方便. 规定法线$\boldsymbol{n}$的正向到切线$\boldsymbol{T}$的正向按右手螺旋系(如图 14.6). 设由 x 轴的正向到法线 $\boldsymbol{n}$ 的正向的交角是 α', 有

$$\alpha=\frac{\pi}{2}+\alpha'.$$

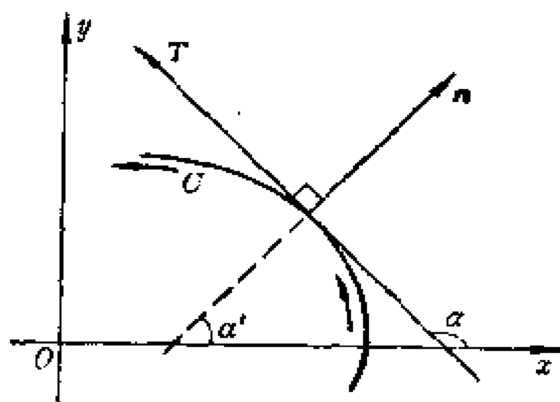


图 14.6

从而，

$$\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha'\right)=-\sin\alpha',$$

$$dx=\cos\alpha ds=-\sin\alpha' ds.$$

$$\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha'\right)=\cos\alpha',$$

$$dy=\sin\alpha ds=\cos\alpha' ds.$$

有

$$\int_{C(A,B)} Pdx+Qdy=\int_{C(A,B)}(-P\sin\alpha'+Q\cos\alpha')ds. \quad (20)$$

四、格林[1]公式

① 格林(Green 1793—1841)英国数学家.

平面曲线积分，当曲线 $C(A,B)$ 的始点 A 与终点 B 重合时(即 C 是一条闭曲线)，在力学、电学等有很多应用. 因为第二型曲线积分与所沿的曲线方向有关，所以沿平面闭曲线的曲线积分要规定闭曲线的正方向. 按右手坐标系，当着一个人沿平面闭曲线环行时，闭曲线所围成的区域位于此人的左侧，规定这个方向是曲线的正方向(如图 14.7)，反之是负方向(如图 14.8).

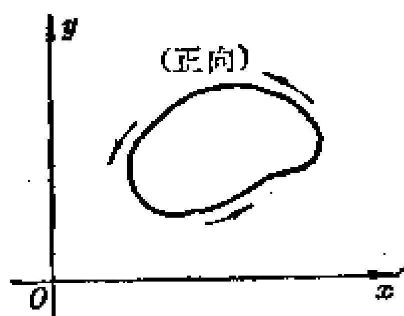


图 14.7

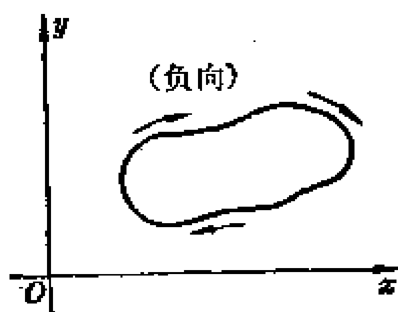


图 14.8

沿闭曲线 C 的曲线积分，表为

$$\oint_C Pdx+Qdy,$$

规定其中曲线 C 总是取正方向. 格林公式给出了平面区域上的二重积分与沿着该区域边界的闭曲线的曲线积分之间的关系.

定理 3. 若函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 以及 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在光滑或逐段光滑闭曲线 C 围成的闭区域 G 连续，则

$$\iint_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_C Pdx+Qdy, \tag{21}$$

公式(21)称为**格林公式**.

证明 由于区域形状不同，定理证明分三步进行.

1) 如果平行 y 轴(或 x 轴) 的直线与闭曲线 C 至多交于两点(闭曲线 C 有平行 y 轴或 x 轴的线段除外)，如图 14.9 与图 14.10

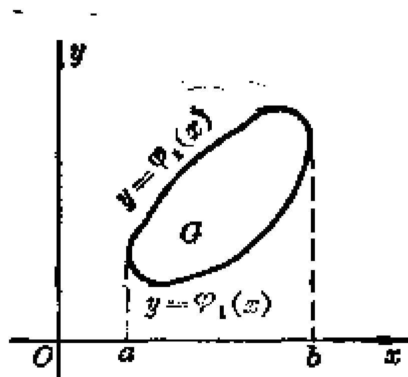


图 14.9

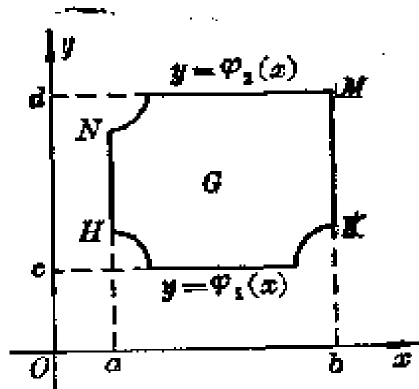


图 14.10

所示.

设区域 G 的上下边界曲线分别是区间$[a,b]$上的连续函数

$$y=\varphi_2(x) \quad 与 \quad y=\varphi_1(x).$$

由二重积分的计算公式，有

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy ① =\int_a^b P(x,y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dx$$

$$=\int_a^b\{P[x,\varphi_2(x)]-P[x,\varphi_1(x)]\}dx. \qquad (22)$$

由线积分的计算公式，按图 14.10，有

$$\oint_G P(x,y)dx=\int_{C(H,K)}P(x,y)dx+\int_{C(K,M)}P(x,y)dx$$

$$+\int_{C(M,N)}P(x,y)dx+\int_{C(N,H)}P(x,y)dx,$$

其中

$$\int_{C(H,K)}P(x,y)dx=\int_a^b P[x,\varphi_1(x)]dx,$$

$$\int_{C(M,N)}P(x,y)dx=\int_b^a P[x,\varphi_2(x)]dx=-\int_a^b P[x,\varphi_2(x)]dx.$$

因为线段 KM 与 NH 都平行 y 轴，有

① 因为$\frac{\partial P}{\partial y}$连续，所以它存在原函数，原函数之一就是 $P(x,y)$.

$$\int_{C(K,M)} P(x,y)dx = \int_{C(H,B)} P(x,y)dx = 0.$$

于是，

$$\oint_C P(x,y)dx = \int_a^b P[x,\varphi_1(x)]dx - \int_a^b P[x,\varphi_2(x)]dx$$

$$= -\int_a^b \{P[x,\varphi_2(x)] - P[x,\varphi_1(x)]\}dx. \qquad (23)$$

由(22)式与(23)式，有

$$-\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \oint_C P(x,y)dx. \qquad (24)$$

同法可证

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \oint_C Q(x,y)dy. \qquad (25)$$

由(24)式与(25)式，有格林公式

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_C Pdx + Qdy.$$

2) 如果平行 y 轴(或 x 轴)的直线与闭曲线 C 的交点多于两个．如图 14.11，用平行 y 轴的线段 AC 将区域 G 分成三个小区域 G_1, G_2, G_3，使每个小区域都满足 1)的要求，格林公式在区域 G_1，G_2, G_3 都成立，即

$$\iint_{G_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_{(\Gamma_1 + AC)} Pdx + Qdy.$$

$$\iint_{G_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_{(\Gamma_2 + BA)} Pdx + Qdy.$$

$$\iint_{G_3} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_{(\Gamma_3 + CB)} Pdx + Qdy.$$

上述三个等式左右分别相加，由重积分与线积分的性质，有

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\oint_{(\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+AC+CB+BA)} Pdx+Qdy.$$

其中 $\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3=C$ 是区域 G 的边界，AC 与 $CB+BA$ 是同一线段但方向相反，有

$$\int_{AC+CB+BA} Pdx+Qdy=0.$$

于是，有格林公式

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_C Pdx+Qdy.$$

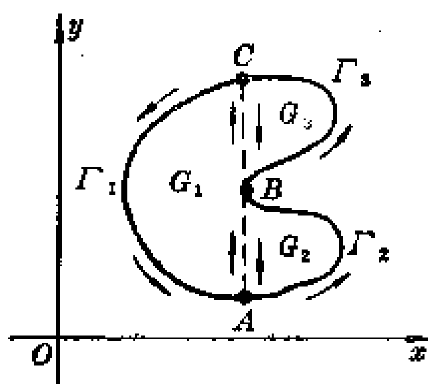


图 14.11

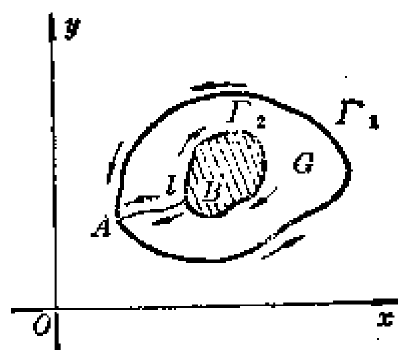


图 14.12

3) 如果 G 是若干条互不相交的闭曲线围成的闭区域，如图 14.12. 用光滑曲线 l 连接 A 与 B 两点，则曲线 Γ_1, l, Γ_2 构成闭曲线(正方向)，有格林公式

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{\Gamma_1+l(A,B)+\Gamma_2+l(B,A)} Pdx+Qdy.$$

因为

$$\int_{l(A,B)+l(B,A)} Pdx+Qdy=0,$$

所以

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{\Gamma_1+\Gamma_2} Pdx+Qdy. \ \square$$

定积分的基本公式$\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)$指出，函数$f'(x)$在区间$[a, b]$的定积分等于被积函数$f'(x)$的原函数$f(x)$在区间端点(或边界上)的值的差. 格林公式

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_C Pdx+Qdy$$

指出，函数$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$在区域$G$的二重积分等于$Pdx+Qdy$在区域边界闭曲线$C$上的曲线积分. 从这个意义上说，格林公式是定积分的基本公式在二维空间的推广.

特别是，当$P(x,y)=-y, Q(x,y)=x$时，$\frac{\partial P}{\partial y}=-1, \frac{\partial Q}{\partial x}=1$，代入格林公式中，有

$$\iint_G 2dxdy=\oint_C xdy-ydx$$

或

$$S=\iint_G dxdy=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx,$$

即求区域G的面积S也可用在区域G的边界闭曲线C的第二型曲线积分.

例 9. 求 $\oint_C xy^2dy-x^2ydx$，其中C是圆周$x^2+y^2=a^2$.

解 由格林公式，$P=-x^2y, Q=xy^2$，$\frac{\partial P}{\partial y}=-x^2, \frac{\partial Q}{\partial x}=y^2$，有

$$\oint_C xy^2dy-x^2ydx=\iint_G (y^2+x^2)dxdy,$$

其中G是圆域$x^2+y^2\leqslant a^2$. 设$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$，有

$$\oint_C xy^2dy - x^2ydx = \iint_G (y^2 + x^2)dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 dr$$

$$= \frac{\pi}{2}a^4.$$

例10. 求 $\oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$，其中 C 是光滑的，不通过原点的正向闭曲线.

解 分两种情况计算. 1) 闭曲线 C 内部不包含原点. 由格林公式，函数

$$P(x,y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

在闭曲线 C 围成的区域 G 连续，并有连续偏导数

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

有

$$\oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \iint_G \left[\frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right]dxdy = 0.$$

2) 闭曲线 C 内部包含原点，如图 14.13. 以原点为心以充分小正数 r 为半径作一小圆域 D，圆周为 Γ，使小圆域 D 包含在区域 G 内. 函数

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

及其偏导数在区域 $G-D$ 连续，由格林公式，有

$$\oint_{C+\Gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \iint_{G-D} \left[\frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right]dxdy = 0$$

或

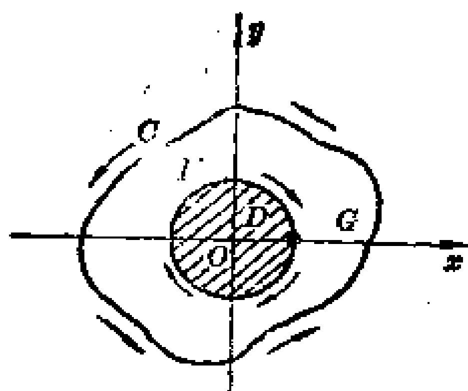


图 14.13

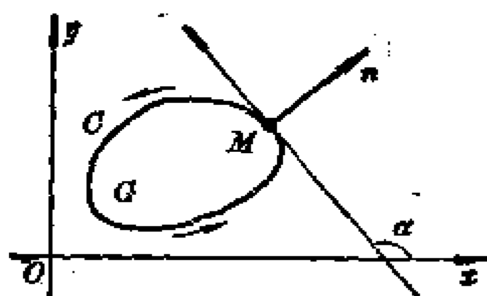


图 14.14

$$\oint_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}+\oint_\Gamma \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0,$$

即
$$\oint_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=-\oint_\Gamma \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_{\Gamma^{-1}} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2},$$

其中 Γ^{-1} 表示圆周 Γ，其方向与 Γ 相反。设$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$，$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$. 由曲线积分计算公式，有

$$\oint_{\Gamma^{-1}} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{r\cos\varphi\cdot r\cos\varphi-r\sin\varphi(-r\sin\varphi)}{r^2}d\varphi=2\pi,$$

即
$$\oint_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=2\pi.$$

例 11. 证明：

$$\iint_G\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy=\oint_C\frac{\partial f}{\partial n}ds,$$

其中C是围成有界区域G的光滑闭曲线，$\frac{\partial f}{\partial n}$是函数$f(x, y)$在曲线 C 上点$M(x,y)$处沿C的外法线 n 的方向导数(如图 14.14).

证明

$$\iint_G\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy=\iint_G\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]dxdy.$$

$$P(x,y)=-\frac{\partial f}{\partial y},\qquad Q(x,\ y)=\frac{\partial f}{\partial x}.$$

由格林公式，有

$$\iint_G\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy=\oint_C -\frac{\partial f}{\partial y}dx+\frac{\partial f}{\partial x}dy.$$

由公式(20)，$dx=-\sin\alpha' ds$，$dy=\cos\alpha' ds$，其中 α' 是 x 轴正向与外法线 $\boldsymbol{n}$ 的交角，上式又可改写成

$$\iint_G\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy=\oint_C\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha'+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha'\right)ds,$$

其中$\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha'+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha'$ 是函数 $f(x,y)$在曲线C上点$M(x,y)$的外法线n的方向导数，即$\frac{\partial f}{\partial n}$，有

$$\iint_G\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy=\oint_C\frac{\partial f}{\partial n}ds.$$

五、曲线积分与路线无关的条件

从例5看到，自始点(0,0)到终点(1,1)，不论曲线C是直线$y=x$，抛物线 $y=x^2$ 或立方抛物线 $y=x^3$，而曲线积分

$$\int_C 2xydx+x^2dy=1,$$

即曲线积分与路线无关．但是，例6不同，尽管始点与终点相同，曲线C不同，曲线积分

$$\int_C xydx+(y-x)dy$$

有不同的值，即曲线积分与路线有关．那么在什么条件下，曲线积分

$$\int_{C(A,B)} Pdx+Qdy$$

与路线C无关(只与始点A与终点B有关)呢？下面定理回答了这

个问题:

定理 4 若函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 以及 $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ 在单连通区域 G① 连续，下列四个断语是等价的:

1) 曲线积分 $\int_{C(A,B)} Pdx+Qdy$ 与路线 C 无关，即只与始点 A 与终点 B 有关.

2) 在 G 内存在一个函数 $u(x,y)$，使

$$du=Pdx+Qdy.$$

3) $\forall(x,y)\in G$，有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

4) 对 G 内的任意光滑或逐段光滑闭曲线 Γ，有

$$\oint_\Gamma Pdx+Qdy=0.$$

证法 只须证明四个命题成立: 1)⇒2)②, 2)⇒3), 3)⇒4), 4)⇒1).

证明 1)⇒2). 只须找出一个函数 $u(x,y)$，使

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y).$$

已知曲线积分与路线 C 无关. $\forall A(x_0, y_0)\in G$, 暂时固定, $\forall B(x,y)\in G$，则曲线积分是终点 $B(x,y)$ 的二元函数，表为 $u(x,y)$，即

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy. \tag{26}$$

---

① 单连通区域 G 是指，在 G 内连续的无重点的任意闭曲线所围成的区域都在 G 内.

② 1)⇒2) 表示以 1) 为条件证明 2) 成立，下同.

下面证明，二元函数 $u(x,y)$就满足 2)的要求．为此求$\frac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

设终点是$N(x+\Delta x,y)$，有

$$u(x+\Delta x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)}Pdx+Qdy. \tag{27}$$

已知曲线积分与路线无关，取由点A到点B是沿任意光滑曲线．由点B到点N是平行x轴的直线段，如图 14.15．由(27)式与(26)式等号两端相减，有

$$\begin{aligned}&u(x+\Delta x,y)-u(x,y)\\&=\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)}-\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}=\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)}Pdx+Qdy.\end{aligned}$$

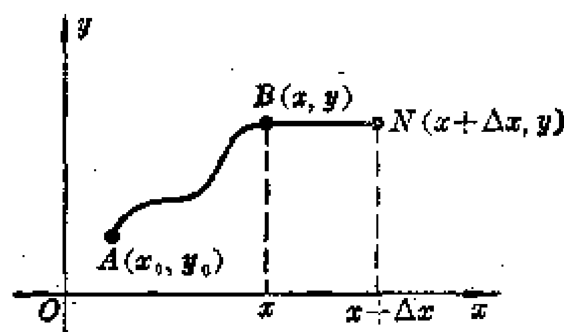


图 14.15

在线段 BN 上，y 是常数，$dy=0$．根据积分中值定理，有

$$\begin{aligned}&u(x+\Delta x,y)-u(x,y)\\&=\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)}P(x,y)dx=P(x+\theta\Delta x,y)\Delta x,\quad 0<\theta<1.\end{aligned}$$

或

$$\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}=P(x+\theta\Delta x,y).$$

已知函数$P(x,y)$在点$B(x,y)$连续，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}P(x+\theta\Delta x,y)=P(x,y),$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y).$$

同理可证，
$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y).$$
于是，
$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

2)⇒3). 由全微分知，
$$P(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x},\quad Q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}.$$
于是，
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$
已知$\frac{\partial P}{\partial y}$与$\frac{\partial Q}{\partial x}$在$G$内连续，即$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$与$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$在$G$内连续，有
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

3)⇒4). 对区域G内任意光滑或逐段光滑闭曲线Γ，由格林公式，有
$$\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0,$$
其中D是闭曲线Γ所围成的区域.

4)⇒1). 在区域G内，以A为始点，B为终点，任取两条光滑或逐段光滑的曲线C_1与C_2. $C_1(A,B)+C_2(B,A)$是G内一条封闭曲线(图 14.16). 由条件 4)，有
$$\oint_{C_1(A,B)+C_2(B,A)}Pdx+Qdy$$
$$=\int_{C_1(A,B)}Pdx+Qdy+\int_{C_2(B,A)}Pdx+Qdy=0$$
或
$$\int_{C_1(A,B)}Pdx+Qdy=-\int_{C_2(B,A)}Pdx+Qdy$$
$$=\int_{C_2(A,B)}Pdx+Qdy,$$

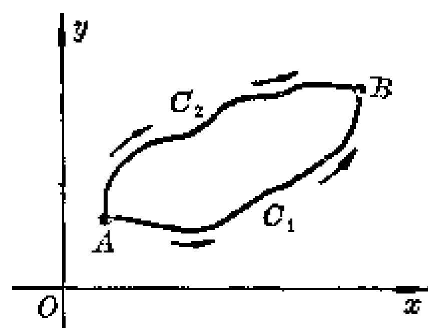


图 14.16

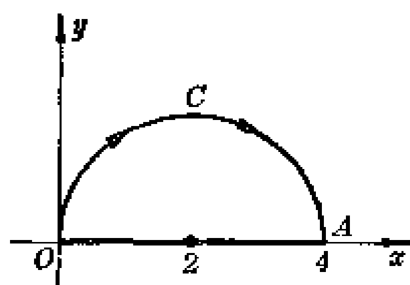


图 14.17

即曲线积分与路线无关. □

例 12. 求 $\int_C (1+xe^{2y})dx+(x^2e^{2y}-y)dy$, 其中 C 是 $(x-2)^2+y^2=4$ 的上半圆周. 顺时针方向为正(如图 14.17).

解 $P(x,y)=1+xe^{2y}$, $Q(x,y)=x^2e^{2y}-y$.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2xe^{2y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

即曲线积分与路线无关. 根据定理 4, 可取沿 x 轴上的线段 OA 积分, 即 $y=0$, $0\leqslant x\leqslant 4$, 于是, $dy=0$, 有

$$\begin{aligned}&\int_C (1+xe^{2y})dx+(x^2e^{2y}-y)dy\\ =&\int_{\overline{OA}}(1+xe^{2y})dx+(x^2e^{2y}-y)dy\\ =&\int_0^4(1+x)dx=12.\end{aligned}$$

由 1)⇒2) 的证明知, 若曲线积分 $\int_C Pdx+Qdy$ 与路线无关, 则函数

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}Pdx+Qdy$$

的全微分是 $du(x,y)=Pdx+Qdy$, 称函数 $u(x,y)$ 是 $Pdx+Qdy$ 的原函数. 下面定理指出: 求曲线积分与求定积分有类似的公式.

定理 5. 若在单连通区域 G 内函数 $u(x,y)$ 是 $Pdx+Qdy$ 的原

函数，而 $A(x_1,y_1)$ 与 $B(x_2,y_2)$ 是 G 内任意两点，则

$$\int_{C(A,B)} Pdx+Qdy=u(x_2,y_2)-u(x_1,y_1)$$

$$=u(x,y)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}.$$

证明 在 G 内任取连接点 A 到点 B 的光滑曲线 C：

$$x=\varphi(t),\qquad y=\psi(t),\qquad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

且 $\quad (x_1,y_1)=[\varphi(\alpha),\psi(\alpha)],\ (x_2,y_2)=[\varphi(\beta),\psi(\beta)].$

曲线积分

$$\int_{C(A,B)} Pdx+Qdy$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\,dt.$$

已知 $u(x,y)$ 是 $Pdx+Qdy$ 的原函数，有 $P=\frac{\partial u}{\partial x}$，$Q=\frac{\partial u}{\partial y}$. 于是，

$$\int_{C(A,B)} Pdx+Qdy=\int_\alpha^\beta\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\varphi'(t)+\frac{\partial u}{\partial y}\psi'(t)\right\}dt$$

$$=\int_\alpha^\beta\frac{d}{dt}u[\varphi(t),\psi(t)]dt=u[\varphi(t),\psi(t)]\Big|_\alpha^\beta$$

$$=u[\varphi(\beta),\psi(\beta)]-u[\varphi(\alpha),\psi(\alpha)]$$

$$=u(x_2,y_2)-u(x_1,y_1)=u(x,y)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}.\quad\square$$

如果已知 $Pdx+Qdy$ 存在原函数，那么怎样求原函数 $u(x,y)$ 呢？设在某闭矩形区域 G 内，$u(x,y)$ 是 $Pdx+Qdy$ 的原函数，根据定理 4，曲线积分与路线无关. 在 G 内取定一点 $A(x_0,y_0)$ 与任意一点 $B(x,y)$，根据定理 5，有

$$u(x,y)-u(x_0,y_0)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy.$$

因为曲线积分与路线无关，所以在 G 内可取折线，如图 14.18 中的 ADB. D 的坐标为 (x,y_0)，有

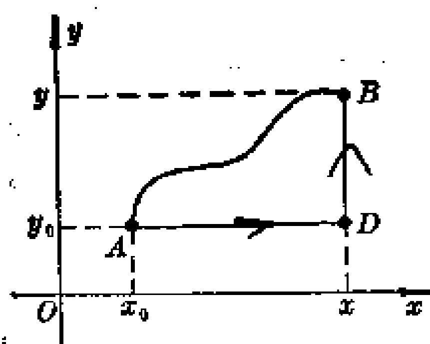


图 14.18

$$u(x,y)-u(x_0,y_0)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} Pdx+Qdy+\int_{(x,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy.$$

在线段 AD 上，$y=y_0$，$dy=0$，在线段 DB 上，$x=x$(暂为常数)，$dx=0$。于是，

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy+u(x_0,y_0).$$

例 13. 设$du=(e^{xy}+xye^{xy})dx+x^2e^{xy}dy$，求函数 $u(x,y)$。

解
$$P=e^{xy}+xye^{xy},\qquad Q=x^2e^{xy}.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2xe^{xy}+x^2ye^{xy},$$

即曲线积分与路线无关。取$(x_0,y_0)=(0,0)$，有

$$u(x,y)=\int_0^x dx+\int_0^y x^2e^{xy}dy+C$$
$$=x+xe^{xy}-x+C=xe^{xy}+C.$$

练 习 题 14.1

1. 求下列第一型曲线积分:

(1) $\oint_C (x+y)ds$，其中C是以$(0,0)$，$(1,0)$与$(0,1)$为顶点的三角形.

(2) $\oint_C xyds$，其中C是$|x|+|y|=a\quad(a>0)$.

(3) $\int_C \sqrt{x^2+y^2}ds$，其中C：$\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t),\\ y=a(\sin t-t\cos t).\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

(4) $\int_C \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$，　其中 C：$x=a\cos t, y=a\sin t,\ z=bt, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

2. 证明：若函数 $f(x,y)$ 与 $g(x, y)$ 在平面光滑曲线 $C(A, B)$ 连续，且 $\forall(x,y)\in C(A,B)$，有 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则

$$\int_{C(A,B)} f(x,y)\,ds\leqslant\int_{C(A,B)} g(x,y)\,ds.$$

3. 证明：若函数 $f(x,y)$ 在光滑曲线 $C(A,B)$ 连续，且 $\min\limits_{(x,y)\in C}\{f(x, y)\}=m, \max\limits_{(x,y)\in C}\{f(x,y)\}=M$，则 $\exists(x_0,y_0)\in C(A,B)$，使

$$\int_{C(A,B)} f(x,y)\,ds=f(x_0,y_0)\,s,$$

其中 s 是曲线 $C(A,B)$ 的长.

4. 有一段金属线，其方程：$x=\frac{3}{4}\sin 2t$，$y=\cos^3 t$，$z=\sin^3 t$，$0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}$，其上的线密度 $\rho(x,y,z)=x$，求其质量.

5. 写出三元函数 $f(x,y,z)$ 在空间光滑曲线 $C(A,B)$ 的第一型曲线积分定义.

6. 求下列第二型曲线积分：

(1) $\int_C 4xy^2dx-3x^4dy$，其中 C 是抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$，从 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ 到 $(2, 2)$.

(2) $\int_C (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy$，其中 C：$y=1-|1-x|$，$0\leqslant x\leqslant 2$，从 $(0,0)$ 到 $(2,0)$.

(3) $\int_C (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$，其中 C：$x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$，从 $t=0$ 到 $t=2\pi$.

(4) $\int_C y^2dx+xydy+zxdz$，其中 C 从点 $(0,0,0)$ 到 $(1,1,1)$，沿着①直线段，②从点 $(0,0,0)$ 出发，经过点 $(1,0,0)$ 和 $(1,1,0)$ 最后到 $(1,1,1)$ 的折线.

7. 应用格林公式求下列曲线积分：

(1) $\oint_C (x-2y)\,dx+xdy$，　其中 C：$x^2+y^2=a^2$.

(2) $\oint_C \ln\left(\frac{2+y}{1+x^2}\right)dx+\frac{x(y+1)}{2+y}dy$，　其中 C 是四条直线 $x=\pm1, y=\pm1$

围成正方形的边界.

(3) $\int_C (e^x \sin y - my)\,dx + (e^x \cos y - m)\,dy$，其中 m 是常数；C 是沿上半圆周 $x^2+y^2=ax\,(y\geqslant 0)$ 由点 $A(a,\ 0)$ 到 $O(0,0)$．（提示：补加线段 OA 构成闭曲线）

8．求下列闭曲线围成区域的面积：

(1) $x=a\cos t,\quad y=b\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

(2) $x=a\cos^3 t,\quad y=b\sin^3 t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

9．求下列各题的原函数 $u(x,\ y)$：

(1) $du=(2x+3y)\,dx+(3x-4y)\,dy$.

(2) $du=(3x^2-2xy+y^2)\,dx-(x^2-2xy+3y^2)\,dy$.

*　　　　*　　　　*　　　　*

10．设函数 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在区域 R 存在二阶连续偏导数，且满足柯西-黎曼方程：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$．证明：若已知函数 $u(x,y)$，则函数 $v(x,y)$ 除相差一常数外唯一确定．$\left(\text{提示：} dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy.\right)$

11．证明：若函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 在光滑曲线 C 连续，则

$$\left|\int_C P\,dx+Q\,dy\right|\leqslant Ms,$$

其中 s 是曲线 C 的长，$M=\max\limits_{(x,y)\in C}\{\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}\}$．应用这个不等式估计

$$I_R=\oint_C \frac{y\,dx-x\,dy}{(x^2+xy+y^2)^2},$$

其中 C：$x^2+y^2=R^2$．证明，$\lim\limits_{R\to\infty} I_R=0$.

12．证明：若 C 是平面光滑闭曲线，且 l 是任意确定方向的射线，则

$$\oint_C \cos(l,n)\,ds=0,$$

其中 n 是 C 的外法线．（提示：$\cos(l,\ n)$ 是 l 与 n 的单位向量的内积，应用格林公式.）

13．证明：$\oint_C [x\cos(n,x)+y\cos(n,y)]\,ds=2A$，其中 A 是光滑闭曲线 C 所围成区域的面积，(n,x) 与 (n,y) 是曲线 C 外法线 n 分别与 x 轴正向与 y 轴正向的交角．（提示：用格林公式．）

14. 若函数 $f(x,y)$ 存在连续的二阶偏导数，在区域 G 满足方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,$$

则称 $f(x,y)$ 在 G 是**调和函数**. 函数 $f(x,y)$ 在 G 是调和函数 $\Longleftrightarrow$ 对 G 内任意光滑闭路 C，有

$$\oint_C \frac{\partial f}{\partial n}ds=0.$$

(提示：应用例 11.)

15. 证明：若 $u(x,y)$ 有连续二阶偏导数，则

$$\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=-\iint_G u\Delta u dxdy+\oint_C u\frac{\partial u}{\partial n}ds,$$

其中 G 是光滑闭曲线 C 所围成的区域，$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (提示：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

应用格林公式.)

16. 求高斯[①]积分

$$I(\xi,\eta)=\oint_C\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}ds,$$

其中 C 是无重点的光滑闭曲线，$\boldsymbol{r}$ 是连结曲线 C 上动点 $M(x,y)$ 与不在 C 上的定点 $A(\xi,\eta)$ 的矢径，$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$，$\boldsymbol{n}$ 是曲线 C 在点 $M(x,y)$ 的外法线向量. (提示：如图 14.19. 图 14.19 只画了闭曲线 C 的一段.

$$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=(x,\boldsymbol{n})-(x,\boldsymbol{r}),$$

$$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\cos(x,\boldsymbol{n})\cos(x,\boldsymbol{r})+\sin(x,\boldsymbol{n})\sin(x,\boldsymbol{r})$$

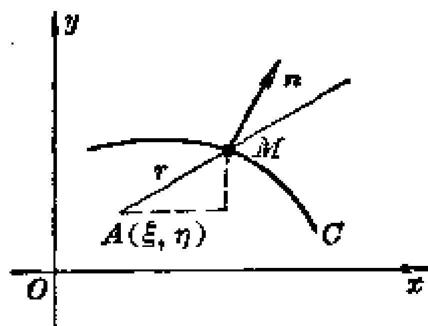


图 14.19

① 高斯(Gauss 1777—1855)德国数学家.

$$=\frac{x-\xi}{r}\cos(x,n)+\frac{y-\eta}{r}\sin(x,n).$$

$$I(\xi,\eta)=\oint_C\left[\frac{y-\eta}{r^2}\sin(x,n)+\frac{x-\xi}{r^2}\cos(x,n)\right]ds$$

$$=\oint_C\frac{x-\xi}{r^2}dy-\frac{y-\eta}{r^2}dx.$$

如果点A不属于曲线C围成的区域G，应用格林公式. 如果点A属于曲线C围成的区域G，根据格林公式，可取曲线C是以点A为心以$r=R$为半径的圆周(见例10)。

§14.2 曲 面 积 分

一、第一型曲面积分

第一型曲面积分也是从实际问题中抽象出来的. 例如，物质曲面的质量问题就可归结为第一型曲面积分.

设在三维空间$\mathbf{R}^3$中有光滑或者逐片光滑的曲面块S①，函数$f(x,y,z)$在曲面S上有定义. 首先，用曲面S上的曲线网，将曲面S任意分成n个小曲面：$S_1,S_2,\cdots,S_n$，将此分法表为T. 设第k个小曲面S_k的面积是$\Delta\sigma_k$. 在第k个小曲面S_k上任取一点$P_k(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)$，作和

$$Q_n=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta\sigma_k,\tag{1}$$

称为函数$f(x,y,z)$在曲面S的**积分和**.

令 $\delta(T)=\max\{d(S_1),d(S_2),\cdots,d(S_n)\}$②.

定义 设函数$f(x,y,z)$在光滑或逐片光滑的曲面块S有定义. 若当$\delta(T)\to0$时，函数$f(x,y,z)$在曲面S的积分和(1)存在极限L，即

① 已知光滑曲面可求面积（见§13.1. 第六段）. 本书所指的曲面都是有界的光滑或逐片光滑曲面.

② $d(S_k)$表示小曲面S_k的直径. 曲面S的直径$d(S)$是连接曲面S上任意两点线段之长的上确界.

$$\lim_{\delta(T)\to 0} Q_n = \lim_{\delta(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta\sigma_k = L,$$

则称 L 是函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 S 的**第一型曲面积分**，表为

$$L = \iint_S f(x, y, z)\,d\sigma,$$

其中 $d\sigma$ 是曲面 S 的面积微元.

不难得到，如果物质曲面 S 上任意点 $P(x, y, z)$ 的面密度是 $\rho(x, y, z)$，则物质曲面 S 的质量 m 是第一型曲面积分，即

$$m = \iint_S \rho(x, y, z)\,d\sigma.$$

第一型曲面积分有类似于第一型曲线积分那些性质，读者可仿照第一型曲线积分的性质写出第一型曲面积分的性质. 关于第一型曲面积分的存在性及其计算方法有下面的定理：

定理 1. 若曲面块 $S: x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v)$，$(u, v) \in D$，是光滑或逐片光滑的，其中 D 是有界闭区域. 函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 S 连续，则函数 $f(x, y, z)$ 在 S 第一型曲面积分存在，且

$$\iint_S f(x, y, z)\,d\sigma$$

$$= \iint_D f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv, \qquad (2)$$

其中 $E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2$，$F = x_u'x_v' + y_u'y_v' + z_u'z_v'$，$G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2$.

证法与第一型曲线积分相应定理(§ 14.1. 定理 1)完全相同，从略.

公式(2)指出，求第一型曲面积分可化为二重积分. 曲面微元 $d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$.

如果光滑曲面 $S: z = z(x, y)$，$(x, y) \in D$，其中 D 是有界闭区域，则

$$\iint_S f(x,y,z)d\sigma=\iint_D f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy. \quad (3)$$

例 1. 求曲面积分$\iint_S \frac{d\sigma}{z}$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h(0<h<a)$所截的顶部($z\geqslant h$)(如图 14.20).

解 曲面S的方程是

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

曲面S在 xy 平面上的投影区域D是

$$x^2+y^2\leqslant a^2-h^2.$$

$$d\sigma=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

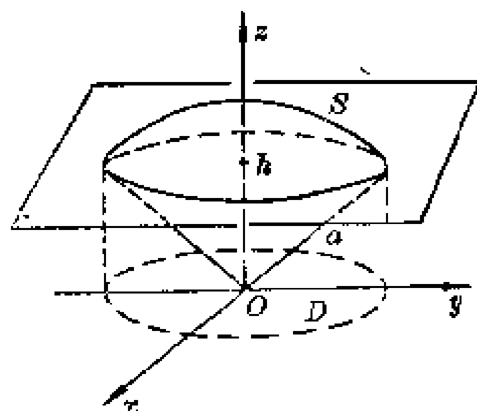


图 14.20

由(3)式，有

$$\iint_S\frac{d\sigma}{z}=\iint_D\frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy=a\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{r}{a^2-r^2}dr$$

$$=-\pi a\ln(a^2-r^2)\Big|_0^{\sqrt{a^2-h^2}}=2a\pi\ln\frac{a}{h}.$$

例 2. 求曲面积分$\iint_S zd\sigma$，其中曲面S是螺旋面 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi, z=\varphi$ ($0\leqslant r\leqslant a; 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$) 的一部分.

解

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1.$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial\varphi}$$

$$=-r\sin\varphi\cos\varphi+r\sin\varphi\cos\varphi=0.$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2$$

$$=r^2\sin^2\varphi+r^2\cos^2\varphi+1=1+r^2.$$

$$d\sigma=\sqrt{EG-F^2}\,drd\varphi=\sqrt{1+r^2}\,drd\varphi.$$

设 $D[0\leqslant r\leqslant a;\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi]$. 由公式(2)，有

$$\iint\limits_S z d\sigma=\iint\limits_D \varphi\sqrt{1+r^2}\,dr d\varphi=\int_0^{2\pi}\varphi d\varphi\int_0^a\sqrt{1+r^2}\,dr$$

$$=2\pi^2\left[\frac{r}{2}\sqrt{1+r^2}+\frac{1}{2}\ln(r+\sqrt{1+r^2})\right]\Big|_0^a$$

$$=\pi^2[a\sqrt{1+a^2}+\ln(a+\sqrt{1+a^2})].$$

二、第二型曲面积分

第二型曲面积分的定义和计算与第二型曲线积分的定义和计算完全类似. 已知第二型曲线积分与曲线的方向有关，同样，第二型曲面积分与曲面的方向也有关. 因此要讨论曲面的正向和负向(或正侧与负侧).

在光滑曲面 S 上任取一点 P_0, 过点 P_0 的法线有两个方向，选定一个方向为正向. 当点 P 在曲面 S 上连续变动（不越过曲面的边界)时，法线也连续变动. 当动点 P 从点 P_0 出发沿着曲面 S 上任意一条闭曲线又回到点 P_0 时，如果法线的正向与出发时的法线正向相同，称这种曲面 S 是**双侧曲面**，否则称为**单侧曲面**. 通常所遇到的曲面都是双侧曲面. 单侧曲面也是存在的. 例如，将长方形的纸条的一端扭转 $180°$, 再与另一端粘合起来，就是单侧曲面(如图 14.21). 我们只讨论双侧曲面. 因为双侧曲面有正向与负向，所以同一块曲面由于方向不同，在坐标面上投影的面积就带有不同的符号.

首先讨论流量问题. 在三维空间体 W 中有流体稳定（与时间无关)流动. 已知流体在任意一点 $P(x,y,z)$ 的流速是 $\boldsymbol{A}(P)$, 即 $\boldsymbol{A}(P)$ 是向量函数

$$\boldsymbol{A}(P)=(A_x(P),A_y(P),A_z(P)),$$

其中 $A_x(P)$, $A_y(P)$, $A_z(P)$ 是向量 $\boldsymbol{A}(P)$ 分别在 x 轴、y 轴、z 轴上的分量，并且都在体 W 连续. 于是，W 构成了流体速度场. 设在

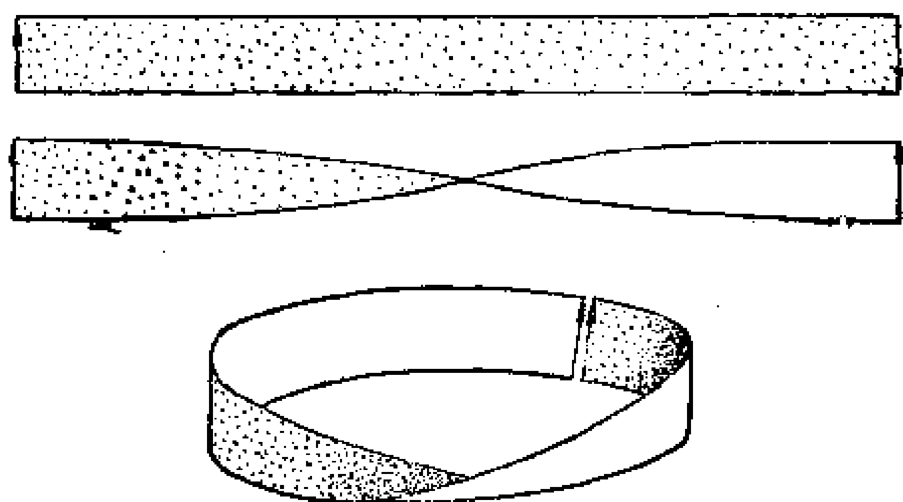


图 14.21

W内有一块双侧曲面 S. 在单位时间内，流体速度场流过曲面 S 的流体体积 V，称为流过曲面 S 的流量. 下面计算流量:

将曲面 S 分成 n 个小曲面: $S_1, S_2, \cdots, S_n$, 将此分法表为 T. 设第 k 个小曲面 S_k 的面积是 $\Delta\sigma_k$. 在第 k 个小曲面 S_k 上任取一点 P_k, 以 $\boldsymbol{A}(P_k)$ 近似代替 S_k 上每一点的流速，则流体速度场 $\boldsymbol{A}(P)$ 通过第 k 个小曲面 S_k 的流量 V_k 近似等于以 S_k 为底以向量 $\boldsymbol{A}(P_k)$ 为母线的斜柱体的体积(如图 14.22). 已知斜柱体的体积等于同底等高的直柱体的体积. 于是,

$$V_k \approx \boldsymbol{A}(P_k) \cdot \boldsymbol{n}_k \Delta\sigma_k,$$

其中 $\boldsymbol{n}_k$ 表示点 P_k 的法线正向的单位向量. 设 $\boldsymbol{n}_k$ 与 x 轴、y 轴、z 轴的正向交角分别是 $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, 则

$$\boldsymbol{n}_k = (\cos\alpha_k, \cos\beta_k, \cos\gamma_k).$$

设小曲面 S_k 在 yz 平面、zx 平面、xy 平面投影的面积分别是 $\Delta y_k \Delta z_k$, $\Delta z_k \Delta x_k$, $\Delta x_k \Delta y_k$. 由图 14.23(只给出在 xy 平面上的投影)不难得到:

$$\cos\alpha_k \Delta\sigma_k = \Delta y_k \Delta z_k,$$

$$\cos\beta_k \Delta\sigma_k = \Delta z_k \Delta x_k,$$

$$\cos\gamma_k\Delta\sigma_k=\Delta x_k\Delta y_k.$$

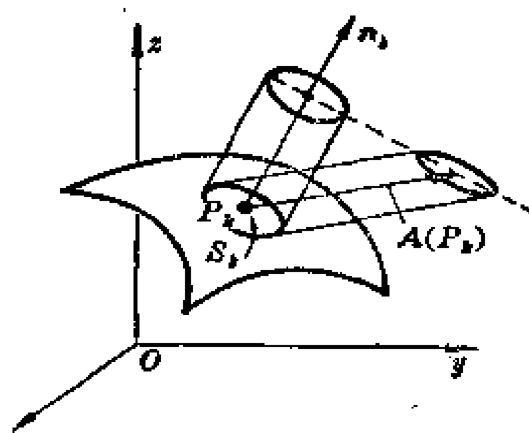


图 14.22

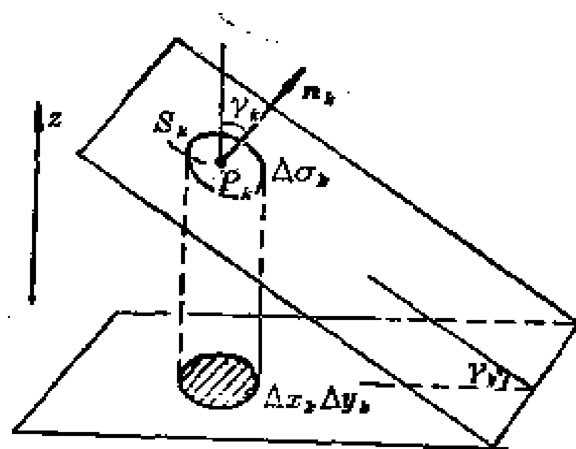


图 14.23

从而，流体速度场 $\boldsymbol{A}(P)$ 通过曲面 S 的流量 Q 近似地等于

$$Q=\sum_{k=1}^{n}V_k\approx\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{A}(P_k)\cdot\boldsymbol{n}_k\Delta\sigma_k.$$

于是,流体速度场 $\boldsymbol{A}(P)$ 通过曲面 S 的流量

$$Q=\lim_{\delta(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{A}(P_k)\cdot\boldsymbol{n}_k\Delta\sigma_k.$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}(P_k)\cdot\boldsymbol{n}_k\Delta\sigma_k\\&=(A_x(P_k),A_y(P_k),A_z(P_k))\cdot(\cos\alpha_k,\cos\beta_k,\cos\gamma_k)\Delta\sigma_k\\&=[A_x(P_k)\cos\alpha_k+A_y(P_k)\cos\beta_k+A_z(P_k)\cos\gamma_k]\Delta\sigma_k\\&=A_x(P_k)\Delta y_k\Delta z_k+A_y(P_k)\Delta z_k\Delta x_k+A_z(P_k)\Delta x_k\Delta y_k,\end{aligned}$$

有

$$Q=\lim_{\delta(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}[A_x(P_k)\Delta y_k\Delta z_k+A_y(P_k)\Delta z_k\Delta x_k+A_z(P_k)\Delta x_k\Delta y_k].$$

抽去上式中的实际意义就是第二型曲面积分.

设函数 $f(x,y,z)$ 在双侧光滑或逐片光滑曲面块 S 上有定义,

选定曲面S一侧为正. 将曲面S分成n个小曲面：$S_1, S_2, \cdots, S_n$，将此分法表为T，用$\Delta\sigma_k$表示第k个小曲面S_k的面积，S_k在xy平面投影的小区域的面积是$\Delta x_k \Delta y_k$，在第k个小曲面S_k上任取一点$P_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$. 作和

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta x_k \Delta y_k, \tag{4}$$

称为函数$f(x,y,z)$在曲面S关于xy的**积分和**.

令　$\delta(T) = \max\{d(S_1), d(S_2), \cdots, d(S_n)\}$.

定义　设函数$f(x, y, z)$在光滑或逐片光滑曲面块S有定义. 若当$\delta(T) \to 0$时，函数$f(x,y,z)$在曲面S关于xy的积分和(4)存在极限I_{xy}，即

$$\lim_{\delta(T)\to 0} R_n = \lim_{\delta(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta x_k \Delta y_k = I_{xy},$$

则称I_{xy}是$f(x,y,z)dxdy$在曲面S的**第二型曲面积分**，表为

$$I_{xy} = \iint_S f(x, y, z)\,dxdy,$$

其中$dxdy$是曲面微元$d\sigma$在xy平面上投影的面积微元(注意，因曲面S的正侧取法不同，它带有正号或负号).

类似地，设小曲面S_k在yz平面与zx平面的投影小区域的面积分别是$\Delta y_k \Delta z_k$与$\Delta z_k \Delta x_k$. 类似地分别有$f(x, y, z)dydz$与$f(x,y,z)dzdx$在曲面S的第二型曲面积分，即

$$\iint_S f(x, y, z)\,dydz = \lim_{\delta(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta y_k \Delta z_k.$$

$$\iint_S f(x, y, z)\,dzdx = \lim_{\delta(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta z_k \Delta x_k.$$

不难看到，流体速度场$A(P) = (A_x(P), A_y(P), A_z(P))$通过

光滑曲面 S 的流量 Q 是它的三个分量函数 $A_x(P)$, $A_y(P)$, $A_z(P)$ 关于 $A_x(P)dydz$, $A_y(P)dzdx$, $A_z(P)dxdy$ 在曲面 S 上的第二型曲面积分之和，即

$$Q=\iint_S A_x(P)dydz+\iint_S A_y(P)dzdx+\iint_S A_z(P)dxdy.$$

通常简写为

$$Q=\iint_S A_x(P)dydz+A_y(P)dzdx+A_z(P)dxdy$$

$$=\iint_S [A_x(P)\cos(n,x)+A_y(P)\cos(n,y)+A_z(P)\cos(n,z)]d\sigma$$

$$=\iint_S \boldsymbol{A}(P)\cdot\boldsymbol{n}d\sigma,$$

其中 (n,x), (n,y), (n,z) 分别是点 P 处法线 $\boldsymbol{n}$ 的正向与 x 轴、y 轴、z 轴的正向交角. 于是，两类曲面积分之间的转换关系是

$$dydz=\cos(n,x)d\sigma,\quad dzdx=\cos(n,y)d\sigma,$$
$$dxdy=\cos(n,z)d\sigma.$$

如果 S^{-1} 与 S 表同一曲面，而方向相反，则

$$\iint_S A_x(P)dydz+A_y(P)dzdx+A_z(P)dxdy$$

$$=-\iint_{S^{-1}} A_x(P)dydz+A_y(P)dzdx+A_z(P)dxdy.$$

如果 S 是闭曲面，则 $f(x,y,z)dxdy$ 在 S 的第二型曲面积分表为

$$\oiint_S f(x,y,z)dxdy.$$

除特殊说明外，闭曲面 S 上的第二型曲面积分都是取 S 的外侧为正(或向外的法线方向是正向).

定理 2. 若有光滑曲面 S：$z=z(x,y)$，$(x,y)\in D$，其中 D 是有界闭区域，函数 $f(x,y,z)$ 在 S 连续，则 $f(x,y,z)dxdy$ 在曲面 S 的第二型曲面积分存在，且

$$\iint_S f(x,y,z)dxdy=\pm\iint_D f(x,y,z(x,y))dxdy,$$

其中符号"±"由曲面 S 的正侧外法线与 z 轴正向的夹角余弦的符号决定.

证明从略.

例 3. 求曲面积分 $\iint_S xyzdxdy$，其中曲面 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1(x\geqslant0,y\geqslant0)$ 的四分之一，取球面的外侧为正侧.

解 曲面 S 在 xy 平面的上下两部分的方程分别是

S_1：$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与 S_2：$z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$.

曲面 S_1 外法线与 z 轴正向是锐角. 曲面 S_2 外法线与 z 轴正向是钝角，而曲面 S_1 与 S_2 在 xy 平面上的投影都是扇形区域 D：$x^2+y^2\leqslant1(x\geqslant0,y\geqslant0)$. 于是，

$$\begin{aligned}\iint_S xyzdxdy&=\iint_{S_1}xyzdxdy+\iint_{S_2}xyzdxdy\\&=\iint_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy-\iint_D xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})dxdy\\&=2\iint_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\varphi d\varphi\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}dr=\frac{2}{15}.\end{aligned}$$

例 4. 求曲面积分 $\iint_S x^3dydz$，其中 S 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的 $x\geqslant0$ 的部分，取椭球面外侧为正侧.

解 当 $x\geqslant 0$ 时，椭球面的方程是

$$x=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}},\quad (y,z)\in D:\ \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1.$$

于是，

$$\iint_S x^3dydz=a^3\iint_D\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}dydz$$

$$=a^3bc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(1-r^2)^{\frac{3}{2}}rdr=\frac{2}{5}\pi a^3bc.$$

（设 $y=br\cos\varphi,\quad z=cr\sin\varphi,\quad 0\leqslant r\leqslant 1,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$）

三、奥高[①]公式

格林公式给出了平面区域上的二重积分与围成该区域的闭曲线上的曲线积分之间的联系．奥高公式是格林公式在三维空间的推广，它给出了三维空间体上的三重积分与围成该体边界的闭曲面上的曲面积分之间的联系．

定理3. 若三维空间的有界闭体 V 是由光滑或逐片光滑的闭曲面 S 围成．函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 及其偏导数在有界闭体 V 连续，则

$$\oiint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz, \tag{5}$$

其中曲面 S 外侧为正侧．公式(5)称为**奥高公式**．

证明 首先证明

$$\oiint_S R(x,y,z)dxdy$$

$$=\iiint_V\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz.$$

① 奥高公式是奥斯特洛格拉特斯基-高斯公式的简称．奥斯特洛格拉特斯基(Остроградский 1801—1861)，俄国数学家．

如果平行于三个坐标轴的直线与曲面S至多有两个交点（闭曲面S的侧面有平行坐标轴的母线除外）．设体V是由定义在xy平面闭区域D上的光滑曲面$z=z_1(x, y)$与$z=z_2(x, y)$[$z_1(x,y)\leqslant z_2(x,y)$]以及平行$z$轴的母线所围成(如图 14.24)．

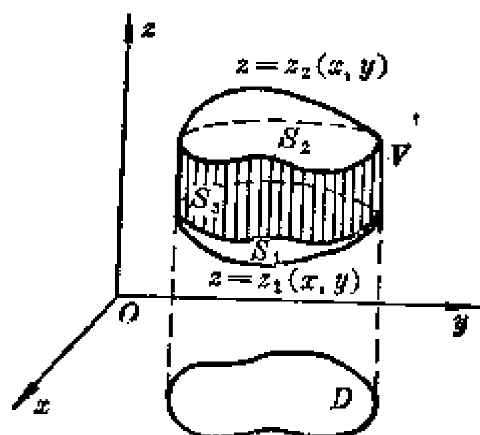


图 14.24

由三重积分的计算公式，有

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz$$

$$=\iint\limits_D R(x, y,z)\Big|_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)}dxdy$$

$$=\iint\limits_D \{R[x,y,z_2(x,y)]-R[x,y,z_1(x,y)]\}dxdy. \quad (6)$$

由曲面积分的计算公式，有

$$\oiint\limits_S Rdxdy=\iint\limits_{S_1} Rdxdy+\iint\limits_{S_2} Rdxdy+\iint\limits_{S_3} Rdxdy,$$

其中曲面S_3是曲面S的侧面（由平行z轴的母线组成）．因为曲面S_3在xy平面上的投影是区域D的边界．根据曲面积分定义，有

$$\iint\limits_{S_3} Rdxdy=0.$$

已知曲面 S_1 法线正向与 z 轴正向的交角是钝角，曲面 S_1^{-1} 的法线正向与 z 轴正向的交角是锐角. 于是，

$$\oiint_S R dxdy = \iint_{S_2} R(x, y, z) dxdy - \iint_{S_1^{-1}} R(x, y, z) dxdy$$

$$= \iint_D \{R[x, y, z_2(x, y)] - R[x, y, z_1(x, y)]\} dxdy. \tag{7}$$

由(6)式与(7)式，有

$$\oiint_S R(x, y, z) dxdy = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz. \tag{8}$$

同法可证

$$\oiint_S P(x, y, z) dydz = \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz. \tag{9}$$

$$\oiint_S Q(x, y, z) dzdx = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz. \tag{10}$$

等式(8), (9), (10)的等号左右两端分别相加，得奥高公式(5).

如果曲面 S 与平行坐标轴的直线的交点多于两个，可用光滑曲面将体 V 分为有限个小体，使围成每个小体的闭曲面满足上述的要求，奥高公式仍是正确的. □

设闭曲面 S 上点 (x, y, z) 的外法线（正向）的方向余弦是 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. 由两类曲面积分之间的关系，奥高公式可改写为

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

$$= \oiint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) d\sigma.$$

特别是，当 $P(x, y, z) = x$, $Q(x, y, z) = y$, $R(x, y, z) = z$ 时，奥高公式(5)是

$$3\iiint_V dxdydz = \oiint_S xdydz + ydzdx + zdxdy.$$

于是，体 V 的体积

$$H=\iiint\limits_{V} dxdydz=\frac{1}{3}\oiint\limits_{S} xdydz+ydzdx+zdxdy.$$

由此可见，求体 V 的体积 H 也可化为围成体 V 的闭曲面 S 上的曲面积分.

例 5. 求曲面积分

$$\oiint\limits_{S}(x^3-yz)dydz-2x^2ydzdx+zdxdy,$$

其中 S 是平面 $x=a, y=a, z=a$ 及三个坐标面围成的立方体 V 的表面($a>0$).

解 $P=x^3-yz,\quad Q=-2x^2y,\quad R=z.$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2,\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=-2x^2,\quad \frac{\partial R}{\partial z}=1.$$

由奥高公式，有

$$\oiint\limits_{S}(x^3-yz)dydz-2x^2ydzdx+zdxdy$$

$$=\iiint\limits_{V}(3x^2-2x^2+1)dxdydz$$

$$=\int_0^a dz\int_0^a dy\int_0^a (x^2+1)dx=\frac{a^5}{3}+a^3.$$

例 6. 求曲面积分

$$\iint\limits_{S}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)d\sigma,$$

其中 S 是锥面 $x^2+y^2=z^2(0\leqslant z\leqslant h)$，而 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是锥面外法线(正向)的方向余弦(如图 14.25).

解 作辅助平面 $z=h$. 平面 $z=h$ 与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 围成锥体 V，如图 14.25. 设锥体的底面是 S_1，其中 $P=x^2, Q=y^2, R=z^2$.

$$\frac{\partial P}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial R}{\partial z}=2z.$$

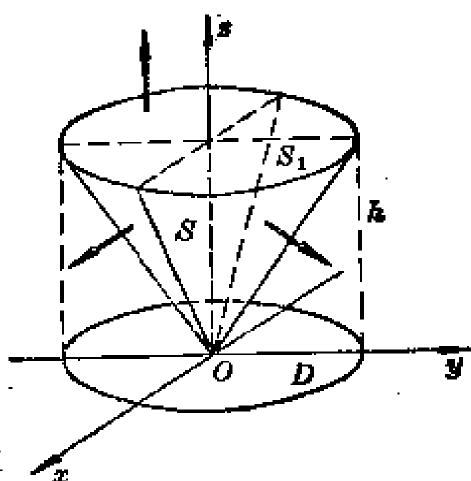


图 14.25

由奥高公式，有

$$\oiint_{S+S_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)d\sigma$$

$$=2\iiint_V(x+y+z)dxdydz \qquad \text{(作柱面坐标替换)}$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h r dr\int_r^h[r(\cos\varphi+\sin\varphi)+z]dz=\frac{\pi}{2}h^4.$$

平面S_1外法线(正向)与 z 轴平行，方向余弦是$\cos\frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{\pi}{2}$, $\cos 0$，平面S_1在xy平面上的投影是圆域D: $x^2+y^2\leqslant h^2$. $d\sigma=dxdy$. 有

$$\iint_{S_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)d\sigma$$

$$=\iint_{S_1}\left(x^2\cos\frac{\pi}{2}+y^2\cos\frac{\pi}{2}+h^2\cos 0\right)d\sigma$$

$$=\iint_D h^2dxdy=\pi h^4.$$

于是，

$$\iint_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)d\sigma$$

$$= -\iint_{S_1} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)d\sigma + \frac{\pi}{2}h^4$$

$$= -\pi h^4 + \frac{\pi}{2}h^4 = -\frac{\pi}{2}h^4.$$

四、斯托克斯①公式

奥高公式是格林公式在三维空间的推广，而格林公式还可从另一方面推广，就是将曲面 S 的曲面积分与沿该曲面 S 的边界闭曲线 C 的曲线积分联系起来.

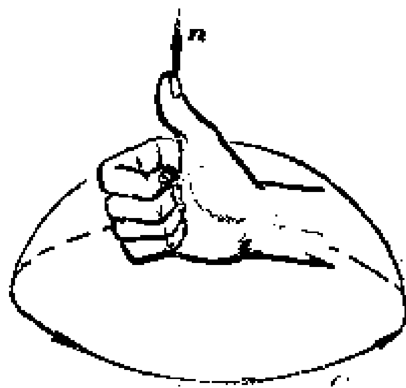


图 14.26

设有光滑曲面块 S，其边界是空间闭曲线 C. 取定 S 的一侧为正侧. 规定闭曲线 C 的正向按右手法则，即如果右手拇指的方向指向曲面法线的正向，则其余四指所指的方向就是闭曲线 C 的正向（如图 14.26）. 根据右手法则，由曲面 S 的正侧（或法线的正向）就决定了闭曲线 C 的正向；反之亦然.

定理 4. 若光滑曲面块 S 的边界是光滑或逐段光滑闭曲线 C，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 及其偏导数在曲面 S 连续，则

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy, \quad (11)$$

其中曲面 S 的正侧与曲线 C 的正向按右手法则. 公式(11)称为斯

---

① 斯托克斯(Stokes 1819—1903)，英国数学家.

托克斯公式.

证法　证明等式(11)就是分别证明三个等式:

$$\oint_C P(x,y,z)dx=\iint_S \frac{\partial P}{\partial z}dzdx-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy,$$

$$\oint_C Q(x,y,z)dy=\iint_S \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy-\frac{\partial Q}{\partial z}dydz,$$

$$\oint_C R(x,y,z)dz=\iint_S \frac{\partial R}{\partial y}dydz-\frac{\partial R}{\partial x}dzdx.$$

证明第一个等式成立，其证法是应用空间曲线积分的计算公式与格林公式分别将$\oint_C P(x,y,z)dx$与$\iint_S \frac{\partial P}{\partial z}dzdx-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy$化为有相同被积函数和平面上同一条闭曲线上的曲线积分. 同法可证第二个、第三个等式.

证明　首先证明

$$\oint_C P(x,y,z)dx=\iint_S \frac{\partial P}{\partial z}dzdx-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy.$$

如果平行于三个坐标轴的直线与曲面S至多交于一点（S上有平行于坐标轴的线段除外）. 设以x与y为自变量，曲面S的方程是

$$z=f(x,y)\quad (x,y)\in D.$$

区域D是曲面S在xy平面上的投影. 设区域D的边界闭曲线是Γ，如图 14.27.

由曲线积分的计算公式，有

$$\oint_C P(x,y,z)dx=\oint_\Gamma P[x,y,f(x,y)]dx.$$

由§10.3(3)式，有

$$dzdx = \cos\beta d\sigma = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}d\sigma$$ ①

$$= -\frac{\partial f}{\partial y}\cos\gamma d\sigma = -\frac{\partial f}{\partial y}dxdy.$$

于是,

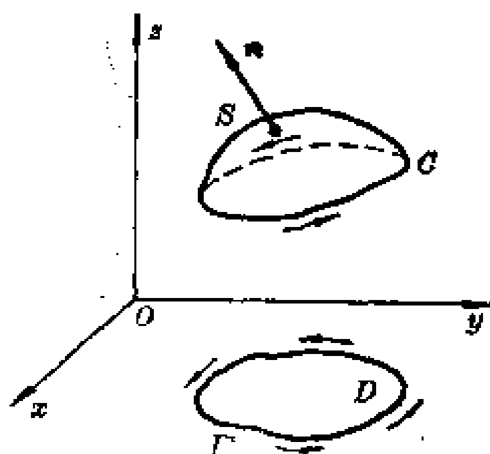


图 14.27

$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

$$= \iint_S -\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}dxdy - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

$$= -\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= -\iint_D \frac{\partial}{\partial y}P[x,y,f(x,y)]dxdy$$

$$= \oint_\Gamma P[x,y,f(x,y)]dx,$$ (见 § 14.1 格林公式,(24)式)

即

$$\oint_C P(x, y, z)dx = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy. \tag{12}$$

同法可证

$$\oint_C Q(x, y, z)dy = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z}dydz. \tag{13}$$

$$\oint_C R(x, y, z)dz = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y}dydz - \frac{\partial R}{\partial x}dzdx. \tag{14}$$

等式(12),(13),(14)的等号左右两端分别相加,得斯托克斯

---

① 见169页(3)式. 如果法线 n 的正方向与 z 轴正方向的交角 γ 是锐角,则 $\cos\gamma>0$,此时,(3)式中的 Δ' 前取负号.

公式(11).

如果曲面S与平行三个坐标轴的直线交点多于一点，可将曲面S分成有限多个小曲面块，使得每一块小曲面都满足上述要求，根据曲面积分与曲线积分的性质，不难证明斯托克斯公式(11)也成立. □

斯托克斯公式也可化成第一型曲面积分，即

$$\oint_C Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos(n,x)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos(n,y)+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos(n,z)\right]d\sigma,$$

其中$\cos(n,x)$, $\cos(n,y)$, $\cos(n,z)$是曲面S正侧法线的方向余弦.

为了便于记忆，可将斯托克斯公式表为行列式的形式:

$$\oint_C Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S\begin{vmatrix}\cos(n,x) & \cos(n,y) & \cos(n,z)\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}^{①}d\sigma$$
$$=\iint_S\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

例7. 求曲线积分

$$\int_{C(A,B)}(x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz,$$

其中曲线$C(A,B)$是螺旋线: $x=a\cos\varphi$, $y=a\sin\varphi$, $z=\frac{h}{2\pi}\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$. $A(a,0,0)$, $B(a,0,h)$. (如图14.28).

---

① 规定$\frac{\partial}{\partial x}\cdot Q=\frac{\partial Q}{\partial x}$, ….

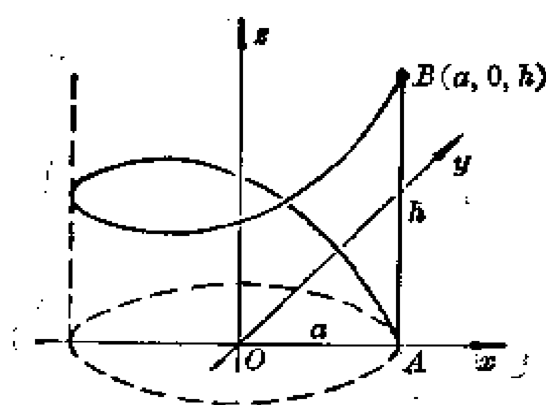


图 14.28

解 曲线 $C(A, B)$ 加上线段 $\overline{BA}$ 构成逐段光滑闭曲线. 其中

$$P=x^2-yz,\quad Q=y^2-zx,\quad R=z^2-xy.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-z,\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=-x,\quad \frac{\partial R}{\partial x}=-y.$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=-y,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-z,\quad \frac{\partial R}{\partial y}=-x.$$

由斯托克斯公式(11),有(不论取曲线哪个方向为正向)

$$\oint_{C(A,B)+\overline{BA}}(x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz=0.$$

或

$$\int_{C(A,B)}=-\int_{\overline{BA}}=\int_{\overline{AB}}.$$

而

$$\int_{\overline{AB}}=\int_{(a,0,0)}^{(a,0,h)}(x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz$$

$$=\int_0^h z^2dz=\frac{h^3}{3},$$

则 $$\int_{C(A,B)}(x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz=\frac{h^3}{3}.$$

例 8. **求曲线积分**

$$\oint_C (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz,$$

其中曲线C是立方体 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant a$，$0\leqslant z\leqslant a$ 的表面与平面 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 的交线，其方向与平面法线方向 $\boldsymbol{n}$（拇指方向）构成右手螺旋系(如图 14.29)。

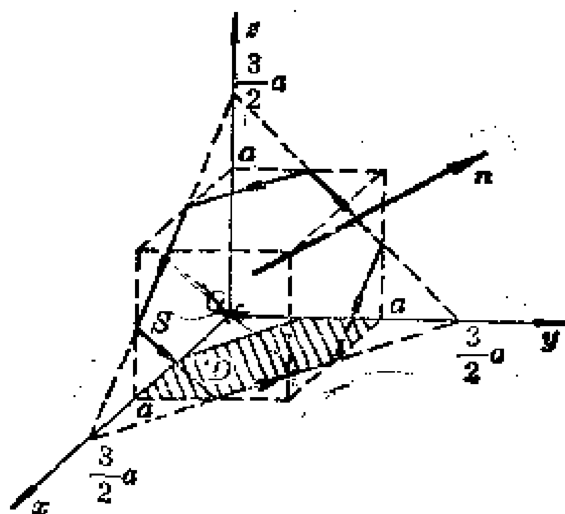


图 14.29

解 $P=y^2-z^2$，$Q=z^2-x^2$，$R=x^2-y^2$。

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=2z,\quad \frac{\partial R}{\partial x}=2x,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=-2z,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-2x,\quad \frac{\partial R}{\partial y}=-2y.$$

由斯托克斯公式(11)，有

$$\oint_C (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

$$=-2\iint_S (y+z)dydz+(z+x)dzdx+(x+y)dxdy,$$

其中取S是平面 $x+y+z=\frac{3}{2}a$上被闭曲线C所围成的区域.（空间平面块)S的法线n正方向与三个坐标轴正向的夹角都是锐角，有

$$\cos(n,x)=\cos(n,y)=\cos(n,z)=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

于是,

$$\iint_S (y+z)dy\,dz+(z+x)dz\,dx+(x+y)dx\,dy$$

$$=\iint_S[(y+z)\cos(n,x)+(z+x)\cos(n,y)+(x+y)\cos(n,z)]d\sigma$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S (x+y+z)d\sigma=\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S\frac{3}{2}\,a d\sigma=\frac{3a}{\sqrt{3}}\iint_S d\sigma.$$

平面 S 的方程是 $z=\frac{3}{2}a-x-y$. $d\sigma=\sqrt{3}\,dx\,dy$, 有

$$\iint_S d\sigma=\iint_D\sqrt{3}\,dx\,dy=\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4}a^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2,$$

其中 D 是 S 在 xy 平面上的投影区域(图 14.29 中的阴影部分),它的面积是 $\frac{3}{4}a^2$. 于是,

$$\oint_C (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

$$=-2\cdot\frac{3a}{\sqrt{3}}\iint_S d\sigma=-2\cdot\frac{3a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2=-\frac{9}{2}a^2.$$

平面曲线积分与路线无关的等价命题，不难推广到三维空间上来.

定理 5. 若函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 及其偏导数在单连通①体 V 连续,则下列四个断语是等价的:

1) 曲线积分

$$\int_{C(A,B)} P dx+Q dy+R dz$$

① 单连通体 V,即 V 内任意封闭曲面所围成的体都属于 V.

与路线C无关，即只与始点A与终点B有关.

2) 在体V内存在函数$u(x,y,z)$，使

$$du=Pdx+Qdy+Rdz.$$

3) $\forall(x,y,z)\in V$，有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\qquad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z},\qquad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}.$$

4) 对体V内任意光滑或逐段光滑闭曲线Γ，有

$$\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz=0.$$

读者可仿照§14.1定理4证之. 证明从略.

练 习 题 14.2

1. 求下列第一型曲面积分：

(1) $\iint\limits_{S}(x+y+z)\,d\sigma$，其中$S$是$x^2+y^2+z^2=a^2$，$z\geqslant0$.

(2) $\iint\limits_{S}z^2d\sigma$，其中$S$是$x=r\cos\varphi\sin\alpha$，$y=r\sin\varphi\sin\alpha$，$z=r\cos\alpha$，

$\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}，\alpha是常数\right)0\leqslant r\leqslant a$，$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$.

2. 证明：若D是xy平面上的有界闭区域，$z=z(x,y)$是D上的光滑曲面S，函数$f(x,y,z)$在S连续，则$\exists(\xi,\eta,\zeta)\in S$，使

$$\iint\limits_{S}f(x,y,z)\,d\sigma=f(\xi,\eta,\zeta)\cdot A,$$

其中A是曲面S的面积.

3. 求下列第二型曲面积分：

(1) $\oiint\limits_{S}zdxdy$，其中S是$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，外法线是正向.

(2) $\oiint\limits_{S}yzdydz+zxdzdx+xydxdy$，其中$S$是四面体$x+y+z=a\,(a>0)$，$x=0$，$y=0$，$z=0$的表面，外法线是正向.

4. 已知稳定流体速度场$A=(0,0,x+y+z)$，求单位时间内流过曲面S: $x^2+y^2=z(0\leqslant z\leqslant h)$的流量，法线正向与$z$轴正向的夹角是钝角.

5. 应用奥高公式求下列第二型曲面积分：

(1) $\oiint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中$S$是立方体$0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant a$，$0\leqslant z\leqslant a$的表面，外法线为正向.

(2) $\oiint\limits_S xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$，其中$S$是

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

和$z=0$围成体的表面，外法线为正向.

6. 应用奥高公式求第3题中的(1)，(2)，并验证你的计算结果.

7. 应用斯托克斯公式计算下列曲线积分：

(1) $\oint\limits_C ydx+zdy+xdz$，其中$C$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$与平面$x+y+z=0$相交的圆周，从$x$轴正向看逆时针方向为正.

(2) $\oint\limits_C x^2y^3dx+dy+dz$，其中$C$是抛物面$x^2+y^2=a^2-z$与平面$z=0$相交的圆周，其正方向与$z$轴构成左手螺旋系.

8. 证明 定理4中一个等式：

$$\oint\limits_C Q(x,y,z)dy=\iint\limits_S \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy-\frac{\partial Q}{\partial z}dydz.$$

$\left(\text{提示：证明} dydz=-\frac{\partial f}{\partial x}dxdy\right)$

9. 证明：若在长方体V有$du=Pdx+Qdy+Rdz$，取点$(x_0,y_0,z_0)\in V$，$\forall(x,y,z)\in V$，则

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy$$
$$+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz+u(x_0,y_0,z_0).$$

10. 设 $du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$，求原函数$u(x,y,z)$.

* * * *

11. 证明：若S是光滑闭曲面，l是任意常向量，则

$$\oiint_S \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\,d\sigma=0,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是曲面S的外法线．（提示：见§14.1第12题．）

12．求曲面积分

$$\oiint_S (x-y+z)\,dydz+(y-z+x)\,dzdx+(z-x+y)\,dxdy,$$

其中S是曲面$|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$，外侧为正．

13．证明泊松[1]公式

$$\oiint_S f(ax+by+cz)\,d\sigma=2\pi\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,du,$$

其中S是球面$x^2+y^2+z^2=1$．（提示：将直角坐标系xyz旋转为新直角坐标系uvw．令$ax+by+cz=0$是vw平面．u轴垂直它．于是，

$$u=\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

作线性变换(见§13.2第12题)，有

$$\oiint_S f(ax+by+cz)\,d\sigma=\oiint_{S'} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,du.$$

S' 是球面 $u^2+v^2+w^2=1$，表为 $u=u,v=\sqrt{1-u^2}\cos t$，$w=\sqrt{1-u^2}\sin t$，$-1\leqslant u\leqslant 1,0\leqslant t\leqslant 2\pi$.）

14．求高斯积分

$$I(\xi,\eta,\zeta)=\oiint_S \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}\,d\sigma,$$

其中S是光滑闭曲面，$\boldsymbol{n}$是在曲面S上点(x,y,z)的外法线．$\boldsymbol{r}$是连结曲面S上动点$M(x,y,z)$与曲面S外定点(ξ,η,ζ)的矢径，

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}.$$

讨论两种情况：(1)曲面S不包含点(ξ,η,ζ)；(2)曲面S包含点(ξ,η,ζ)．（提示：见§14.1第16题）

15．证明：若$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，则

(1) $\iint_S \frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma=\iiint_V \Delta u\,dxdydz,$

① 泊松(Poisson，1781—1840)，法国数学家．

(2) $\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=\iiint_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz$

$$+\iiint_V u\Delta u\ dxdydz,$$

其中S是包围有界体V的光滑闭曲面，$\frac{\partial u}{\partial n}$是曲面$S$外法线$n$的方向导数.

16. 证明定理5中的2)⇒3), 3)⇒4).

§14.3. 场论初步

在空间或空间的一部分V上分布着某一种物理量，V就构成一个场.在物理学中有各种不同的场，如物体的温度场，大气压力场，空间的引力场，流体的速度场等. 一般来说，场可分为两类:数量场，如密度场、温度场等；向量场，如引力场、速度场等.尽管每种场都有各自的物理特性，但是在数量关系上各类场都有相同的数学形式.

一、梯度

设三维空间的体V是一个数量场，即在V上定义一个三元函数$f(x,y,z)$，且函数$f(x,y,z)$在V上存在所有的偏导数.

定义 向量

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

称为函数（数量场）$f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 的**梯度**，表为$\mathrm{grad}f(P)$，即

$$\mathrm{grad}f(P)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

由此可见，数量场的梯度是一个向量场(梯度向量场).

如果l是过点P的射线，l的方向余弦是$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. 由§10.3定理5，函数$f(x,y,z)$在点P沿射线l的方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

已知$\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$是射线 l 的单位向量. 由向量内积公式，有

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\mathbf{grad}f(P)\cdot\boldsymbol{l}$$

$$=|\mathbf{grad}f(P)||\boldsymbol{l}|\cos\theta=|\mathbf{grad}f(P)|\cos\theta, \tag{1}$$

其中角 θ 是在点P的梯度向量 $\mathbf{grad}f(P)$ 与单位向量 $\boldsymbol{l}$ 之间的夹角(如图 14.30).

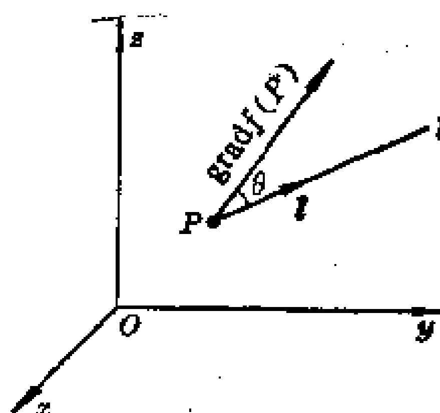


图 14.30

由(1)式不难看到，仅当 $\theta=0$时，即单位向量 $\boldsymbol{l}$(也就是射线l)的方向与梯度 $\mathbf{grad}f(P)$的方向一致时，方向导数$\frac{\partial f}{\partial l}$才能取到最大值. 换句话说，梯度的方向就是函数 $f(x,y,z)$ 在点P变化率最快(或最大)的方向.

再从等值面看梯度. 如果函数 $f(x,y,z)$ 的所有偏导数在 V 连续，V 中的曲面

$$f(x,y,z)=C(\text{常数})$$

称为等值面. 例如，气象学中的等温面、等压面等都是等值面的原型. 函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 的等值面

$$x^2+y^2+z^2=C\quad(\text{任意 } C\geqslant 0)$$

是以原点为心的一族同心球面.

过场中的每个点只有一个等值面. 显然,等值面彼此不相交. 数量场 $f(x,y,z)$ 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 有一个等值面, 由 §11.4(4) 式,等值面在点 P_0 的法线方程是

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial f(P_0)}{\partial z}}.$$

于是,等值面法线的方向向量就是梯度

$$\operatorname{grad} f(P_0)=\left(\frac{\partial f(P_0)}{\partial x},\frac{\partial f(P_0)}{\partial y},\frac{\partial f(P_0)}{\partial z}\right),$$

即数量场 $f(x,y,z)$ 在点 P 的梯度方向就是过点 P 的等值面的法线方向,由数值较小的等值面指向数值较大的等值面. 例如,已知物体 V 上任意一点 P 的温度是 $f(P)$,即物体 V 是一个温度场. 若物体 V 中有的点温度高有的点温度低, 则 V 中就有热的流动. 那么在一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, 热沿着哪个方向流动最快呢? 通过对梯度的讨论我们知道,热沿着梯度方向, 也就是过点 P_0 等值面的法线方向流动最快. 因为热是由温度高处流向温度低处, 而梯度方向是由数值较小的等值面指向数值较大的等值面, 所以热沿着 $-\operatorname{grad} f(P_0)$ 流动最快.

例 1. 求电势场(数量场) $U=\frac{e}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 在点 (x,y,z) 的梯度,其中 e 是单位正电荷.

解 为了书写简便, 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 有

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{e}{r^2}\frac{x}{r}=-\frac{ex}{r^3}.$$

同样有
$$\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{ey}{r^3},\qquad \frac{\partial U}{\partial z}=-\frac{ez}{r^3}.$$

于是, $\operatorname{grad} U=\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}=-\frac{e}{r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}).$

已知单位正电荷 e 产生的电场强度是

$$\boldsymbol{E}=\frac{e}{r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}),$$

即
$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}U.$$

由此可见，电场的强度等于电势的梯度，即 $|\boldsymbol{E}|=|-\mathrm{grad}U|$，而电场强度的方向与电势梯度的方向相反.

由梯度的定义，不难证明，梯度有下列的性质：

1. $\mathrm{grad}(u+v)=\mathrm{grad}u+\mathrm{grad}v$.
2. $\mathrm{grad}(u\cdot v)=u\mathrm{grad}v+v\mathrm{grad}u$.
3. $\mathrm{grad}f(u)=f'(u)\mathrm{grad}u$.

二、散度

设有流体速度场 $\boldsymbol{A}(P)$，场内有一光滑曲面块 S. 由§14.2第二段知，在单位时间内，流体速度场 $\boldsymbol{A}(P)$ 通过曲面 S 的流量

$$Q=\iint_S \boldsymbol{A}(P)\cdot\boldsymbol{n}d\sigma,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 的外法线的单位向量. 如果 S 是闭曲面，

$$Q=\oiint_S \boldsymbol{A}(P)\cdot\boldsymbol{n}d\sigma$$

表示在单位时间内通过闭曲面 S 的流量. 通过闭曲面 S 的流量 Q 是流出量(+)与流入量(−) 两者之差(注意，S 的外法线方向为正). 可能有下面三种情况：

1. $Q>0$，即流出量大于流入量，这时 S 内有"源".
2. $Q<0$，即流出量小于流入量，这时 S 内有"洞".
3. $Q=0$，即流出量等于流入量，这时 S 内可能既无"源"也无洞，也可能既有"源"又有"洞"，而"源"与"洞"的流量互相抵销.

为了讨论流体速度场 $\boldsymbol{A}(P)$ 在闭曲面 S 内"某一点 P 的流量"，首先讨论通过闭曲面 S 的平均流量(平均散度)

$$\frac{Q}{V_S}=\frac{1}{V_S}\oiint_S A(P)\cdot n d\sigma$$

的极限. 其中 V_S 是闭曲面 S 围成体 V 的体积.

定义 设有向量场 $A(P)$, 在场内取包含点 P 的光滑闭曲面 S, 设 S 围成体 V 的体积是 V_S. 若当 $S\to P$(闭曲面 S 收缩为一点 P)时, 极限

$$\lim_{S\to P}\frac{1}{V_S}\oiint_S A(P)\cdot n d\sigma$$

存在 (而与 $S\to P$ 的方式无关), 称此极限是向量场 $A(P)$ 在点 $P(x,y,z)$的**散度**, 表为 $\operatorname{div}A(P)$, 即

$$\operatorname{div}A(P)=\lim_{S\to P}\frac{1}{V_S}\oiint_S A(P)\cdot n d\sigma. \tag{2}$$

由此可见, 向量场的散度是一个数量场.

当 $\operatorname{div}A(P)>0$ 时, 表明点 P 是"源", 其值表示源的强度; 当 $\operatorname{div}A(P)<0$ 时, 表明点 P 是"洞", 其绝对值表示洞的强度; 当 $\operatorname{div}A(P)=0$时, 表明点 P 既不是源也不是洞.

用散度定义计算散度很麻烦, 下面有(2)式的计算公式. 根据奥高公式和三重积分的中值定理 (设向量场 $A(P)$ 满足公式和定理的条件), 有

$$\begin{aligned}\operatorname{div}A(P)&=\lim_{S\to P}\frac{1}{V_S}\oiint_S A(P)\cdot n d\sigma\\&=\lim_{S\to P}\frac{1}{V_S}\oiint_S A_x(P)\,dy\,dz+A_y(P)\,dz\,dx+A_z(P)\,dx\,dy\\&=\lim_{S\to P}\frac{1}{V_S}\iiint_V\left(\frac{\partial A_x(P)}{\partial x}+\frac{\partial A_y(P)}{\partial y}+\frac{\partial A_z(P)}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz\\&=\lim_{S\to P}\frac{1}{V_S}\left(\frac{\partial A_x(Q)}{\partial x}+\frac{\partial A_y(Q)}{\partial y}+\frac{\partial A_z(Q)}{\partial z}\right)\cdot V_S\end{aligned}$$

$$=\lim_{S\to P}\left(\frac{\partial A_x(Q)}{\partial x}+\frac{\partial A_y(Q)}{\partial y}+\frac{\partial A_z(Q)}{\partial z}\right).$$

其中 V_S 是体 V 的体积. 点 $Q\in V$，当 $S\to P$ 时，$Q\to P$，有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}(P)=\frac{\partial A_x(P)}{\partial x}+\frac{\partial A_y(P)}{\partial y}+\frac{\partial A_z(P)}{\partial z}.$$

或简写为
$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}. \tag{3}$$

由(3)式可将奥高公式

$$\oint\!\!\!\oint_S[A_x\cos(n,x)+A_y\cos(n,y)+A_z\cos(n,z)]d\sigma$$

$$=\iiint_V\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

表为向量形式

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma=\iiint_V\operatorname{div}\boldsymbol{A}\,dx\,dy\,dz.$$

于是，奥高公式的物理意义是，向量场 $\boldsymbol{A}$ 通过闭曲面 S 的总流量等于闭曲面 S 所围成体 V 的每一点散度的总和（即体 V 的三重积分）.

例 2. 设在坐标原点有点电荷 q，在它周围形成电场，场内任意点 $P(x,y,z)$ 的电场强度(向量)是

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{r^2}\boldsymbol{r}_0,$$

其中 r 是点 P 到原点的距离，即 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\boldsymbol{r}_0$ 是线段 OP 上的单位向量，即 $\boldsymbol{r}_0=\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{1}{r}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$. 求

1) 场强 $\boldsymbol{E}$ 在点 P 的散度;

2) 通过以原点为心以 R 为半径球面的流量(电通量).

解 1) 已知 $\boldsymbol{E}=\frac{q}{r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$，即

$$E_x = q\frac{x}{r^3}, \qquad E_y = q\frac{y}{r^3}, \qquad E_z = q\frac{z}{r^3}.$$

有 $$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = q\frac{r^3 - x3r^2\frac{\partial r}{\partial x}}{r^6} = q\frac{r^2 - 3x^2}{r^5}.$$

同样, $$\frac{\partial E_y}{\partial y} = q\frac{r^2 - 3y^2}{r^5}, \qquad \frac{\partial E_z}{\partial z} = q\frac{r^2 - 3z^2}{r^5}.$$

于是, $$\operatorname{div}\boldsymbol{E}(P) = \frac{\partial E_x(P)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(P)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(P)}{\partial z}$$

$$= q\frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = q\frac{3r^2 - 3r^2}{r^5} = 0,$$

即除原点外,场中任意点的散度皆为 0,既不是源也不是洞.

2) 作以原点为心以 R 为半径的球面 S,通过 S 的电通量

$$P_e = \oiint_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma.$$

因为 $\boldsymbol{E}$ 的方向(从原点出发的射线方向)与 $\boldsymbol{n}$(球面外法线单位向量)的方向一致,即夹角为 0. 由向量的内积公式,有

$$P_e = \oiint_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \oiint_S |\boldsymbol{E}|\cos 0\,d\sigma = \oiint_S E\,d\sigma.$$

在球面 S 上,$r = R$, 有

$$E = |\boldsymbol{E}| = \left|\frac{q}{r^2}\boldsymbol{r}_0\right| = \frac{q}{r^2} = \frac{q}{R^2}.$$

于是, $$P_e = \oiint_S E\,d\sigma = \oiint_S \frac{q}{R^2}\,d\sigma = \frac{q}{R^2}\oiint_S d\sigma ①$$

$$= \frac{q}{R^2}4\pi R^2 = 4\pi q.$$

---

① 半径为 R 的球的表面积是 $4\pi R^2$.

由(3)式不难证明散度的下列性质:

1. $\mathrm{div}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{div}\boldsymbol{A}+\mathrm{div}\boldsymbol{B}$.

2. $\mathrm{div}(\varphi\boldsymbol{A})=\varphi\mathrm{div}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\mathrm{grad}\varphi$ (其中 φ 是数量场).

只给出性质 2 的证明. 由(3)式, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\varphi\boldsymbol{A})&=\frac{\partial}{\partial x}(\varphi A_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\varphi A_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\varphi A_z)\\&=\frac{\partial\varphi}{\partial x}A_x+\frac{\partial A_x}{\partial x}\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial y}A_y+\frac{\partial A_y}{\partial y}\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial z}A_z+\frac{\partial A_z}{\partial z}\varphi\\&=\varphi\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}A_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}A_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}A_z\right)\\&=\varphi\mathrm{div}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\mathrm{grad}\varphi.\quad\square\end{aligned}$$

三、旋度

在向量场中,比如河流中,常常出现涡旋现象,在涡旋附近水绕着涡旋中心轴旋转.我们设想有一自由转动的叶轮,将叶轮的轴放在涡旋的中心.不难想象,叶轮旋转的快慢,一方面与每一点的流速有关,即与向量场有关;另一方面与叶轮的安放位置或叶轮轴的方向有关.因而,描述向量场中一点的涡旋要用向量.为了讨论旋度,首先讨论环量.

设有向量场 $\boldsymbol{A}(P)=(A_x(P),A_y(P),A_z(P))$, A_x,A_y,A_z 的所有偏导数连续.场中有光滑闭曲线 C, $\forall P\in C$, 向量 $\boldsymbol{A}(P)$ 在曲线 C 上点 P 处切线 l 正向上的投影(如图 14.31)是 $\boldsymbol{A}(P)\cdot\boldsymbol{l}$, 其中 $\boldsymbol{l}$ 是 l 上的单位向量.

定义 沿闭曲线 C 的曲线积分

$$L=\oint_C\boldsymbol{A}(P)\cdot\boldsymbol{l}ds,$$

称为向量场 $\boldsymbol{A}(P)$ 沿闭曲线 C 的**环量**.

环量 L 表示质点在向量场 $\boldsymbol{A}(P)$ 的作用下沿着闭曲线 C 回转的方向(由 L 的正负号决定)与快慢程度.显然,当 $\boldsymbol{A}(P)$ 的方向愈

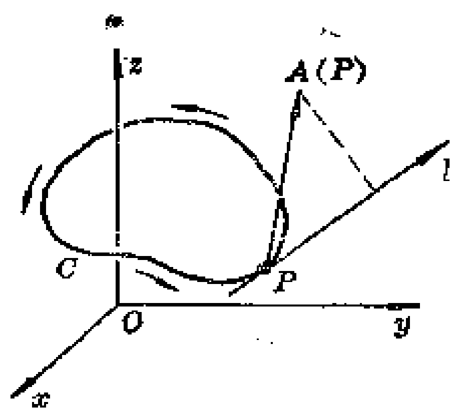


图 14.31

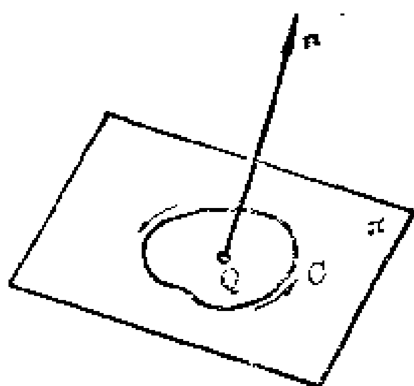


图 14.32

接近 l 的方向，回转的速度愈快；当改变曲线 C 的方向时，环量 L 要改变符号.

在向量场 $\boldsymbol{A}(P)$ 中任取一点 Q，过点 Q 任意作一平面 π，在平面 π 上任取围绕点 Q 的光滑闭曲线 C. 设 C 围成图形的面积为 D_C. 当给定 C 的正方向后(如图 14.32)，平面 π 的法线 $\boldsymbol{n}$ 的正方向也就确定了，反之亦然.

将环量 L 除以曲线 C 所围成图形的面积 D_C，即

$$\frac{L}{D_C}=\frac{1}{D_C}\oint_C \boldsymbol{A}(P)\cdot \boldsymbol{l}\,ds,$$

称为向量场 $\boldsymbol{A}(P)$ 在点 Q 沿平面曲线 C 绕法线 $\boldsymbol{n}$ 的**平均环量**（平均旋度）.

定义 设有一向量场 $\boldsymbol{A}(P)$，在场中作过点 Q 的平面 π，在平面 π 上作围绕点 Q 的闭曲线 C. 若当 $C\to Q$(闭曲线 C 收缩到一点 Q)时，绕法线 $\boldsymbol{n}$ 的平均环量的极限

$$\lim_{C\to Q}\frac{1}{D_C}\oint_C \boldsymbol{A}(P)\cdot \boldsymbol{l}\,ds$$

存在（而与 $C\to Q$ 的方式无关），称此极限是向量场 $\boldsymbol{A}(P)$ 在点 $Q(x,y,z)$ 绕法线 $\boldsymbol{n}$ 的**旋度**，表为 $\mathrm{rot}_n\boldsymbol{A}(Q)$，即

$$\mathrm{rot}_n\boldsymbol{A}(Q)=\lim_{C\to Q}\frac{1}{D_C}\oint_C \boldsymbol{A}(P)\cdot \boldsymbol{l}\,ds.$$

设在闭曲线C上点P的切线l的方向余弦是$\cos\alpha'$，$\cos\beta'$，$\cos\gamma'$．由斯托克斯公式，有

$$\oint_C \boldsymbol{A}(P)\cdot\boldsymbol{l}ds=\oint_C [A_x(P)\cos\alpha'+A_y(P)\cos\beta'+A_z(P)\cos\gamma']ds$$

$$=\oint_C A_x(P)dx+A_y(P)dy+A_z(P)dz$$

$$=\iint_D\left[\left(\frac{\partial A_z(P)}{\partial y}-\frac{\partial A_y(P)}{\partial z}\right)\cos\alpha\right.$$

$$+\left(\frac{\partial A_x(P)}{\partial z}-\frac{\partial A_z(P)}{\partial x}\right)\cos\beta$$

$$\left.+\left(\frac{\partial A_y(P)}{\partial x}-\frac{\partial A_x(P)}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]d\sigma,$$

其中D是闭曲线C围成的区域，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$是平面π的法线$\boldsymbol{n}$方向余弦(常数)．

由曲面积分的中值定理(见练习题14.2第2题)，有

$$\oint_C \boldsymbol{A}(P)\cdot\boldsymbol{l}ds=\left[\left(\frac{\partial A_z(G)}{\partial y}-\frac{\partial A_y(G)}{\partial z}\right)\cos\alpha\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial A_x(G)}{\partial z}-\frac{\partial A_z(G)}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial A_y(G)}{\partial x}-\frac{\partial A_x(G)}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\cdot D_C,$$

其中D_C是区域D的面积，$G\in D$．于是，

$$\mathrm{rot}_n\boldsymbol{A}(Q)=\lim_{C\to Q}\frac{1}{D_C}\oint_C \boldsymbol{A}(P)\cdot\boldsymbol{l}ds$$

$$=\lim_{C\to Q}\left[\left(\frac{\partial A_z(G)}{\partial y}-\frac{\partial A_y(G)}{\partial z}\right)\cos\alpha\right.$$

$$+\left(\frac{\partial A_x(G)}{\partial z}-\frac{\partial A_z(G)}{\partial x}\right)\cos\beta$$

$$\left.+\left(\frac{\partial A_y(G)}{\partial x}-\frac{\partial A_x(G)}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]$$

$$=\left(\frac{\partial A_z(Q)}{\partial y}-\frac{\partial A_y(Q)}{\partial z}\right)\cos\alpha$$

$$+\left(\frac{\partial A_x(Q)}{\partial z}-\frac{\partial A_z(Q)}{\partial x}\right)\cos\beta$$

$$+\left(\frac{\partial A_y(Q)}{\partial x}-\frac{\partial A_x(Q)}{\partial y}\right)\cos\gamma.$$

设 $$G(Q)=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)_Q i+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A}{\partial x}\right)_Q j+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)_Q k,$$

$$n=\cos\alpha i+\cos\beta j+\cos\gamma k,$$

有

$$\mathrm{rot}_n A(Q)=G(Q)\cdot n=|G(Q)||n|\cos\varphi$$
$$=|G(Q)|\cos\varphi,$$

其中角 φ 是向量 $G(Q)$ 与 n 之间的夹角.

显然，当 $\varphi=0$ 时，$\cos\varphi$ 取最大值，即当法线 n 的方向与向量 $G(Q)$ 的方向相同时，$\mathrm{rot}_n A$ 取最大值.

定义 向量场 A 中任意一点 P，向量 $G(P)$ 称为向量场 A 在点 P 的旋度，表为 $\mathrm{rot}\, A(P)$，即

$$\mathrm{rot}\, A(P)=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)i+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)k$$

$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \tag{4}$$

由此可见，向量场的旋度是一个向量场.

当 $\mathrm{rot}\, A(P)=0$ 时，表明点 P 不是涡旋；当 $\mathrm{rot}\, A(P)\neq 0$，表明点 P 存在涡旋，$|\mathrm{rot}\, A(P)|$ 愈大，旋转愈快.

有了(4)式，可将斯托克斯公式

$$\oint_C A_x dx+A_y dy+A_z dz$$

$$=\iint_S\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos\beta\right.$$

$$+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos\gamma\ \Big]d\sigma$$

表为向量形式

$$\oint_C \boldsymbol{A}(P)\cdot \boldsymbol{l}ds=\iint_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(P)\cdot \boldsymbol{n}d\sigma=\iint_S \mathrm{rot}_n\boldsymbol{A}(P)d\sigma.$$

于是，斯托克斯公式的物理意义是，向量场 $\boldsymbol{A}$ 沿闭曲线 C 的环量等于展布在以闭曲线 C 为边界的曲面 S 上每一点绕法线 $\boldsymbol{n}$ 的旋度之和(即在 S 上的曲面积分).

例3. 设液体以等角速度 $\omega=\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k}$ 绕 L 轴旋转(如图 14.33)，旋转时液体不扩散. 求液体质点的切线速度 $\boldsymbol{v}$ 的旋度.

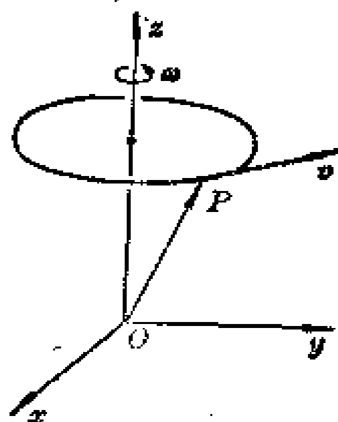


图 14.33

解 取 L 轴为 z 轴，点 P 的向径 $\overrightarrow{OP}$ 表为

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

已知切线速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OP}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x & y & z\end{vmatrix}$

$$=(\omega_y z-\omega_z y)\boldsymbol{i}+(\omega_z x-\omega_x z)\boldsymbol{j}+(\omega_x y-\omega_y x)\boldsymbol{k}.$$

由公式(4)，有

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \omega_y z-\omega_z y & \omega_z x-\omega_x z & \omega_x y-\omega_y x \end{vmatrix}$$

$$=2(\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k})=2\boldsymbol{\omega},$$

即速度场 $\boldsymbol{v}$ 的旋度等于角速度的 2 倍. 当角速度大时旋度也大, 表明液体旋转快. 当角速度为 0 时, 旋度也等于 0, 表明液体不旋转.

不难证明旋度具有下列性质:

1. $\operatorname{rot}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}+\operatorname{rot}\boldsymbol{B}$.
2. $\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{A})=\varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{A}+\operatorname{grad}\varphi\times\boldsymbol{A}$ (φ 是数量场).
3. $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{A})=0$.
4. $\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{B}$.

只给出性质 4 的证明, 由(3)式, 有

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\operatorname{div}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(A_yB_z-A_zB_y)+\frac{\partial}{\partial y}(A_zB_x-A_xB_z)+\frac{\partial}{\partial z}(A_xB_y-A_yB_x)$$

$$=\frac{\partial A_y}{\partial x}B_z+\frac{\partial B_z}{\partial x}A_y-\frac{\partial A_z}{\partial x}B_y-\frac{\partial B_y}{\partial x}A_z$$

$$+\frac{\partial A_z}{\partial y}B_x+\frac{\partial B_x}{\partial y}A_z-\frac{\partial A_x}{\partial y}B_z-\frac{\partial B_z}{\partial y}A_x$$

$$+\frac{\partial A_x}{\partial z}B_y+\frac{\partial B_y}{\partial z}A_x-\frac{\partial A_y}{\partial z}B_x-\frac{\partial B_x}{\partial z}A_y$$

$$=B_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+B_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+B_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$+A_x\left(\frac{\partial B_y}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)+A_y\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)+A_z\left(\frac{\partial B_x}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial x}\right)$$

$$= \boldsymbol{B}\cdot\text{rot}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\cdot\text{rot}\boldsymbol{B}.$$

定义 设有向量场

$$\boldsymbol{A}(P) = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}.$$

1) 若沿曲线 C 由 A 到 B，向量场 $\boldsymbol{A}(P)$ 所作的功

$$\int_{C(A,B)} A_x dx + A_y dy + A_z dz$$

只与始点 A 和终点 B 的位置有关，而与所取的路线 C 无关时，称向量场 $\boldsymbol{A}(P)$ 为**位场**.

2) 若对任意点 P，有

$$\text{rot}\boldsymbol{A}(P) = 0$$

称向量场 $\boldsymbol{A}(P)$ 为**无旋场**

3) 若存在函数 $u = u(x,y,z)$，使得 $\text{grad}u = \boldsymbol{A}$，即

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A_x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = A_y, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = A_z,$$

称向量场 $\boldsymbol{A}(P)$ 为**势量场**，$u(x,y,z)$ 称为向量场 $\boldsymbol{A}$ 的**势函数**.

将 § 14.2 定理 5 用向量语言叙述，下列四个断语是等价的：

1) 向量场 $\boldsymbol{A}(P)$ 是位场.

2) 向量场 $\boldsymbol{A}(P)$ 是势量场.

3) 向量场 $\boldsymbol{A}(P)$ 是无旋场.

4) 向量场 $\boldsymbol{A}(P)$ 沿任何闭曲线的环量皆为零.

定义 若在向量场 $\boldsymbol{A}(P)$ 中任意点 P，有

$$\text{div}\boldsymbol{A}(P) = 0,$$

称向量场 $\boldsymbol{A}(P)$ 是**管量场**.

定理 下列三个断语是等价的：

1) 向量场 $\boldsymbol{A}(P)$ 是管量场，即 $\text{div}\boldsymbol{A}(P) = 0$.

2) 若 S 是向量场 $\boldsymbol{A}(P)$ 内任意光滑闭曲面，则(流量)

$$\oiint_S \boldsymbol{A}(P)\cdot\boldsymbol{n}d\sigma = 0,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是闭曲面 S 外法线的单位向量.

3）存在某个向量场 $\boldsymbol{B}$，使 $\mathrm{rot}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$.

证明从略.

四、微分算子

在直角坐标系中，引入向量微分算子

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

符号"∇"读作"纳布拉". 有了 ∇ 可将梯度、散度、旋度表为非常简便的形式.

函数 $f(x,y,z)$ 的梯度

$$\mathrm{grad}f=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)f=\nabla f.$$

向量 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$ 的散度

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{A}&=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\\&=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})=\nabla\cdot\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

向量 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$ 的旋度

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\boldsymbol{A}&=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\\&=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\times(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})=\nabla\times\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

于是，$\mathrm{grad}f=\nabla f$，$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}$，$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}$.

下面讨论二阶微分算子：

1. 已知 $\mathrm{grad}f=\nabla f$ 是向量场. 将 ∇ 作用在 ∇f 有两种：

1）$\nabla\cdot\nabla f=\mathrm{div}(\mathrm{grad}f)$. 有

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathrm{grad}f)&=\mathrm{div}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f.\end{aligned}$$

符号　$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 称为**拉普拉斯**[①] **算子**（见练习题14.2第15题）. 显然，$\Delta=\nabla\cdot\nabla$. 于是

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}f)=\nabla\cdot(\nabla f)=(\nabla\cdot\nabla)f=\Delta f.$$

2) $\nabla\times\nabla f=\mathrm{rot}(\mathrm{grad}f)=0$. 事实上，

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}f)=\nabla\times\nabla f=(\nabla\times\nabla)f=0.$$

2. $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 是数量场. 将 ∇ 作用在 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 仅有一种：

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})=\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{A}).$$

3. $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 是向量场. 将 ∇ 作用在 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 有两种：

1) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})=0$. 事实上，

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=(\nabla\times\nabla)\cdot\boldsymbol{A}=0.$$

2) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})$.

二阶微分算子仅有上述五种情况.

练习题 14.3

1. 求下列数量场在点 (x,y,z) 的梯度：

(1) $f(x,y,z)=x^2y^3z^4$，　　(2) $f(x,y,z)=x^2-y^2+2z^2$，

(3) $f(x,y,z)=\ln(x^2+2y^2-3z^2)$.

2. 证明：(1) $\mathrm{grad}(uv)=u\,\mathrm{grad}v+v\,\mathrm{grad}u$.

(2) $\mathrm{grad}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{v^2}(v\,\mathrm{grad}u-u\,\mathrm{grad}v)$.

3. 设 $u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，求 $|\mathrm{grad}u|=c$　$(0<c<1)$.

4. 设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，求 $\mathrm{div}\boldsymbol{r}$ 及 $\mathrm{div}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$.

5. 求下列向量场在指定点的散度：

(1) $\boldsymbol{A}=x^3\boldsymbol{i}-y^3\boldsymbol{j}+z^3\boldsymbol{k}$，在 $(1,0,-1)$.

(2) $\boldsymbol{B}=xyz(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$，在 $(2,1,-2)$.

6. 证明：(1) $\mathrm{div}(u\boldsymbol{A})=u\,\mathrm{div}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{grad}u$.

---

① 拉普拉斯(Laplace 1749—1827)法国数学家.

(2) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}u)=u\Delta u+(\operatorname{grad}u)^2$.

7. 已知向量 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，求(1)通过圆柱$x^2+y^2=a^2\,(0\leqslant z\leqslant h)$表面的流量；(2)通过锥 $x^2+y^2=z^2\,(0\leqslant z\leqslant h)$ 表面的流量.

8. 证明：若S是光滑闭曲面，$\boldsymbol{n}$ 是S的外法线单位向量，V是S所围成的体，A是S的面积，则

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}\boldsymbol{n}\,dxdydz=A.$$

(提示：应用奥高公式)

9. 求下列向量场的旋度：

(1) $\boldsymbol{A}=xyz(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$.

(2) $\boldsymbol{B}=(y^2+z^2)\boldsymbol{i}+(z^2+x^2)\boldsymbol{j}+(x^2+y^2)\boldsymbol{k}$.

10. 证明：若 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{a}$ 是常向量，则 $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=2\boldsymbol{a}$.

11. 求向量场$\boldsymbol{A}=yz(2x+y+z)\boldsymbol{i}+zx(x+2y+z)\boldsymbol{j}+xy(x+y+2z)\boldsymbol{k}$的势函数.

12. 证明：若S是光滑闭曲面，向量场 $\boldsymbol{F}$ 的分量有连续的偏导数，则

$$\oiint\limits_S \operatorname{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma=0.$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是曲面S的外法线向量.（提示：用S上一条光滑闭曲线将闭曲面S分成两部分，分别应用斯托克斯公式.）

练习题答案

练 习 题 9.1(一)

1. (1) 1. (2) $\frac{1}{2}$. (3) $\frac{1}{4}$. (4) 3.

练 习 题 9.1(二)

1. (1) 收敛. (2) 发散. (3) 发散. (4) 发散. (5) 收敛.
(6) 收敛. (7) 收敛. (8) 收敛. (9) 收敛. (10) 发散 (11) 发散.
(12) 收敛. (13) 收敛. (14) 发散. (15) 收敛.

2. (1) 不一定收敛. 例如, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

(2) 收敛. 易证(见定理 4).

(3) 不一定收敛. 例如, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

(4) 收敛. $\sqrt{a_n a_{n+1}}\leqslant\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$.

7. (1) 条件收敛. (2) 绝对收敛. (3) 条件收敛. (4) 条件收敛.

8. (1) $s>1$绝对收敛; $0<s\leqslant1$ 条件收敛. (2) $s>2$ 绝对收敛; $0<s\leqslant2$ 条件收敛.

练 习 题 9.2(一)

1. (1) ①非一致收敛; ②一致收敛. (2)一致收敛. (3) 非一致收敛.

2. (1) 一致收敛. (2) 一致收敛. (3) 一致收敛 (4) 一致收敛. (5) 非一致收敛.

13. (1) 一致收敛. (2) 一致收敛. (3) 一致收敛. (4) 非一致收敛. (5) ①一致收敛; ②非一致收敛; ③一致收敛.

练 习 题 9.2(二)

3. $\frac{3}{4}$.

4. 0.

7. $h'(x) = -2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(1+nx^2)^2}$.

8. $f''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$.

练 习 题 9.3

1. (1) $r=2$; $[-2,2)$. (2) $r=1$; $(-1,1)$.
   (3) $r=1$; $(-1,1)$. (4) $r=2$; $[0,4)$.
   (5) $r=1$; $(0,2)$. (6) $r=1$; $(-1,1)$.

2. (1) $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$. (2) $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.
   (3) $[-r,r]$, $r=\min\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b}\right)$.

3. (1) $-\ln(1-x)$, $[-1,1)$. (2) $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $(-1,1)$.
   (3) $\frac{x}{(1-x)^2}$, $(-1,1)$. (4) $\begin{cases}1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1),\\ 0, & x=0.\end{cases}$

4. (1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n$. (2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}$.
   (3) $1-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3^2\cdot 2!}x^2-\frac{2\cdot 5}{3^3\cdot 3!}x^3-\frac{2\cdot 5\cdot 8}{3^4\cdot 4!}x^4-\cdots$.
   (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$. (5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
   (6) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$.

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}$.　　　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n)!(2n-1)}$.

5. (1) $1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!}x^{n}$.

(2) $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^{n}$.

练 习 题 9.4

1. (1) $\frac{a+b}{2}-\frac{2(a-b)}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.

(2) $\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^{2}}$.

(3) $\frac{2}{3}\pi^{2}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{2}}\cos nx$.

(4) $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(2n)^{2}-1}$.

2. (1) 奇式展开　$2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n}$;

偶式展开　$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^{2}}$.

(2) 奇式展开　$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$;　偶式展开　$\frac{\pi}{4}$.

3. (1) $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^{2}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^{2}}$.

(2) $\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)\frac{\pi x}{l}$.

(3) $\frac{l^2}{3}+\frac{4l^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{l}$.

练 习 题 10.1

1. (1) 无界,开区域. (2) 无界,闭区域. (3) 无界,闭区域.

(4) 无界,开区域. (5) 有界,闭区域. (6) 无界,闭区域.

2. (1) 闭区域. (2) 开区域. (3) 闭区域.

(4) 开区域. (5) 闭区域. (以上都是有界区域).

5. (1) $\{(x,y)\,|\,0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\}$. (2) $\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

(3) $\{(0,0)\}$. (4) $\varnothing$.

9. (1) $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<2\}$. (2) $\{(x,y)\,|\,xy<4\}$.

(3) $\{(x,y)\,|\,x\in\mathbf{R}$ 与 $|y|\leqslant 1\}$. (4) $\{(x,y)\,|\,y>\sqrt{x}$ 与 $x\geqslant 0\}$.

(5) $\{(x,y)\,|\,|x|\geqslant 2$ 与 $|y|\leqslant 2\}$.

(6) $\{(x,y)\,|\,2k\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2k+1)\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$.

(7) $\{(x,y)\,|\,0<x<p,0<y<p,x+y>p\}$

10. (1) $f\left(\frac{1}{2},3\right)=\frac{5}{3}$; $\quad f(1,-1)=-2$.

(2) $f(y,x)=\frac{y^2-x^2}{2xy}$; $f(-x,-y)=\frac{x^2-y^2}{2xy}$; $f\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)=\frac{y^2-x^2}{2xy}$;

$\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=\frac{x^2+y^2+hx}{2x(x+h)y}$.

11. $f(x,y)=x^2\frac{1-y}{1+y}$.

练 习 题 10.2

6. (1) 1. (2) 4. (3) 0. (4) 1.

10. (1) (0,0). (2) $x+y=0$.

(3) $x^2+y^2=\frac{k\pi}{2}\quad(k=\pm1,\pm3,\pm5,\cdots)$.

(4) $\{(k\pi, y) \mid k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots, y\in\mathbf{R}\} \cup \{(x, k\pi) \mid x\in\mathbf{R}; k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$.

13. $g(x,x)=f'(x)$.

练习题 10.3

1. $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$, $f'_x=\dfrac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}$, $f'_y=\dfrac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}$.

2. (1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+y^3\cos(xy)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y\sin(xy)+xy^2\cos(xy)$.

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(3) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{2x\sin x^2}{y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\cos x^2}{y^2}$.

(4) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}$.

(5) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{1+x^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{1+y^2}$

(6) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{xy^2\sqrt{2(x^2-y^2)}}{|y|(x^4-y^4)}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{x^2y\sqrt{2(x^2-y^2)}}{|y|(x^4-y^4)}$.

(7) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}e^{\sin\frac{y}{x}}\cos\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{x}e^{\sin\frac{y}{x}}\cos\dfrac{y}{x}$.

(8) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{z}{x}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{z}{y}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z\ln\dfrac{x}{y}$.

3. $f'_x(1,2,0)=1, f'_y(1,2,0)=\dfrac{1}{2}$, $f'_z(1,2,0)=\dfrac{1}{2}$.

4. (1) r. (2) $r^2\sin\varphi$.

5. (1) $\dfrac{\partial u}{\partial s}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+t\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+s\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial r}=2r\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$, $\dfrac{\partial u}{\partial s}=2s\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial y}-\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$,

$\dfrac{\partial u}{\partial t}=2t\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$.

(3) $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+2r\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial s}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+2s\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+2t\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

10. (1) $du=\dfrac{1}{1+y}dx+\dfrac{1-x}{(1+y)^2}dy$.

(2) $du=\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$.

(3) $du=\frac{(x^2+y^2)dz-2z(xdx+ydy)}{(x^2+y^2)^2}$.

11. $dx-dy$.

12. (1) $2x+2y-z=1$; $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$.

(2) $z=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(x-y)$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}$.

13. $\frac{\partial z}{\partial l}=\cos\alpha+\sin\alpha$.

(1) $\alpha=\frac{\pi}{4}$,　　(2) $\alpha=\frac{5\pi}{4}$,

(3) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ 与 $\alpha=\frac{7\pi}{4}$.

14. (1) $\frac{\partial u}{\partial l}=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$.　　(2) 3.

练习题 10.4

1. (1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-16xy$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$.

(2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

(3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\cos(x+y)-x\sin(x+y)$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\cos(x+y)-x\sin(x+y)$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-x\sin(x+y)$.

(4) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$, …

2. (1) 0.　　(2) $-6(\cos x+\cos y)$.

(3) $e^{xyz}(1+3xyz+x^2y^2z^2)$.　　(4) $\sin\frac{n\pi}{2}$.

4. $f''_{xx}(0,0)=f''_{yy}(0,0)=0$.

5. (1) $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2t\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+t^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

$\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+(s+t)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+st\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial y}$.

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2s\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+s^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

(2) $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=t^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{1}{t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

$\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}=st\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{s}{t^3}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{t^2}\frac{\partial f}{\partial y}$.

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=s^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{s^2}{t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{s^2}{t^4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{2s}{t^3}\frac{\partial f}{\partial y}$.

9. (1) $f(x,y)=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2$.

(2) $f(x,y,z)=3[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-(x-1)(y-1)$
$-(x-1)(z-1)-(y-1)(z-1)]+(x-1)^3$
$+(y-1)^3+(z-1)^3-3(x-1)(y-1)(z-1)$.

11. $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^m(y+1)^n}{m!n!}$.

12. (1) $(0,1)$是极小点，极小值是 0.

(2) (a,b)是极大点，极大值是 a^2b^2.

(3) $(2,1)$是极小点，极小值是-28; $(-2,-1)$是极大点，极大值是 28.

(4) $(0,0)$是极小点，极小值是 0; $(0,\pm1)$是极大点，极大值是 $\frac{b}{e}$.

13. $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{3}$.

14. $\frac{2}{\sqrt{3}}a$, $\frac{2}{\sqrt{3}}a$, $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

15. 底$=\frac{2\sqrt{A}}{\sqrt[4]{27}}$，高$=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt[4]{3}}$.

练 习 题 11.1

1. (1) $\frac{e^y}{1-xe^y}$.　　(2) $-\frac{y(xy+2)}{x(xy+3)}$.　　(3) $\frac{\cos x}{2\sin y}$.

2. (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x^2-yz}{xy-z^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y^2-xz}{xy-z^2}$.

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1+yz\sin(xyz)}{1-xy\sin(xyz)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1+xz\sin(xyz)}{1-xy\sin(xyz)}$.

3. (1) $\dfrac{x+y}{x-y}$.

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yz}{z^2-xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xz}{z^2-xy}$.

5. (1) $\dfrac{dx}{dz}=\dfrac{y-z}{x-y}$, $\dfrac{dy}{dz}=\dfrac{z-x}{x-y}$.

(2) $du=\dfrac{(\sin v+x\cos v)\,dx-(\sin u-x\cos v)\,dy}{x\cos v+y\cos u}$,

$dv=\dfrac{-(\sin v-y\cos u)\,dx+(\sin u+y\cos u)\,dy}{x\cos v+y\cos u}$.

8. $\left.\dfrac{\partial x}{\partial u}\right|_P=0$, $\left.\dfrac{\partial x}{\partial v}\right|_P=\dfrac{\pi}{12}$.

9. (1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos\dfrac{v}{u}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\sin\dfrac{v}{u}$,

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\left(\sin\dfrac{v}{u}-\dfrac{v}{u}\cos\dfrac{v}{u}\right)$,

$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\cos\dfrac{v}{u}+\dfrac{v}{u}\sin\dfrac{v}{u}$.

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}$,

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{-(e^u-\cos v)}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{e^u+\sin v}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}$.

13. $\dfrac{\sin(x+y)\cos^2(y+z)+\sin(y+z)\cos^2(x+y)}{\cos^3(y+z)}$.

14. $\dfrac{\partial F}{\partial x}=f'[x+g(y)]$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}=f'[x+g(y)]g'(y)$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=f''[x+g(y)]$,

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=f''[x+g(y)]g'(y)$,

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}=f''[x+g(y)][g'(y)]^2+f'[x+g(y)]g''(y)$.

练习题 11.3

1. (1) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$是极大点，极大值是$\frac{1}{4}$. (2) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$是极小点，极小值是$-3$，$\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$是极大点，极大值是3.

2. $(0,0,1)$与$(0,0,-1)$.

3. $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(-1,0,0)$, $(0,-1,0)$.

4. $\frac{\sqrt{3}}{2}abc$.

5. $\frac{7}{4\sqrt{2}}$.

6. 最小值与最大值分别是对称矩阵

$$\begin{pmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{pmatrix}$$

的最小特征值与最大特征值.

练习题 11.4

1. (1) 切线 $\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{3}$; 法平面 $2x-2y+3z=\pi-3$.

   (2) 切线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$; 法平面 $x+y+2z=4$.

2. $M_1(-1,1,-1)$, $M_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right)$.

3. 切线 $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-1}$; 法平面 $3x+3y-z=3$.

4. (1) 切平面 $z=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(x-y)$; 法线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}$.

   (2) 切平面 $3x+4y+12z=169$; 法线 $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{12}$.

5. 切平面 $x+4y+6z=\pm 21$.

7. 切平面 $ax\sin v_0-ay\cos v_0+u_0z=au_0v_0$；

法线 $\dfrac{x-u_0\cos v_0}{a\sin v_0}=\dfrac{y-u_0\sin v_0}{-a\cos v_0}=\dfrac{z-av_0}{u_0}$.

练习题 12.1

1. (1) $\dfrac{1}{a}$. (2) $\dfrac{2}{3}\ln 2$. (3) $\dfrac{\pi}{4}$. (4) $\dfrac{2}{e}$. (5) $\dfrac{2}{a}$.

   (6) $\dfrac{b}{a^2+b^2}$.

2. (1) 收敛. (2) 发散. (3) 发散. (4) $n-m>1$ 收敛，$n-m\leqslant 1$ 发散. (5) 收敛. (6) 发散. (7) 收敛.
   (8) 收敛.

练习题 12.2

1. (1) π. (2) $\dfrac{\pi}{2}$. (3) $\dfrac{2}{3}$. (4) π.

2. (1) 发散. (2) 收敛. (3) 收敛. (4) 收敛.
   (5) 发散. (6) 发散. (7) $p<1$ 与 $q<1$ 收敛.

7. (1) $\ln 2$. (2) $\ln\dfrac{1}{2}$. (3) 0. (4) 0.

练习题 12.3

1. $F(y)=\begin{cases}1, & -\infty<y<0,\\ 1-2y, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ -1, & 1<y<+\infty.\end{cases}$

2. (1) 1. (2) $\dfrac{8}{3}$. (3) $\ln\dfrac{2e}{1+e}$.

3. (1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-2\sin x}{(1+y\sin x)^3}dx$.

   (2) $\displaystyle -2\int_{y}^{y^2}xye^{-xy^2}dx$.

   (3) $\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{b+y}\right)\sin y(b+y)-\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{a+y}\right)\sin y(a+y)$.

4. $F''(y)=3f(y)+2yf'(y)$.

5. $F''(x)=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)$.

9. $\pi\ln\dfrac{1+a}{2}$.

14. $\dfrac{1}{2}\ln a$

15. $\operatorname{arctg} b-\operatorname{arctg} a$.

17. (1) $\dfrac{\pi}{8}$. (2) $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$. (3) $\dfrac{3\pi}{512}$. (4) $\dfrac{2(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

练 习 题 13.1(一)

1. $\dfrac{1}{4}$.

练 习 题 13.1(二)

1. (1) 1. (2) 2. (3) $e^3(3e^2-2e-1)$.

2. (1) $\int_{-2}^{2}dx\int_{\frac{|x|}{2}}^{1}f(x,y)\,dy=\int_{0}^{1}dy\int_{-2y}^{2y}f(x,y)\,dx$.

(2) $\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,dy=\int_{-1}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,dx$.

(3) $\int_{-1}^{1}dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,dy=\int_{0}^{2}dy\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)\,dx$.

3. (1) $\int_{0}^{2}dy\int_{\frac{y}{2}}^{y}f(x,y)\,dx+\int_{2}^{4}dy\int_{\frac{y}{2}}^{2}f(x,y)\,dx$.

(2) $\int_{0}^{1}dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,dx$.

(3) $\int_{-1}^{0}dy\int_{-\sqrt{4y+4}}^{\sqrt{4y+4}}f(x,y)\,dx+\int_{0}^{8}dy\int_{-\sqrt{4y+4}}^{2-y}f(x,y)\,dx$.

4. (1) $\dfrac{1}{2e}(e-1)$. (2) 2.

5. (1) $\dfrac{7}{3}\ln 2$. (2) $\dfrac{2\pi}{3}(b^3-a^3)$.

6. (1) $\dfrac{\pi}{|a_1b_2-a_2b_1|}$. (2) $\dfrac{4}{3}(q-p)(s-r)$.

9. (1) $16a^2$. (2) $4ab\pi^2$.

10. (1) $\dfrac{8}{3}$. (2) 2π. (3) 0.

13. $\int_0^{2\pi} tf(t\cos\varphi, t\sin\varphi)\,d\varphi$.

练习题 13.2

1. (1) $\dfrac{1}{364}$. (2) $\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{5}{16}$. (3) $\dfrac{1}{48}$. (4) $\dfrac{\pi}{6}$.

2. (1) $\int_0^1 dx\left\{\int_0^x dz\int_0^{1-x} f(x,y,z)\,dy+\int_x^1 dz\int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)\,dy\right\}$

$$=\int_0^1 dz\left\{\int_0^z dy\int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\,dx+\int_z^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y,z)\,dx\right\}$$

(2) $\int_{-1}^1 dx\int_{|x|}^1 dz\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)\,dy$

$$=\int_0^1 dz\int_{-z}^{z} dy\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx.$$

3. (1) $\dfrac{16}{3}\pi$. (2) $\dfrac{8}{9}a^2$.

(3) $\dfrac{1}{4}abc\pi^2$. (4) $\dfrac{4}{15}(b^5-a^5)\pi$.

4. (1) $\dfrac{1}{12}$. (2) $\dfrac{3}{35}$.

(3) $\dfrac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})(b^3-a^3)$. (4) $\dfrac{4\pi h^3}{3|\Delta|}$.

5. (1) $\left(0,0,\dfrac{3}{4}c\right)$. (2) $\left(0,0,\dfrac{7}{20}\right)$.

6. (1) $\dfrac{14}{45}$. (2) $\dfrac{4\pi}{15}(4\sqrt{2}-5)$.

8. $4\pi t^2 f(t^2)$.

9. $4\pi f(0,0,0)$.

10. (1) $\dfrac{\pi^2a^3}{4\sqrt{2}}$. (2) $\dfrac{a^2bc\pi}{3h}$.

11. $\frac{4\pi}{3a}$.

练 习 题 14.1

1. (1) $1+\sqrt{2}$.　　(2) 0.

(3) $\frac{a^2}{3}[(1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}}-1]$.

(4) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\operatorname{arctg}\frac{2\pi b}{a}$.

4. $\frac{9}{16}$.

6. (1) -21.　　(2) $\frac{4}{3}$.

(3) $-2\pi a(a+b)$.　　(4) ① 1; ② 1.

7. (1) $3\pi a^2$.　　(2) $4(1-\ln 3)$.　(3) $\frac{1}{8}\pi m a^2$.

8. (1) πab.　　(2) $\frac{3}{8}\pi ab$.

9. (1) $x^2+3xy-2y^2+C$.　　(2) $x^3-x^2y+xy^2-y^3+C$.

16. (1) 点 $A\overline{\in}G, I(\xi,\eta)=0$.　　(2) 点 $A\in G, I(\xi,\eta)=2\pi$.

练 习 题 14.2

1. (1) πa^3.　　(2) $\frac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha$.

3. (1) $\frac{4}{3}\pi abc$.　　(2) 0.

4. $-\frac{\pi}{2}h^3$.

5. (1) $3a^4$.　　(2) $\frac{2}{5}\pi a^5$.

7. (1) $-\pi a^2\sqrt{3}$.　　(2) $\frac{\pi}{8}a^6$.

10. $\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C$.

12. 1.

14. (1) 0.

练 习 题 14.3

1. (1) $2xy^2z^4\boldsymbol{i}+3x^2y^2z^4\boldsymbol{j}+4x^2y^3z^3\boldsymbol{k}$.

   (2) $2x\boldsymbol{i}-2y\boldsymbol{j}+4z\boldsymbol{k}$.

   (3) $\dfrac{2}{x^2+2y^2-3z^2}(x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}-3z\boldsymbol{k})$.

3. 圆环面 $x^2+y^2=c^2(x^2+y^2+z^2)^2$，$x^2+y^2+z^2\neq 0$.

4. $\operatorname{div}\boldsymbol{r}=3$，$\operatorname{div}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}=\dfrac{2}{r}$.

5. (1) 6.　　(2) -24.

7. (1) $3\pi a^2h$.　　(2) πh^3.

9. (1) $x(z-y)\boldsymbol{i}+y(x-z)\boldsymbol{j}+z(y-x)\boldsymbol{k}$.

   (2) $2[(y-z)\boldsymbol{i}+(z-x)\boldsymbol{j}+(x-y)\boldsymbol{k}]$.

11. $xyz(x+y+z)+C$.

数学分析讲义练习题选解

刘玉琏　刘伟　刘宁　林玎　编

高等教育出版社

（京）112号

内 容 提 要

本书精选了刘玉琏、傅沛仁编写的《数学分析讲义》一半以上的习题作解答．目的是通过分析解答所选题目教给学生分析问题和解决问题的方法，解答清晰、易懂，并对一些较难的习题给出了题前分析、详尽的解答步骤和题后注解．为了切实地帮助初学者，还对某些典型的分析方法和技巧作了较详细的说明．文字精练、准确．本书对正在学习数学分析的读者，特别是初学者以及对复习高等数学准备考研的读者都很有参考价值．

图书在版编目（CIP）数据

数学分析讲义练习题选解/刘玉琏编．—北京：高等教育出版社，1996（1998重印）
ISBN 7-04-005551-1

Ⅰ．数…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．数学分析-解题-高等学校-教材
Ⅳ．O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字（95）第20511号

*

高等教育出版社出版
北京沙滩后街55号
邮政编码：100009　传真：64014048　电话：64054588
新华书店总店北京发行所发行
北京联华印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 15.75　字数 400 000
1996年5月第1版　1998年3月第3次印刷
印数 17 574—25 583
定价 15.00元

前　　言

应广大读者要求，我们编写了这本《数学分析讲义练习题选解》（以下简称《选解》）。据悉使用刘玉琏、傅沛仁编《数学分析讲义》（第三版）作为教材的学校有高师本科院校、高师专科学校、高师函授院校和教育学院等．为了帮助广大专科学生学习，这本《选解》适当多选入一些练习题予以解答：证明题多数给出解答，计算题只给出奇数号码或偶数号码题的解答，甚至只选个别繁难题作答．每题的解答力求思路清晰、叙述完整、行文规范、详明易懂．

读者一定要正确地使用这本《选解》，那就是做题时要"先做后看"，力求"做完再看"．一般说来，学生做题总会遇到这样或那样的问题和困难，这时需要开动脑筋、回忆联想、多方探索、寻求解法，力争独立完成．这是提高解题能力不可缺少的思维训练过程．只有经过认真思考，仍百思不得其解时，才参看《选解》．否则，"先看后做"或"边看边做"都不会取得好的学习效果．请读者切记．

本书由刘伟编写第一、二、四、五、六章，林玎编写第三、七、八、九章，刘宁编写第十、十一、十二、十三、十四章．最后由刘玉琏审核、修改、定稿．

本书在编写过程中，始终得到高等教育出版社文小西副编审的亲切关怀和具体指导．本书稿承蒙中国人民警官大学强文久同志和本书的责任编辑徐可同志精心审改，纠正了一些错漏和个别科学性的错误，并提出宝贵的修改意见和建议．他们为提高书稿质量付出了辛勤的劳动．在此对他们表示衷心感谢．

由于编者水平有限和缺少编写《选解》的经验，本书定会有一些缺点和错误，恳请广大读者和老师们批评指正．

编者

1994 年 10 月 1 日

于长春东北师大数学系

目　　录

第一章 函 数

练习题 1.1

（《讲义》[①]上册，第 10 页）

5. 确定下列函数的定义域：

(5) $y=\dfrac{1}{|x|-x}$.

解 要求 $|x|-x\neq 0$ 或 $|x|\neq x$，即 $x<0$. 于是，函数的定义域是开区间 $(-\infty,0)$.

(6) $y=\ln(2x+1)+\sqrt{4-3x}$.

解 要求 $2x+1>0$，同时 $4-3x\geqslant 0$，或 $-\dfrac{1}{2}<x$，同时 $x\leqslant\dfrac{4}{3}$. 于是，函数的定义域是区间 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3}\right]$.

(7) $y=\ln\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

解 要求 $\sin\dfrac{\pi}{x}>0$ 或 $\forall\, k\in\mathbf{Z}$，$2k\pi<\dfrac{\pi}{x}<(2k+1)\pi$，即 $\forall\, k\in\mathbf{Z}-\{0\}$，$\dfrac{1}{2k+1}<x<\dfrac{1}{2k}$；当 $k=0$ 时是区间 $(1,+\infty)$. 于是，函数的定义域是无限多个区间：

$$\left(\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2k}\right),k\in\mathbf{Z}-\{0\}\text{ 与}(1,+\infty).$$

(10) $y=\sqrt{\cos x}$.

---

① 《讲义》是指刘玉琏、傅沛仁编《数学分析讲义》(第三版)，下同.

解 要求 $\cos x \geqslant 0$，即 $\forall\, k\in\mathbf{Z}, 2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$. 于是，函数的定义域是无限多个区间：$\forall\, k\in\mathbf{Z}, \left[2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$.

6. 正方形的周长集合 L 与其面积集合 A 之间的对应是否是函数？三角形的周长集合 l 与其面积集合 S 之间的对应是否是函数？为什么？

解 因为正方形的周长为 $a\in L\left(\text{每个边长为}\frac{a}{4}\right)$ 时，所对应的面积 $P=\left(\frac{a}{4}\right)^2\in A$ 是唯一的，所以这个对应关系是函数.

因为三角形的周长为 $r\in l$（设三角形的三边之长分别是 a,b,c，即 $a+b+c=r$）时，所对应的面积 $Q=\sqrt{\frac{r}{2}\left(\frac{r}{2}-a\right)\left(\frac{r}{2}-b\right)\left(\frac{r}{2}-c\right)}\in S$ 不是唯一的（与 a,b,c 有关），所以这个对应关系不是函数.

10. 证明：若 $\varphi(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$，则 $\varphi(a)+\varphi(b)=\varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.

证 由 $\varphi(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$ 知，$\varphi(x)$ 的定义域为 $|x|<1$. 所以，当 $|a|<1$, $|b|<1$ 时，有

$$\varphi(a)+\varphi(b)=\ln\frac{1-a}{1+a}+\ln\frac{1-b}{1+b}$$

$$=\ln\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}$$

$$=\ln\frac{1-a-b+ab}{1+a+b+ab}$$

$$=\ln\frac{1-\dfrac{a+b}{1+ab}}{1+\dfrac{a+b}{1+ab}}$$

$$=\varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right).$$

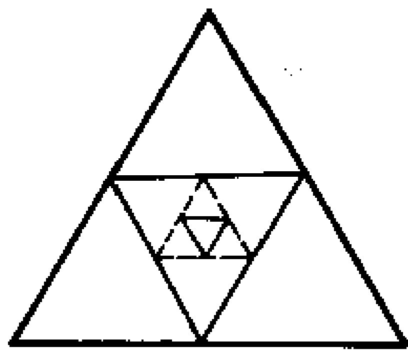


图 1.a

11. 如果等边三角形的面积为 1，联结这个三角形各边中点得到一个小三角形，又联结这个小三角形的各边中点得到一个更小的三角形，如此无限继续下去，求出这些三角形面积的数列.

解 设原等边三角形的面积为 $A_1=1$，如图 1. a. 联结各边中点所得的小三角形的面积 A_2 是原三角形面积 $A_1=1$ 的 $\frac{1}{4}$，即 $A_2=\frac{1}{4}$. 同理，再联结这个小三角形各边中点得到的更小的三角形的面积 $A_3=\frac{1}{4^2}$，如此无限继续下去，于是，这些三角形的面积数列是

$$\left\{\frac{1}{4^{n-1}}\right\}: 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \cdots, \frac{1}{4^{n-1}}, \cdots.$$

14. 证明：若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，且 $a_n>0$，$n=1,2,\cdots$，则数列 $\{\ln a_n\}$ 是等差数列.

证 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列，设 $\forall\ n\in\mathbf{N}$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$（a 为公比，是正常数），有

$$\ln a_{n+1}-\ln a_n=\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ln a(\text{常数}),$$

即 $\{\ln a_n\}$ 是公差为 $\ln a$ 的等差数列.

15. 已知函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的图象（在区间 $[a,b]$ 上可随意画一条曲线，有的点函数值是正，有的点函数值是负），描绘下列函数的图象：

(1) $y_1=|f(x)|$.

解 $$y_1=|f(x)|=\begin{cases}f(x), & \text{当 } f(x)\geqslant 0,\\ -f(x), & \text{当 } f(x)<0,\end{cases}$$

其图象是图 1. b 的虚线.

(2) $y_2=\frac{1}{2}\{f(x)+|f(x)|\}$.

解 $y_2=\frac{1}{2}\{f(x)+|f(x)|\}=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{0,f(x)\}$，其图象是图 1. c 的虚线.

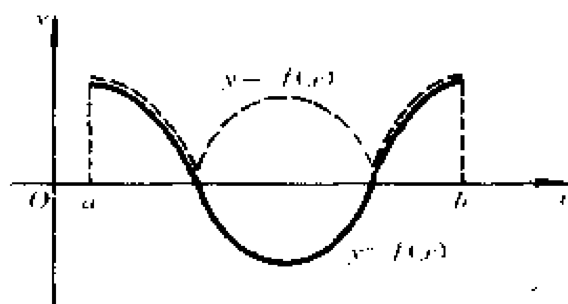


图 1.b

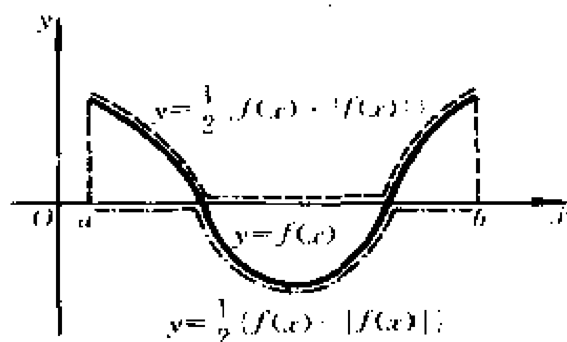


图 1.c

(3) $y_3=\frac{1}{2}\{f(x)-|f(x)|\}$.

解 $y_3=\frac{1}{2}\{f(x)-|f(x)|\}=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{0,f(x)\}$，其图象是图 1.c 的点画线.

16. 已知函数 $y_1=f(x)$、$y_2=g(x)$在区间$[a,b]$的图象(在区间$[a,b]$上可随意画两条曲线，使其相交)，描绘下列函数的图象：

(1) $y=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\}$.

解 $y=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\}=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x),g(x)\}$，其图象是图 1.d 的虚线.

(2) $y=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\}$.

解 $y=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\}=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x),g(x)\}$，其图象是图 1.d 的点画线.

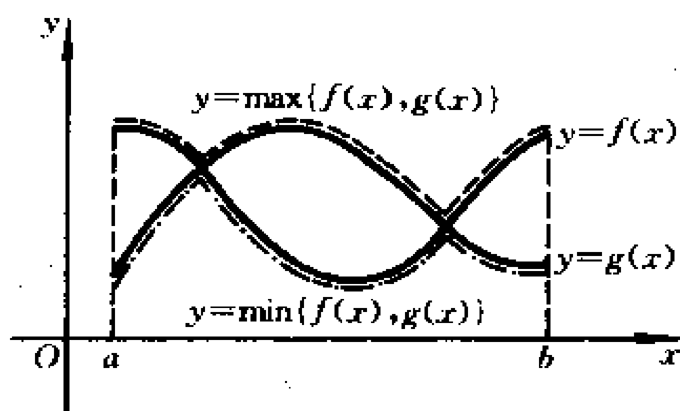


图 1.d

练习题 1.2

（《讲义》上册，第 20 页）

1. 证明：若函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在数集 A 有界，则函数 $f(x)+\varphi(x)$，$f(x)-\varphi(x)$，$f(x)\varphi(x)$ 在数集 A 也有界.

证 已知 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在 A 有界，即 $\exists\ M>0, \forall\ x\in A$，有

$$|f(x)|\leqslant M \text{ 与 } |\varphi(x)|\leqslant M.$$

于是，$\quad |f(x)+\varphi(x)|\leqslant|f(x)|+|\varphi(x)|\leqslant M+M=2M$，

即 $f(x)+\varphi(x)$ 在 A 有界.

同法可证，$f(x)-\varphi(x)$ 与 $f(x)\varphi(x)$ 在 A 也有界.

4. 指出下列函数哪些是奇函数？哪些是偶函数？

(6) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 是奇函数. 事实上，

$$\ln\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right)=\ln\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$$

(7) $\ln\frac{1-x}{1+x}$.

解 是奇函数. 事实上,

$$\ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\ln\frac{1+x}{1-x}=-\ln\frac{1-x}{1+x}.$$

5. 证明:函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间(0,1)无界.

证 $\forall\, b>1$,要找到 $x_b\in(0,1)$,使不等式 $\frac{1}{x_b}>b$ 成立. 从不等式 $\frac{1}{x_b}>b$ 解得 $x_b<\frac{1}{b}$. 于是,

$$\forall\, b>1, \exists\, x_b\in(0,1)\left(x_b<\frac{1}{b}\right), \text{使 } f(x_b)=\frac{1}{x_b}>b,$$

即 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在(0,1)无上界,从而 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在(0,1)无界.

6. 判断下列函数哪个是周期函数,若有最小的正周期,并指出最小的正周期:

(1) $y=\sin^2x$.

解 $y=\sin^2x=\frac{1}{2}(1-\cos2x)$ 是周期函数. 已知 $\cos2x$ 的最小正周期是 π. $\forall\, x\in\mathbf{R}$,有

$$\begin{aligned}\sin^2(x\pm\pi)&=\frac{1}{2}[1-\cos2(x\pm\pi)]\\&=\frac{1}{2}(1-\cos2x)=\sin^2x.\end{aligned}$$

于是,$\sin^2x$ 的最小正周期是 π.

(2) $y=\sin x^2$.

解 $y=\sin x^2$ 不是周期函数.

用反证法. 假设 $y=\sin x^2$ 是周期函数,设其周期是 $T>0$,则 $\forall\, x\in\mathbf{R}$,有

$$\sin(x+T)^2=\sin x^2.$$

令 $x=0$,有 $\sin T^2=\sin0=0$,则 $\exists\, n_0\in\mathbf{N}$,使 $T^2=n_0\pi$.

再令 $x=\sqrt{2}\,T$(为什么这样令? 见下面的证明),有

$$\sin[(\sqrt{2}+1)T]^2=\sin 2T^2=\sin 2n_0\pi=0,$$

则$\exists\ m_0\in\mathbf{N}$,使$\left[\left(\sqrt{2}+1\right)T\right]^2=m_0\pi$或.

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^2=\frac{m_0\pi}{T^2}=\frac{m_0\pi}{n_0\pi}=\frac{m_0}{n_0}.$$

上式等号左端$\left(\sqrt{2}+1\right)^2$是无理数,而右端$\frac{m_0}{n_0}$是有理数,矛盾.于是,$y=\sin x^2$不是周期函数.

(6) $y=D(x)$(狄利克雷函数).

解 $y=D(x)$(狄利克雷函数)是周期函数.

事实上,对任意正有理数r,$\forall\ x\in\mathbf{R}$,有

$$D(x\pm r)=\begin{Bmatrix}1,\text{当 } x \text{ 是有理数}\\ 0,\text{当 } x \text{ 是无理数}\end{Bmatrix}=D(x).$$

于是,任意正有理数r都是$D(x)$的周期.因为正有理数集没有最小数,所以$D(x)$没有最小的正周期.

(8) $y=\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{5}$.

解 $y=\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{5}$是周期函数.已知$\sin\frac{x}{2}$与$\sin\frac{x}{5}$的最小正周期分别是$4\pi$与$10\pi$.而$4\pi$与$10\pi$的最小公倍数是$20\pi$.$\forall\ x\in\mathbf{R}$,有

$$\sin\frac{1}{2}(x\pm 20\pi)+\sin\frac{1}{5}(x\pm 20\pi)=\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{5}.$$

于是,它的最小正周期是20π.

8. 证明:函数$f(x)$在区间I单调$\Longleftrightarrow\forall\ x_1,x_2,x_3\in I$,且$x_1<x_2<x_3$,有

$$[f(x_3)-f(x_2)][f(x_2)-f(x_1)]\geqslant 0.$$

证 已知$f(x)$在I单调$\Longleftrightarrow\forall\ x_1,x_2,x_3\in I$,且$x_1<x_2<x_3$,

$$\begin{Bmatrix}\text{若 } f(x) \text{ 在 } I \text{ 单调增加,有 } f(x_3)-f(x_2)\geqslant 0 \text{ 与 } f(x_2)-f(x_1)\geqslant 0,\\ \text{若 } f(x) \text{ 在 } I \text{ 单调减少,有 } f(x_3)-f(x_2)\leqslant 0 \text{ 与 } f(x_2)-f(x_1)\leqslant 0.\end{Bmatrix}$$

$\Longleftrightarrow\forall\ x_1,x_2,x_3\in I$,且$x_1<x_2<x_3$,$[f(x_3)-f(x_2)][f(x_2)-f(x_1)]$

$\geqslant 0$.

*　*　*　*

9. 例举符合下列条件的函数：

(1) 在 $\mathbf{R}$ 严格减少的奇函数.

答 $f(x)=-x$ 是在 $\mathbf{R}$ 严格减少的奇函数(验证从略).

(2) 在 $\mathbf{R}$ 单调减少的偶函数.

答 常数函数 $f(x)=C$(常数)是在 $\mathbf{R}$ 单调减少的偶函数(易证).

(3) 在 $\mathbf{R}$ 是偶函数、周期函数，且不存在单调区间.

答 狄利克雷函数 $y=D(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 是偶函数、周期函数，且不存在单调区间(验证从略).

(4) 在 $\mathbf{R}$ 是奇函数、偶函数、单调函数、周期函数.

答 常数函数 $f(x)=0$ 在 $\mathbf{R}$ 是奇函数、偶函数、周期函数(易证).

10. 证明：在 $\mathbf{R}$ 不存在严格增加的偶函数.

证 用反证法. 假设在 $\mathbf{R}$ 存在某个严格增加的偶函数 $f(x)$，

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}, 且\ 0 < x_1 < x_2 (-x_2 < -x_1).$$

由 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 严格增加，有 $f(x_1)<f(x_2)$ 与 $f(-x_2)<f(-x_1)$；

由 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 是偶函数，有 $f(x_1)=f(-x_1)$ 与 $f(x_2)=f(-x_2)$. 于是，

$$f(-x_1)=f(x_1)<f(x_2)=f(-x_2),$$

与 $f(-x_1)>f(-x_2)$ 矛盾. 所以在 $\mathbf{R}$ 不存在严格增加的偶函数.

11. 列表对比下列的定义及其否定叙述：

(1) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 是偶函数与不是偶函数.

答

偶函数	$\forall x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)=f(-x)$.
非偶函数	$\exists x_0\in\mathbf{R}, x_0\neq 0$，有 $f(x_0)\neq f(-x_0)$.

(2) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 是周期函数与不是周期函数.

答

周期函数	$\exists\ l>0,\forall\ x\in\mathbf{R}$，有 $f(x\pm l)=f(x)$.
非周期函数	$\forall\ l>0,\exists\ x_0\in\mathbf{R}$，有 $f(x_0+l)\neq f(x_0)$ 或 $f(x_0-l)\neq f(x_0)$.

(3) $f(x)$在(a,b)是严格增加函数与不是严格增加函数.

答

严格增加函数	$\forall\ x_1,x_2\in(a,b)$，且 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$.
非严格增加函数	$\exists\ x_1,x_2\in(a,b)$，且 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$.

14. 证明：若函数 $f(x)$与 $g(x)$都是定义在 A 上的周期函数，周期分别是 T_1 与 T_2，且$\frac{T_1}{T_2}=a$，a 是有理数，则 $f(x)+g(x)$与 $f(x)g(x)$都是 A 上的周期函数.

证　已知 a 是正有理数(因为周期 T_1 与 T_2 都是正数)，设

$$\frac{T_1}{T_2}=a=\frac{m}{n},n,m\in\mathbf{N},$$

或　$nT_1=mT_2$.　设 $l=nT_1=mT_2>0,\forall\ x\in A$，有

$$f(x\pm l)+g(x\pm l)=f(x\pm nT_1)+g(x\pm mT_2)=f(x)+g(x)$$

与　$$f(x\pm l)g(x\pm l)=f(x\pm nT_1)g(x\pm mT_2)=f(x)g(x),$$

即 $f(x)+g(x)$与 $f(x)g(x)$都是在 A 上的周期函数.

练习题　1.3

（《讲义》上册，第 31 页）

1. 指出下列函数在指定区间的反函数及其定义域：

(4)　$y=\frac{ax+b}{cx+d}$，a,b,c,d 是常数，且 $ad-bc\neq0$.

解　已知 $ad-bc\neq0$，则 a 与 c 不能同时为零.

若 $c=0,a\neq0$，此时，$d\neq0$，从方程 $y=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$ 解得 $x=\frac{d}{a}y-$

$\frac{b}{a}$. 于是，它的反函数是 $y=\frac{d}{a}x-\frac{b}{a}$，定义域是 $\mathbf{R}$；

若 $c\neq 0$，从方程 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 解得 $x=\frac{b-dy}{cy-a}$.
于是，它的反函数是 $y=\frac{b-dx}{cx-a}$，定义域是 $\mathbf{R}-\left\{\frac{a}{c}\right\}$.

(5) $y=\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，$x\in\mathbf{R}$.

解 从方程 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 或 $e^{2x}-2ye^x-1=0$ 解得 $e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$（只能取正号）或 $x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$. 于是，它的反函数是 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，定义域是 $\mathbf{R}$.

(6)

$$y=\begin{cases}x, & x\in(-\infty,1),\\ x^2, & x\in[1,4],\\ 2^x, & x\in(4,+\infty).\end{cases}$$

解 当 $x\in(-\infty,1)$ 时，函数 $y=x$ 的反函数是 $x=y$，$y\in(-\infty,1)$

当 $x\in[1,4]$ 时，函数 $y=x^2$ 的反函数是 $x=\sqrt{y}$，$y\in[1,16]$.

当 $x\in(4,+\infty)$ 时，函数 $y=2^x$ 的反函数是 $x=\log_2 y$，$y\in(16,+\infty)$. 于是，它的反函数是：

$$y=\begin{cases}x, & x\in(-\infty,1),\\ \sqrt{x}, & x\in[1,16],\\ \log_2 x, & x\in(16,+\infty).\end{cases}$$

2. 证明：若函数 $y=\varphi(x)$ 在数集 A 严格减少，则函数 $y=\varphi(x)$ 存在反函数 $x=\varphi^{-1}(y)$，且反函数 $x=\varphi^{-1}(y)$ 在 $\varphi(A)$ 也严格减少.

证 首先证明 $\varphi(x)$ 存在反函数，即 $\forall\ y\in\varphi(A)$，按照关系 φ^{-1} 对应唯一一个 $x\in A$. 用反证法，假设 $\exists\ y_0\in\varphi(A)$，按照对应关系 φ^{-1} 至少对应两个 $x_1, x_2\in A$，且 $x_1\neq x_2$，使 $y_0=\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$. 这与函数 $y=\varphi(x)$ 严格减少矛盾. 于是，函数 $y=\varphi(x)$ 存在反函数 $x=$

$\varphi^{-1}(y), y\in\varphi(A)$.

其次证明：反函数 $x=\varphi^{-1}(y)$ 在 $\varphi(A)$ 严格减少.

$\forall\, y_1, y_2\in\varphi(A)$，且 $y_1<y_2$. 设 $\varphi^{-1}(y_1)=x_1$ 与 $\varphi^{-1}(y_2)=x_2$ 或 $y_1=\varphi(x_1)$ 与 $y_2=\varphi(x_2)$. 已知函数 $y=\varphi(x)$ 在 A 严格减少，有：

$$\varphi(x_1)=y_1<y_2=\varphi(x_2)\Longleftrightarrow x_1>x_2\Longleftrightarrow\varphi^{-1}(y_1)>\varphi^{-1}(y_2),$$

即反函数 $x=\varphi^{-1}(y)$ 在 A 严格减少.

5. 证明：若函数 $f(x), g(x), h(x)$ 都是单调增加的，且

$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，则 $f[f(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant h[h(x)]$.

证 将已知不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 与 $g(x)\leqslant h(x)$ 的 x 分别替换为 $g(x)$ 与 $h(x)$，有

$$f[g(x)]\leqslant g[g(x)] \text{ 与 } g[h(x)]\leqslant h[h(x)].$$

又已知函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是单调增加的，有

$$f[f(x)]\leqslant f[g(x)] \text{ 与 } g[g(x)]\leqslant g[h(x)].$$

于是，$$f[f(x)]\leqslant f[g(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant g[h(x)]\leqslant h[h(x)],$$

即 $$f[f(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant h[h(x)].$$

7. 设 $f(x)$ 是 x 的二次函数，且 $f(0)=1, f(x+1)-f(x)=2x$，求函数 $f(x)$.

解 设 $f(x)=ax^2+bx+c$（求函数 $f(x)$ 也就是求其系数 a, b, c）.

已知 $f(0)=c=1$，从而 $f(x)=ax^2+bx+1$. 又已知

$$\begin{aligned} f(x+1)-f(x) &= a(x+1)^2+b(x+1)+1 \\ &\quad -(ax^2+bx+1) \\ &= 2ax+a+b=2x. \end{aligned}$$

上式是恒等式，等号两端的同次幂的系数必相等，有

$$2a=2 \text{ 与 } a+b=0，\text{解得 } a=1, b=-1.$$

于是，二次函数 $f(x)=x^2-x+1$.

8. 证明：$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$.

证 根据两个对应关系（函数）相等的定义，对任意 x，有

$$f\circ(g\circ h)(x)=f\{(g\circ h)(x)\}=f\{g[h(x)]\}.$$

与 $$\{(f\circ g)\circ h\}(x)=(f\circ g)[h(x)]=f\{g[h(x)]\}.$$

上述两个等式的等号右端相等，从而等号左端也相等，即

$$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h.$$

9. 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求函数 $f(x)$.

解 设 $y=x+\dfrac{1}{x}$，有 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=y^2-2$，即 $f(y)=y^2-2$. 将自变数 y 表为 x，有 $f(x)=x^2-2$.

10. 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $\underbrace{f\{f[\cdots f}_{n次}(x)]\}$.

解 为了书写简便，设 $f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f}_{n次}(x)]\}$.

$$f_1(x)=f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$f_2(x)=f[f(x)]=\frac{f_1(x)}{\sqrt{1+[f_1(x)]^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

应用归纳法. 设 $f_{n-1}(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+(n-1)x^2}}$，则

$$f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]=\frac{f_{n-1}(x)}{\sqrt{1+[f_{n-1}(x)]^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

于是，$\underbrace{f\{f[\cdots f}_{n次}(x)]\}=f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

第二章 极　　限

练习题 2.1

（《讲义》上册，第 45 页）

1. 以下几种叙述与极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$的定义是否等价，并说明理由：

(1) $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N\in\mathbf{N},\forall\ n\geqslant N$，有$|a_n-a|\leqslant\varepsilon$.

答 等价，即$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N\in\mathbf{N},\forall\ n\geqslant N$，有$|a_n-a|\leqslant\varepsilon.\Longleftrightarrow\forall\ \varepsilon,\exists\ N\in\mathbf{N},\forall\ n>N,|a_n-a|<\varepsilon$.

$\Rightarrow\forall\ \varepsilon_1>0,\exists\ N\in\mathbf{N},\forall\ n\geqslant N$，有$|a_n-a|\leqslant\varepsilon_1$. $\forall\ \varepsilon$，取$\varepsilon_1<\varepsilon$，则有

$$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N\in\mathbf{N},\forall\ n>N,|a_n-a|<\varepsilon.$$

$\Leftarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N_1\in\mathbf{N},\forall\ n>N_1,|a_n-a|<\varepsilon$. 取$N>N_1$，则有

$$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N\in\mathbf{N},\forall\ n\geqslant N>N_1,|a_n-a|\leqslant\varepsilon.$$

(2) $\forall\ k\in\mathbf{N},\exists\ N_k\in\mathbf{N},\forall\ n\geqslant N_k$，有$|a_n-a|<\dfrac{1}{k}$.

答 等价．因为$\forall\ \varepsilon>0$（限定$0<\varepsilon<1$），$\exists\ k\in\mathbf{N}$，使$\dfrac{1}{k+1}\leqslant\varepsilon<\dfrac{1}{k}$，从而$\dfrac{1}{k}\to0(k\to\infty)\Longleftrightarrow\varepsilon\to0$，所以$\forall\ k\in\mathbf{N}$，有$|a_n-a|<\dfrac{1}{k}\Longleftrightarrow\forall\ \varepsilon>0$，有$|a_n-a|<\varepsilon$. 于是，由(1)知，(2)与极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$的定义等价．

(3)有无限多个$\varepsilon>0$，对每个ε，$\exists\ N(\varepsilon)\in\mathbf{N},\forall\ n>N(\varepsilon)$，有

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

答 不等价．因为“无限多个$\varepsilon>0$”不等价于“$\forall\ \varepsilon>0$”，即无限

多于 $\varepsilon>0$ 不能保证 ε 任意小($\varepsilon\to0$). 例如,无限多个正数 $\varepsilon_n=1+\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N})$,而 $\varepsilon_n=1+\frac{1}{n}$不能任意小. 于是,(3)与极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的定义不等价.

(4) $\forall\ \varepsilon>0$,有无限多个 a_n,有$|a_n-a|<\varepsilon$.

答 不等价. 因为"无限多个 a_n,有$|a_n-a|<\varepsilon$"不等价于"$\exists\ N\in\mathbf{N},\forall\ n>N$,有$|a_n-a|<\varepsilon$",即无限多个 a_n 不一定是从某项 a_N 之后所有的 $a_n(n>N)$,有$|a_n-a|<\varepsilon$. 例如,数列$\{(-1)^n\}$:

$$-1,1,-1,1,\cdots,\quad a=1.$$

$\forall\ \varepsilon>0$,它都存在无限多个偶数项 $a_{2k}=1(k\in\mathbf{N})$,有$|a_{2k}-1|=|1-1|=0<\varepsilon$,而数列$\{(-1)^n\}$并不存在极限. 于是,(4)与极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的定义不等价.

(5) $\forall\ k\in\mathbf{N}$,只有有限个 a_n 位于区间$\left(a-\frac{1}{k},a+\frac{1}{k}\right)$之外.

答 等价. 已知$\forall\ k\in\mathbf{N},a_n\in\left(a-\frac{1}{k},a+\frac{1}{k}\right)\Longleftrightarrow|a_n-a|<\frac{1}{k}$. 由题只有有限个 a_n,设有 m 个: $a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_m}$ 位于区间$\left(a-\frac{1}{k},a+\frac{1}{k}\right)$之外. 令

$$N_k=\max\{n_1,n_2,\cdots,n_m\}.$$

从而,$\forall\ n>N_k$,有$|a_n-a|<\frac{1}{k}$. 而$\frac{1}{k}\to0(k\to\infty)$,此即(2). 于是,(5)与极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的定义等价.

3. 证明下列极限:

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n}=0$.

证 $\forall\ \varepsilon>0$,要使不等式

$$\left|\frac{\cos n}{n}-0\right|=\left|\frac{\cos n}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon$$

成立. 从不等式$\frac{1}{n}<\varepsilon$ 解得 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,于是

$$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\in\mathbf{N},\forall\ n>N,有\left|\frac{\cos n}{n}-0\right|<\varepsilon,$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n}=0.$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2}{7n-n^2}=-5.$

证 $\forall\ \varepsilon>0$，限定 $n>7$，要使不等式

$$\left|\frac{5n^2}{7n-n^2}-(-5)\right|=\left|\frac{35}{7-n}\right|=\frac{35}{n-7}<\varepsilon$$

成立，从不等式中解得 $n>\frac{35}{\varepsilon}+7$. 取 $N=\max\left\{7,\left[\frac{35}{\varepsilon}+7\right]\right\}$. 于是

$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N=\max\left\{7,\left[\frac{35}{\varepsilon}+7\right]\right\}\in\mathbf{N}$，$\forall\ n>N$，有 $\left|\frac{5n^2}{7n-n^2}-(-5)\right|<\varepsilon$，

即 $$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2}{7n-n^2}=-5.$$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0.$

证 $\forall\ \varepsilon>0$，要使不等式

$$\begin{aligned}&|(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-0|\\=&\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\=&\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon\end{aligned}$$

成立，从不等式 $\frac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon$ 解得 $n>\frac{1}{4\varepsilon^2}$. 取 $N=\left[\frac{1}{4\varepsilon^2}\right]$，于是

$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N=\left[\frac{1}{4\varepsilon^2}\right]\in\mathbf{N}$，$\forall\ n>N$，有

$$|(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-0|<\varepsilon,$$

即 $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0.$$

4. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n}=0$.

证 只给出极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n}=0$ 的证明(同法可证其余两个极限).

由二项式定理，$\forall n\in \mathbf{N}$，限定 $n\geqslant 4$，有

$$
\begin{aligned}
2^n &= (1+1)^n \\
&= 1+n+\frac{n(n-1)}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \\
&\quad +\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}+\cdots+1 \\
&\geqslant \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}
\end{aligned}
$$

$\forall \varepsilon>0$，要使不等式（限定 $n\geqslant 4$）

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{n^3}{2^n}-0\right| = \frac{n^3}{2^n} &\leqslant \frac{n^3}{\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}} \\
&= \frac{24n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)} \\
&= \frac{24}{(n-1)\left(1-\dfrac{2}{n}\right)\left(1-\dfrac{3}{n}\right)} \\
&\leqslant \frac{24}{(n-1)\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}} = \frac{192}{n-1} < \varepsilon
\end{aligned}
$$

成立，从不等式 $\frac{192}{n-1}<\varepsilon$ 解得 $n>\frac{192}{\varepsilon}+1$. 取 $N=\max\left\{4,\left[\frac{192}{\varepsilon}+1\right]\right\}$. 于是

$\forall \varepsilon>0, \exists N=\max\left\{4,\left[\frac{192}{\varepsilon}+1\right]\right\}\in \mathbf{N}, \forall n>N$，有

$$\left|\frac{n^3}{2^n}-0\right|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n}=0.$$

*　　*　　*　　*

7. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{a_n} = \sqrt[3]{a}$.

证 分三种情况证明：

1) 若 $a=0$. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，即

$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ N\in\mathbf{N}, \forall\ n>N$，有 $|a_n|<\varepsilon$，从而，有

$$\left|\sqrt[3]{a_n}-0\right| = \left|\sqrt[3]{a_n}\right| = \sqrt[3]{|a_n|} < \sqrt[3]{\varepsilon},$$

即
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{a_n} = 0.$$

2) 若 $a>0$. 由已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$，即

对 $a>0, \exists\ N_1\in\mathbf{N}, \forall\ n>N_1$，有 $|a_n-a|<a$ 或 $a_n>0$.

又 $\forall\ \varepsilon>0, \exists\ N\in\mathbf{N}(N\geqslant N_1), \forall\ n>N$，有 $|a_n-a|<\varepsilon$，且 $a_n>0$. 从而，有

$$\left|\sqrt[3]{a_n}-\sqrt[3]{a}\right| = \frac{|a_n-a|}{\left(\sqrt[3]{a_n}\right)^2+\sqrt[3]{a_n}\cdot\sqrt[3]{a}+\left(\sqrt[3]{a}\right)^2}$$

$$< \frac{|a_n-a|}{\sqrt[3]{a^2}} < \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\cdot\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{a_n} = \sqrt[3]{a}.$$

3) 若 $a<0$. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < 0$，即

$\exists\ (-a)>0, \exists\ N_1\in\mathbf{N}, \forall\ n>N_1$，有 $|a_n-a|<-a$ 或 $a_n<0$.

又 $\forall\ \varepsilon>0, \exists\ N\in\mathbf{N}(N\geqslant N_1), \forall\ n>N$，有 $|a_n-a|<\varepsilon$，且 $a_n<0$. 从而，有

$$\left|\sqrt[3]{a_n}-\sqrt[3]{a}\right| = \frac{|a_n-a|}{\left(\sqrt[3]{a_n}\right)^2+\sqrt[3]{a_n}\cdot\sqrt[3]{a}+\left(\sqrt[3]{a}\right)^2}$$

$$< \frac{|a_n-a|}{\sqrt[3]{a^2}} < \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\cdot\varepsilon.$$

（$\left(\sqrt[3]{a_n}\right)^2$，$\sqrt[3]{a_n}\cdot\sqrt[3]{a}$，$\left(\sqrt[3]{a}\right)^2$ 都是正数）

即
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{a_n} = \sqrt[3]{a}.$$

于是，$\forall a\in \mathbf{R}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}=\sqrt[3]{a}$.

8. 证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

证 $\forall \varepsilon>0$，限定 $n\geqslant 2$，要使不等式

$$\left|\frac{2^n}{n!}-0\right|=\frac{2^n}{n!}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{2}{n-1}\cdot\frac{2}{n}$$

$$\leqslant 2\cdot\frac{2}{n}=\frac{4}{n}<\varepsilon$$

成立，从不等式 $\frac{4}{n}<\varepsilon$ 解得 $n>\frac{4}{\varepsilon}$. 取 $N=\max\left\{2,\left[\frac{4}{\varepsilon}\right]\right\}$，于是

$\forall \varepsilon>0$，$\exists N=\max\left\{2,\left[\frac{4}{\varepsilon}\right]\right\}\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，有 $\left|\frac{2^n}{n!}-0\right|<\varepsilon$，

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证 已知 $\forall n\geqslant 1$，有 $\sqrt[n]{n}-1\geqslant 0$. 设 $\sqrt[n]{n}-1=\alpha_n\geqslant 0$ 或 $n=(1+\alpha_n)^n$. 由二项式定理，$\forall n\in\mathbf{N}$，$n\geqslant 2$，有

$$n=(1+\alpha_n)^n=1+n\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2+\cdots+\alpha_n^n$$

$$\geqslant\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$$

或 $\alpha_n^2\leqslant\frac{2}{n-1}$. 从而，$\forall n\geqslant 2$，有不等式 $0\leqslant\sqrt[n]{n}-1=\alpha_n\leqslant\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}<\frac{2}{\sqrt{n-1}}$.

$\forall \varepsilon>0$，限定 $n\geqslant 2$，要使不等式

$$0\leqslant\sqrt[n]{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n-1}}<\varepsilon$$

成立，从不等式 $\frac{2}{\sqrt{n-1}}<\varepsilon$ 解得 $n>\frac{4}{\varepsilon^2}+1$. 取 $N=$

$\max\left\{2,\left[\frac{4}{\varepsilon^2}+1\right]\right\}$，于是

$$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N=\max\left\{2,\left[\frac{4}{\varepsilon^2}+1\right]\right\}\in\mathbf{N},\forall\ n>N,有$$

$$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$

证 首先证明：$\forall\ n\in\mathbf{N}$，有不等式 $\sqrt{n}\leqslant\sqrt[n]{n!}$.

事实上，$\forall\ n,k\in\mathbf{N}$，且 $k\leqslant n$，有

$$n\leqslant k(n-k+1)(或(n-k)(k-1)\geqslant 0)$$

当 $k=1,2,\cdots,n$ 时，分别有

$$n\leqslant 1\cdot n,n\leqslant 2(n-1),\cdots,n\leqslant n\cdot 1.$$

将上述几个不等式不等号左右两边分别相乘，得

$$n^n\leqslant(1\cdot n)[2\cdot(n-1)]\cdots(n\cdot 1)=n!\cdot n!=(n!)^2,$$

即
$$\sqrt{n}\leqslant\sqrt[n]{n!}\ 或\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

其次，$\forall\ \varepsilon>0$，要使不等式

$$\left|\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}-0\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$$

成立，从不等式$\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$ 解得 $n>\frac{1}{\varepsilon^2}$. 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$，于是

$$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]\in\mathbf{N},\forall\ n>N,有$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}-0\right|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=1.$

证 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{n+1}.$

$\forall\ \varepsilon>0$,要使不等式

$$\left|\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)-1\right|$$
$$=\left|\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-1\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon$$

成立,解得 $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$. 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$,于是

$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]\in\mathbf{N},\forall\ n>N$,有

$$\left|\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)-1\right|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=1.$$

9. 证明:数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$的极限不是 $0\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\neq 0\right)$.

证 $\exists\ \varepsilon_0=\frac{1}{2}>0,\forall\ N\in\mathbf{N},\exists\ n_0>N$,有

$$\left|\frac{n_0}{n_0+1}-0\right|=\frac{n_0}{n_0+1}\geqslant\frac{1}{2},$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\neq 0.$$

10. 证明:数列$\{2-(-1)^n\}$发散.

证 $\forall\ a\geqslant 2,\exists\ \varepsilon_0=1,\forall\ N\in\mathbf{N},\exists\ n=2k>N(k\in\mathbf{N})$,有

$$|[2-(-1)^{2k}]-a|=|1-a|\geqslant\varepsilon_0=1;$$

$\forall\ a<2,\exists\ \varepsilon_0=1,\forall\ N\in\mathbf{N},\exists\ n=2k+1>N(k\in\mathbf{N})$,有

$$|[2-(-1)^{2k+1}]-a|=|3-a|\geqslant\varepsilon_0=1.$$

于是,$\forall\ a\in\mathbf{R}$,有$\lim_{n\to\infty}[2-(-1)^n]\neq a$,即数列$\{2-(-1)^n\}$发散.

练习题　2.2

（《讲义》上册，第 64 页）

2. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$，逆命题是否成立？研究数列 $\{(-1)^n\}$.

证　已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，即

$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ N\in\mathbf{N}, \forall\ n>N$，有 $|a_n-a|<\varepsilon$，从而也有

$$||a_n|-|a||\leqslant|a_n-a|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|.$$

逆命题不成立. 例如，数列 $\{(-1)^n\}$. 显然 $\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n|=1$，但是数列 $\{(-1)^n\}$ 却发散.

4. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n^2=b^2$.

证　已知 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，一方面，

$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ N\in\mathbf{N}, \forall\ n>N$，有 $|b_n-b|<\varepsilon$；

另一方面，数列

$\exists\ M>0, \forall$

于是，$\forall\ \varepsilon>0, \exists$

$\leqslant$

其中 $M+|b|$ 是

6. 用极限　　　　　　　　　　，有 a_n <0.

证　已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a<0$，则

$\exists\ (-a)>0, \exists\ N\in\mathbf{N}, \forall\ n>N$，有

$$|a_n-a|<-a,\quad 从而\quad a_n<a-a=0.$$

7. 证明：若 $|a_{n+1}| \leqslant q|a_n|, 0<q<1, n=1,2,3,\cdots$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

证 不妨设 $a_1 \neq 0$. 否则 $a_1=0$，则 $a_2=0$，由归纳法，有

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \cdots = 0$$

即 $\{a_n\}$ 是每项为 0 的常数列. 显然，有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

当 $a_1 \neq 0$ 时，已知当 $n=1$ 时，有 $|a_2| \leqslant q|a_1|$.

当 $n=2$ 时，有 $|a_3| \leqslant q|a_2| \leqslant q^2|a_1|$.

不难用归纳法证明，$\forall k \in \mathbf{N}$，有 $|a_{k+1}| \leqslant q|a_k| \leqslant q^k|a_1|$.

已知 $\lim\limits_{k\to\infty} q^k=0(0<q<1)$，即 $\forall \varepsilon>0$，$\exists K \in \mathbf{N}$，$\forall k>K$，有

$|q^k-0|=q^k<\varepsilon$，从而 $|a_{k+1}-0| \leqslant q^k|a_1| < |a_1|\varepsilon$[1]，

其中 $|a_1|$ 是正常数，即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

8. 证明：若 $a_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}=r<1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

证 $\exists q>0$，使 $r<q<1$. 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}=r<q$. 根据极限保序性，$\exists N \in \mathbf{N}$，$\forall n>N$，有

$$\sqrt[n]{a_n} < q，从而\ 0 < a_n < q^n.$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0(0<q<1)$，根据两边夹定理，有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

9. 证明：若 $a_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=r<1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

证 $\exists q>0$，使 $r<q<1$. 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=r<q$. 根据极限保序性，$\exists N \in \mathbf{N}$，$\forall n>N$，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q, \quad 从而 \quad a_{n+1} < qa_n.$$

已知当 $n=N+1$ 时，有 $a_{N+2}<qa_{N+1}$.

当 $n=N+2$ 时，有 $a_{N+3} < qa_{N+2} < q^2a_{N+1}$.

---

① 波浪线上的四句话就是数列极限 $\lim a_n=0$ 的定义. 下同.

不难用归纳法证明，$\forall\ k\in\mathbf{N}$，有 $a_{N+k+1}<qa_{N+k}<q^k a_{N+1}$.

已知 $\lim\limits_{k\to\infty}q^k=0(0<q<1)$，即 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ K\in\mathbf{N}$，$\forall\ k>K$，有

$|q^k-0|=q^k<\varepsilon$，从而 $|a_{N+k+1}-0|<q^k a_{N+1}<a_{N+1}\varepsilon$.

其中 a_{N+1} 是正常数，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

10. 数列 $\{a_n\}$：$a_1=a_2=1$，$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$，$n=2,3,4,\cdots$ 称为斐波那契数列，不难应用归纳法证明

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}.$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$.

证 当 $n=1$ 时，有 $a_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}=1$，

当 $n=2$ 时，有 $a_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\}$

$=1$.

当 $n=3$ 时，有 $a_3=a_1+a_2=1+1=2$

$=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right\}$.

设 $n=k-1$ 与 $n=k$ 时成立，即有

$$a_{k-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right\},$$

与
$$a_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right\}.$$

则
$$\begin{aligned}a_{k+1}&=a_k+a_{k-1}\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right\}\\&\quad+\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right\}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right\}.$$

于是， $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right\}.$

设 $A=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$B=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，有 $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(A^n-B^n)$，

且 $\frac{B}{A}=\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$，$\left|\frac{B}{A}\right|<1$， $A\cdot B=-1$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(A^n-B^n)}{\frac{1}{\sqrt{5}}(A^{n+1}-B^{n+1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{B}{A}\right)^n}{A\left[1-\left(\frac{B}{A}\right)^{n+1}\right]}$$

$$= \frac{1}{A} = -B = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618.$$

11. 求下列极限：

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$ （$|a|<1$，$|b|<1$）.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-b}{1-a}\ \frac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}}=\frac{1-b}{1-a}.$$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$.

解 设 $S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}$,

$$\frac{1}{2}S_n=\qquad\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

两式相减得 $\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\cdots+\dfrac{2}{2^n}-\dfrac{2n-1}{2^{n+1}}$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

或 $S_n=1+2-\dfrac{1}{2^{n-2}}-\dfrac{2n-1}{2^n}=3-\dfrac{1}{2^{n-2}}-\dfrac{2n-1}{2^n}$.

于是，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right)=3.\quad\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2^n}=0\right)$$

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^n$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^{\frac{n}{5}}\right]^5=e^5$.

12. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，其中 $a_i>0,1\leqslant i\leqslant k$.

证 设 $a_m=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$. 有不等式

$$a_m=\sqrt[n]{a_m^n}\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}\leqslant\sqrt[n]{ka_m^n}=a_m\cdot\sqrt[n]{k}.$$

已知$\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}=1$，根据两边夹定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=a_m=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}.$$

13. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}\right)=0$.

证 $\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n^2+n}<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}<\frac{n+1}{n^2}.$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. 根据两边夹定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}\right)=0.$$

14. 证明：若 $a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$，$n=1,2,\cdots$，则数列$\{a_n\}$收敛，并求其极限.

证 先用归纳法证明：数列$\{a_n\}$有上界，上界是 2.

事实上，当 $n=1$ 时，$a_1=\sqrt{2}<2$. 设 $a_n<2$，则

$$a_{n+1}=\sqrt{2a_n}<\sqrt{2\cdot 2}=2.$$

其次数列$\{a_n\}$严格增加.

事实上，$\forall n\in\mathbf{N}$，有（已知$\forall n\in\mathbf{N}$，$\sqrt{a_n}<\sqrt{2}$），

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{2a_n}-a_n=\sqrt{a_n}(\sqrt{2}-\sqrt{a_n})>0.$$

根据公理，数列$\{a_n\}$收敛. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，有

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}^2=2\lim_{n\to\infty}a_n\quad(a_{n+1}=\sqrt{2a_n}\Longleftrightarrow a_{n+1}^2=2a_n).$$

即 $a^2=2a$，解得 $a=2$. 于是，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$.

15. 证明：若 $a_0=a>0$，$a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{2}{a_{n-1}}\right)$，$n=1,2,\cdots$，则数列$\{a_n\}$收敛，并求其极限.

证 由几何平均不超过算术平均，$\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{2}{a_{n-1}}\right)\geqslant\sqrt{a_{n-1}\cdot\frac{2}{a_{n-1}}}=\sqrt{2}\quad(a_n^2\geqslant 2),$$

即数列$\{a_n\}$有下界. 又$\forall\ n\in\mathbf{N}$,有

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)-a_n=\frac{2-a_n^2}{2a_n}\leqslant 0,$$

即数列$\{a_n\}$单调减少. 根据公理,数列$\{a_n\}$存在极限.

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$,有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{2}{a_{n-1}}\right),\text{即}\quad b=\frac{1}{2}\left(b+\frac{2}{b}\right),$$

解得$b=\pm\sqrt{2}$. 由极限的保序性,$b>0$. 于是,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2}$.

16. 应用柯西收敛准则证明下列数列(只给出通项)的收敛性:

(1) $x_n=a_0+a_1q+\cdots+a_nq^n$,其中$0<q<1$,$|a_i|\leqslant M$常数,$i=0,1,2,\cdots$.

证 $\forall\ n,p\in\mathbf{N}$,有

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n|&=|a_{n+1}q^{n+1}+a_{n+2}q^{n+2}+\cdots+a_{n+p}q^{n+p}|\\&\leqslant|a_{n+1}|q^{n+1}+|a_{n+2}|q^{n+2}+\cdots+|a_{n+p}|q^{n+p}\\&\leqslant M(q^{n+1}+q^{n+2}+\cdots+q^{n+p})\\&=\frac{M}{1-q}(q^{n+1}-q^{n+p+1})<\frac{M}{1-q}q^{n+1}.\end{aligned}$$

已知$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$,即$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N\in\mathbf{N}$,$\forall\ n>N$,有$q^{n+1}<\varepsilon$. 从而,$\forall\ p\in\mathbf{N}$,有

$$|x_{n+p}-x_n|<\frac{M}{1-q}q^{n+1}<\frac{M}{1-q}\varepsilon,$$

其中$\frac{M}{1-q}$是正常数. 根据柯西收敛准则,数列$\{x_n\}$收敛.

(3) $\quad x_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$.

证 已知$\forall\ n\in\mathbf{N}$,有

$$\frac{1}{n!}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots n}\leqslant\frac{1}{\underbrace{1\cdot2\cdot2\cdots2}_{n-1\text{个}}}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

$\forall\ n,p\in\mathbf{N}$,有

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{(n+p)!}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p-1}}=2\cdot\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+p}}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n+p-1}}<\frac{1}{2^{n-1}}.$$

已知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$，即$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，$\forall\ n>N$，有$\frac{1}{2^{n-1}}<\varepsilon$. 从而，$\forall\ p\in\mathbf{N}$，有

$$|x_{n+p}-x_n|<\frac{1}{2^{n-1}}<\varepsilon,$$

根据柯西收敛准则，数列$\{x_n\}$收敛.

17. 证明：若数列$\{a_n\}$单调增加，且有一个子数列$\{a_{n_k}\}$收敛，则数列$\{a_n\}$也收敛，且收敛于同一个极限.

证 已知子数列$\{a_{n_k}\}$收敛，设$\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=a$，即

$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ K\in\mathbf{N}$，$\forall\ k>K$，有$|a_{n_k}-a|<\varepsilon$或$a-\varepsilon<a_{n_k}<a+\varepsilon$.

已知数列$\{a_n\}$单调增加，$\exists\ N>n_K$，$\forall\ n>N$，$a_{n_K}\leqslant a_n$. 从而有$a-\varepsilon<a_n$. 另一方面，$\forall\ n\in\mathbf{N}$，有$a_n<a+\varepsilon$. 事实上，$\forall\ n\in\mathbf{N}$，在数列$\{n_k\}$中必存在n_r，使$a_n\leqslant a_{n_r}\leqslant a$. 于是，$\forall\ n>N$，有$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

* * * *

18. 证明：若$x_1=a>0$，$y_1=b>0$，$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$，$y_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+y_n)$，$n=1,2,\cdots$，则数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$都存在极限，且它们的极限相等.

证 由几何平均不超过算术平均，$\forall\ n\in\mathbf{N}$，有

$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\leqslant\frac{1}{2}(x_n+y_n)=y_{n+1}.$$

又有
$$x_n=\sqrt{x_nx_n}\leqslant\sqrt{x_ny_n}=x_{n+1},$$

$$y_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+y_n)\leqslant\frac{1}{2}(y_n+y_n)=y_n,$$

因为$\forall n\in\mathbf{N}$，有$x_n\leqslant y_n$，又$y_{n+1}\leqslant y_n\leqslant\cdots\leqslant y_1$，所以，$x_n\leqslant b$. 即数列$\{x_n\}$单调增加有上界($b$就是它的一个上界). 同理，数列$\{y_n\}$单调减少有下界($a$就是它的一个下界). 根据公理，它们都存在极限.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$与$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$. 从而，有

$$\lim_{n\to\infty}y_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(x_n+y_n)\text{，即 }B=\frac{A+B}{2}.$$

于是，$A=B$或$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A(=B)$.

19. 证明：若$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，则数列$\{a_n\}$存在极限，其极限$c$称为欧拉常数，$c=0.577216\cdots$.

证 首先证明，$\forall n\in\mathbf{N}$，有$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$[①].

一方面，已知$\forall n\in\mathbf{N}$，有$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$. 两端取自然对数，有

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1\quad\text{或}\quad\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

另一方面，已知$\forall n\in\mathbf{N}$，且$n\geqslant2$，有

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{n}{n-1}\right)^n=\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n$$

$$=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\qquad\text{(由伯努利不等式)}$$

$$>1+\frac{n}{n^2-1}>1+\frac{1}{n}$$

$$=\frac{n+1}{n},$$

整理得

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n>\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

或

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

① 《讲义》§6.4的例4应用微分法给出它的另一证明($x=\frac{1}{n}$).

即数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$严格减少. 又已知$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$,从而,

$\forall\ n\in\mathbf{N}$,有$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$,两端取自然对数,有

$$1<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\quad 或 \quad \frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

其次证明数列$\{a_n\}$收敛,即证明数列$\{a_n\}$严格减少有下界.

事实上,$\forall\ n\in\mathbf{N}$,由已知的不等式,有

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n\\&=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0,\end{aligned}$$

即数列$\{a_n\}$严格减少. 再由已知的不等式,$\forall\ n\in\mathbf{N}$,有

$$\begin{aligned}a_n&=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\\&>\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n\\&=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n\\&=\ln 2+[\ln 3-\ln 2]+\cdots+[\ln(n+1)-\ln n]-\ln n\\&=\ln(n+1)-\ln n\\&=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>0,\end{aligned}$$

即数列$\{a_n\}$有下界. 根据公理,数列$\{a_n\}$存在极限. 设

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=c(常数).$$

20. 证明:若存在常数c,$\forall\ n\in\mathbf{N}$,有

$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|<c,$$

则数列$\{x_n\}$收敛.

证 设$y_n=|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|$. 显然,数列$\{y_n\}$单调增加有上界($c$是它的一个上界). 于是,数列$\{y_n\}$收敛. 根据柯西收敛准则,

$\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，$\forall p\in\mathbf{N}$，有 $|y_{n+p}-y_n|<\varepsilon$.

因为
$$
\begin{aligned}
|x_{n+p}-x_n| &= |x_n-x_{n+p}| \\
&= |x_n-x_{n+1}+x_{n+1}-x_{n+2} \\
&\quad +\cdots+x_{n+p-1}-x_{n+p}| \\
&\leqslant |x_{n+1}-x_n|+|x_{n+2}-x_{n+1}| \\
&\quad +\cdots+|x_{n+p}-x_{n+p-1}| \\
&= |y_{n+p}-y_n|<\varepsilon,
\end{aligned}
$$
所以数列$\{x_n\}$收敛.

21. 证明：若$\forall n\in\mathbf{N}$，有$|x_{n+1}-x_n|<c_n$，且$s_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$，而数列$\{s_n\}$收敛，则数列$\{x_n\}$也收敛.

证 已知数列$\{s_n\}$收敛，根据柯西收敛准则，

$\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，$\forall p\in\mathbf{N}$，有
$$|s_{n+p-1}-s_{n-1}|=c_n+c_{n+1}+\cdots+c_{n+p-1}<\varepsilon.$$
因为
$$
\begin{aligned}
|x_{n+p}-x_n| &= |x_{n+p}-x_{n+p-1}+x_{n+p-1}-\cdots-x_{n+1}+x_{n+1}-x_n| \\
&\leqslant |x_{n+1}-x_n|+|x_{n+2}-x_{n+1}|+\cdots+|x_{n+p}-x_{n+p-1}| \\
&< c_n+c_{n+1}+\cdots+c_{n+p-1}<\varepsilon,
\end{aligned}
$$
所以数列$\{x_n\}$也收敛.

22. 方程$x=m+\varepsilon\sin x\,(0<\varepsilon<1)$称为开普勒方程. 设
$$x_0=m,x_1=m+\varepsilon\sin x_0,\cdots,x_n=m+\varepsilon\sin x_{n-1},\cdots,$$
则数列$\{x_n\}$存在极限.

证 $\forall n\in\mathbf{N}$，有
$$
\begin{aligned}
|x_{n+1}-x_n| &= |(m+\varepsilon\sin x_n)-(m+\varepsilon\sin x_{n-1})| \\
&= |\varepsilon(\sin x_n-\sin x_{n-1})| \\
&= \left|2\varepsilon\sin\frac{x_n-x_{n-1}}{2}\cos\frac{x_n+x_{n-1}}{2}\right| \\
&= 2\varepsilon\left|\sin\frac{x_n-x_{n-1}}{2}\right|\left|\cos\frac{x_n+x_{n-1}}{2}\right|
\end{aligned}
$$

$$\leqslant 2\varepsilon\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{2}\right|$$
$$= \varepsilon|x_n - x_{n-1}|.$$

当 $n=1$ 时，$|x_2-x_1|\leqslant\varepsilon|x_1-x_0|$.

当 $n=2$ 时，$|x_3-x_2|\leqslant\varepsilon|x_2-x_1|\leqslant\varepsilon^2|x_1-x_0|$.

不难用归纳法证明，$\forall\ k\in\mathbf{N}$，有

$$|x_{k+1} - x_k| \leqslant \varepsilon^k|x_1 - x_0|.$$

若 $x_1=x_0$，则 $x_0=x_1=x_2=\cdots$，这是常数列. 显然，数列$\{x_n\}$存在极限.

若 $x_1\neq x_0$，有

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} + \cdots - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n|$$

$$\leqslant |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + \cdots + |x_{n+p} - x_{n+p-1}|$$

$$< (\varepsilon^n + \varepsilon^{n+1} + \cdots + \varepsilon^{n+p-1})|x_1 - x_0|$$

$$< \frac{|x_1 - x_0|}{1-\varepsilon}\varepsilon^n.$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon^n=0(0<\varepsilon<1)$，即

$\forall\ \delta>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，$\forall\ n>N$，有 $\varepsilon^n<\delta$. 从而，有

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{|x_1 - x_0|}{1-\varepsilon}\varepsilon^n < \frac{|x_1 - x_0|}{1-\varepsilon}\delta.$$

其中$\dfrac{|x_1-x_0|}{1-\varepsilon}$是正常数，根据柯西收敛准则，数列$\{x_n\}$存在极限.

23. 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=a$.

证 已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，即$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ m\in\mathbf{N}$，$\forall\ n>m$，有

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

取定自然数 m，设 $|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_m-a|=A$ 是正常数.

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A}{n}=0$，即对上述同样的 $\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$（使 $N>m$），$\forall n>N$，有 $\frac{A}{n}<\varepsilon$. 从而，有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)-a\right|\\ =&\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|\\ \leqslant&\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_m-a|}{n}\\ &+\frac{|a_{m+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}\\ \leqslant&\frac{A}{n}+\frac{n-m}{n}\varepsilon<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,\end{aligned}$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=a.$$

24. 证明：若 $\forall n\in\mathbf{N}$，有 $a_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a.$$

证 若 $a=0$，由第 23 题，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$. 由几何平均不超过算术平均，即

$$(0<)\ \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

再根据两边夹定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0.$$

若 $a>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a}$. 由第 23 题，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$$

与
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}=\frac{1}{a}$$

或
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=a.$$

又已知调和平均不超过几何平均，几何平均不超过算术平均，即

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

根据两边夹定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a.$$

并应用此结果验证：

(1) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a(a_n>0,n=1,2,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$.

证 令 $a_0=1$. 应用上面的结果，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_1}{a_0}}=a.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证 已知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n-1}=1$. $\forall\ n\geqslant2,a_n=\dfrac{n}{n-1}$. 令 $a_1=1$. 应用上面的结果，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdots\frac{2}{1}\cdot1}=1.$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

证 已知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$. 应用上面的结果，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}}=0.$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e.$

证 已知$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=e$,应用上面的结果,有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2}{1}\right)^1\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}=e.$$

于是,
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}-\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right)=e.$$

25. 证明:若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$与$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab.$$

证 设$b_n-b=\beta_n$或$b_n=b+\beta_n$,由已知,$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$.于是

$$\begin{aligned}&\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}\\&=\frac{a_1(b+\beta_n)+a_2(b+\beta_{n-1})+\cdots+a_n(b+\beta_1)}{n}\\&=b\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}+\frac{a_1\beta_n+a_2\beta_{n-1}+\cdots+a_n\beta_1}{n}.\end{aligned}$$

由第23题,有$\lim\limits_{n\to\infty}b\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=ab.$

下面证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1\beta_n+a_2\beta_{n-1}+\cdots+a_n\beta_1}{n}=0.$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,从而数列$\{a_n\}$有界,即

$$\exists\ M>0,\forall\ n\in\mathbf{N},有\ |a_n|\leqslant M.$$

又已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$,即$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ m\in\mathbf{N},\forall\ n>m$,有$|\beta_n|<\varepsilon$.

取定自然数m,显然,$|a_{n-m+1}\beta_m+a_{n-m+2}\beta_{m-1}+\cdots+a_n\beta_1|$有上界,设它的上界是$A$.

已知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A}{n}=0$,即对上述的$\varepsilon>0$,$\exists\ N\in\mathbf{N}$(使$N>m$),$\forall\ n>N$,有$\frac{A}{n}<\varepsilon$.从而,有

$$\left|\frac{a_1\beta_n + a_2\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_1}{n} - 0\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{a_1\beta_n + a_2\beta_{n-1} + \cdots + a_{n-m}\beta_{m+1}}{n}\right|$$

$$+ \left|\frac{a_{n-m+1}\beta_m + \cdots + a_n\beta_1}{n}\right|$$

$$\leqslant \frac{|a_1||\beta_n| + |a_2||\beta_{n-1}| + \cdots + |a_{n-m}||\beta_{m+1}|}{n} + \frac{A}{n}$$

$$\leqslant \frac{(n-m)M\varepsilon}{n} + \varepsilon \leqslant M\varepsilon + \varepsilon$$

$$= (M+1)\varepsilon,$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\beta_n + a_2\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_1}{n} = 0.$$

于是，
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} b\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

$$+ \lim_{n\to\infty}\frac{a_1\beta_n + a_2\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_1}{n}$$

$$= ab.$$

练习题 2.3

（《讲义》上册，第 79 页）

1. 证明下列极限：

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0$.

证 $\forall\ \varepsilon>0(0<\varepsilon<1)$，要使不等式

$$|2^x - 0| = 2^x < \varepsilon$$

成立，解得 $x<\log_2\varepsilon$. 取 $A=-\log_2\varepsilon(>0)$，于是

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ A = -\log_2\varepsilon > 0, \forall\ x < -A$，有 $|2^x - 0| < \varepsilon$，

即
$$\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0.$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}=0$.

证 $\forall\varepsilon>0$,要使不等式
$$\left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}-0\right|\leqslant\frac{1}{|x|}<\varepsilon\quad(x\neq 0)$$
成立,解得 $|x|>\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $A=\frac{1}{\varepsilon}$,于是
$$\forall\varepsilon>0,\exists A=\frac{1}{\varepsilon}>0,\forall x:|x|>A,有\left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon,$$
即
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}=0.$$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}=0$.

证 $\forall\varepsilon>0(0<\varepsilon<1)$,要使不等式
$$\left|2^{\frac{1}{x}}-0\right|=2^{\frac{1}{x}}<\varepsilon\quad(x<0)$$
成立,解得 $x>\frac{1}{\log_2\varepsilon}$. 取 $\delta=-\frac{1}{\log_2\varepsilon}(>0)$,于是
$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=-\frac{1}{\log_2\varepsilon}>0,\forall x:-\delta<x<0,有\left|2^{\frac{1}{x}}-0\right|<\varepsilon,$$
即
$$\lim_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}=0.$$

(8) $\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0$.

证 $\forall\varepsilon>0$,要使不等式
$$\left|\sqrt{x-2}-0\right|=\sqrt{x-2}<\varepsilon\quad(x>2)$$
成立. 解得 $x-2<\varepsilon^2$. 取 $\delta=\varepsilon^2$,于是
$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\varepsilon^2>0,\forall x:2<x<2+\delta,有$$
$$\left|\sqrt{x-2}-0\right|<\varepsilon,$$
即
$$\lim_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0.$$

* * * *

3. 证明下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\frac{1}{2}$.

证 设 $x>0$. $\forall\ \varepsilon>0$,要使不等式

$$\left|(\sqrt{x^2+x}-x)-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}-\frac{1}{2}\right|$$

$$=\left|\frac{x-\sqrt{x^2+x}}{2(\sqrt{x^2+x}+x)}\right|=\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{2(\sqrt{x^2+x}+x)}$$

$$<\frac{\sqrt{x^2+2x+1}-x}{2x}=\frac{1}{2x}<\varepsilon$$

成立. 从不等式$\frac{1}{2x}<\varepsilon$解得 $x>\frac{1}{2\varepsilon}$. 取 $A=\frac{1}{2\varepsilon}$,于是

$$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ A=\frac{1}{2\varepsilon}>0,\forall\ x>A,有$$

$$\left|(\sqrt{x^2+x}-x)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\frac{1}{2}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}$.

证 $\forall\ \varepsilon>0\left(0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}\right)$,要使不等式

$$\left|\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x<\varepsilon$$

成立,解得 $x>\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$. 取 $A=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$,于是

$$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ A=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)>0,\forall\ x>A,有$$

$$\left|\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to 1^-}\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}=\frac{\pi}{2}$.

证 $\forall\ \varepsilon>0\left(0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}\right)$，要使不等式

$$\left|\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}<\varepsilon\quad(x<1)$$

成立，解得 $1-x<\dfrac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}$. 取 $\delta=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}$，于是

$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}>0,\forall\ x:1-\delta<x<1$（或 $0<1-x<\delta$），有

$$\left|\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}-\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{x\to1}\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}=\frac{\pi}{2}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0.$

证 $\forall\ \varepsilon>0\left(0<\varepsilon<\frac{1}{2}\right)$，要使不等式

$$\left|\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0\right|=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}<\varepsilon\quad(x>0)$$

成立，解得 $x<\dfrac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)}$. 取 $\delta=\dfrac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)}$，于是

$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta=\dfrac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)}>0,\forall\ x:0<x<\delta$，有

$$\left|\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0\right|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0.$$

练习题 2.4

（《讲义》上册，第 93 页）

1. 证明：若当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)$ 存在极限，则极限唯一.

证 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$，且 $a\neq b$，即

$$\forall\ \varepsilon>0,\begin{cases}\exists\ A_1>0,\forall\ x>A_1，有\ |f(x)-a|<\varepsilon,\\ \exists\ A_2>0,\forall\ x>A_2，有\ |f(x)-b|<\varepsilon.\end{cases}$$

$$\exists\ A=\max\{A_1,A_2\}.\ 于是,\forall\ x>A，有$$

$$|a-b|\leqslant|a-f(x)|+|f(x)-b|<2\varepsilon.$$

已知 $|a-b|$ 是正常数，矛盾. 于是，$a=b$.

4. 用极限定义证明：若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b\neq0$，则 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{b}$.

证 已知 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$，即

$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ A_1>0,\forall\ x<-A_1$，有 $|f(x)-b|<\varepsilon$.

与 对 $\dfrac{|b|}{2}>0,\exists\ A_2>0,\forall\ x<-A_2$，有 $|f(x)-b|<\dfrac{|b|}{2}$. 从而，有

$$|b|-|f(x)|\leqslant|f(x)-b|<\frac{|b|}{2}\ 或\ |f(x)|>\frac{|b|}{2}.$$

$\exists\ A=\max\{A_1,A_2\}>0,\forall\ x<-A$，有

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{b}\right|=\frac{1}{|b||f(x)|}|f(x)-b|<\frac{2}{|b|^2}\varepsilon,$$

即
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{b}.$$

7. 证明：若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=b$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)g(x)=ab$.

证 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=b$，即

$$\forall\ \varepsilon>0,\begin{cases}\exists\ A_1>0,\forall\ x:|x|>A_1，有\ |f(x)-a|<\varepsilon,\\ \exists\ A_2>0,\forall\ x:|x|>A_2，有\ |g(x)-b|<\varepsilon.\end{cases}$$

$$\exists\ M>0,\exists\ A_3>0,\forall\ x:|x|>A_3，有\ |f(x)|\leqslant M.$$

$\exists A=\max\{A_1,A_2,A_3\}>0,\forall\ x:\ |x|>A$，有

$$|f(x)g(x)-ab|=|f(x)g(x)-bf(x)+bf(x)-ab|$$

$$\leqslant|f(x)||g(x)-b|+|b||f(x)-a|<(M+|b|)\varepsilon.$$

即
$$\lim_{x\to\infty}f(x)g(x)=ab.$$

8. 用极限定义证明定理 7 与定理 8.

定理 7. 若 $\forall\ x\in\mathring{U}(a)$，有 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，且

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}h(x)=b,$$

则
$$\lim_{x\to a}g(x)=b.$$

证 已知 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=b$，即

$$\forall\ \varepsilon>0,\begin{cases}\exists\ \delta_1>0,\forall\ x:0<|x-a|<\delta_1,\text{有}\\ \qquad |f(x)-b|<\varepsilon\text{ 或 }b-\varepsilon<f(x).\\ \exists\ \delta_2>0,\forall\ x:0<|x-a|<\delta_2,\text{有}\\ \qquad |h(x)-b|<\varepsilon\text{ 或 }h(x)<b+\varepsilon.\end{cases}$$

$\exists\ \delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0.\ \forall\ x:\ 0<|x-a|<\delta$，有

$$b-\varepsilon<f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)<b+\varepsilon,$$

或
$$|g(x)-b|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{x\to a}g(x)=b.$$

定理 8 证明从略.

9. 用不等式叙述下列符号的意义：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq A.$

答 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq A\Longleftrightarrow$

$\exists\ \varepsilon_0>0,\forall\ B>0,\exists\ x_0>B$，有 $|f(x_0)-A|\geqslant\varepsilon_0$.

(2) $\lim\limits_{x\to a^+}g(x)\neq B.$

答 $\lim\limits_{x\to a^+}g(x)\neq B\Longleftrightarrow$

$\exists\ \varepsilon_0>0,\forall\ \delta>0,\exists\ x_0:a<x_0<a+\delta$，有 $|g(x_0)-B|\geqslant\varepsilon_0$.

10. 写出极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 存在的柯西收敛准则及其否定叙述. 并证明(1),(2).

答 极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 存在的柯西收敛准则$\Longleftrightarrow$

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ A > 0, \forall\ x_1, x_2 > A$, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 存在的柯西收敛准则的否定叙述$\Longleftrightarrow$

$\exists\ \varepsilon_0 > 0, \forall\ A > 0, \exists\ x_1, x_2 > A$, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon_0$.

(1)证明:当 $x \to +\infty$ 时,函数 $\frac{\cos x}{x}$ 存在极限.

证 $\forall\ \varepsilon > 0, \forall\ x_1, x_2 > 0$, 且 $x_1 < x_2$, 要使不等式

$$\left|\frac{\cos x_1}{x_1} - \frac{\cos x_2}{x_2}\right| \leqslant \left|\frac{\cos x_1}{x_1}\right| + \left|\frac{\cos x_2}{x_2}\right| < \frac{2}{x_1} < \varepsilon$$

成立,从不等式 $\frac{2}{x_1} < \varepsilon$ 解得 $x_1 > \frac{2}{\varepsilon}$. 取 $A = \frac{2}{\varepsilon}$, 于是

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ A = \frac{2}{\varepsilon} > 0, \forall\ x_1, x_2 > A$, 有

$$\left|\frac{\cos x_1}{x_1} - \frac{\cos x_2}{x_2}\right| < \varepsilon,$$

即当 $x \to +\infty$ 时,函数 $\frac{\cos x}{x}$ 存在极限.

(2)证明:当 $x \to +\infty$ 时,函数 $\sin x$ 不存在极限.

证 当 n 充分大时, $n\pi$ 与 $n\pi + \frac{\pi}{2}$ 都充分大, 而 $\sin n\pi = 0$, $\left|\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right| = 1$. 从而 $\left|\sin n\pi - \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right| = 1$(正常数). 于是,

$$\exists\ \varepsilon_0 = 1, \forall\ A > \frac{\pi}{2}, \exists\ x_1 = n\pi, x_2 = n\pi + \frac{\pi}{2} > A\left(n > \frac{A}{\pi}\right), \text{有}$$

$$\left|\sin n\pi - \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right| = 1 = \varepsilon_0,$$

即当 $x \to +\infty$ 时,函数 $\sin x$ 不存在极限.

11. 证明:若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 是周期函数, 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, 则 $\forall\ x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x) = 0$(或 $f(x) \equiv 0$).

证 设函数 $f(x)$ 的周期是 $T>0$. 用反证法.

假设 $\exists x_0\in\mathbf{R}$, 使 $f(x_0)=a\neq 0$. 根据周期函数的性质, $\forall\ n\in\mathbf{N}$, 有

$$f(x_0+nT)=a\neq 0, \text{从而} \lim_{n\to\infty} f(x_0+nT)=a\neq 0.$$

根据海涅定理, 有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$. 与已知条件 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 矛盾, 即

$$\forall\ x\in\mathbf{R}, f(x)=0.$$

12. 求下列极限:

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

解 $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-10}=\frac{1}{8}.$$

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

解 $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)}{1+x+x^2}=-1.$$

(7) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

解 $$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{4}{3}.$$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{(a+bx)(c+dx)}-\sqrt{ac}}{x}$, $\quad ac\neq 0$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{(a+bx)(c+dx)}-\sqrt{ac}}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{(a+bx)(c+dx)}-\sqrt{ac})(\sqrt{(a+bx)(c+dx)}+\sqrt{ac})}{x(\sqrt{(a+bx)(c+dx)}+\sqrt{ac})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(a+bx)(c+dx)-ac}{x(\sqrt{(a+bx)(c+dx)}+\sqrt{ac})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(ad+bc)x+bdx^2}{x(\sqrt{(a+bx)(c+dx)}+\sqrt{ac})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ad+bc+bdx}{\sqrt{(a+bx)(c+dx)}+\sqrt{ac}}=\frac{ad+bc}{2\sqrt{ac}}.$$

(10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$，$m$ 与 n 是自然数.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1}=\frac{m}{n}.$$

13. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{4x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{8}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}(x+1)=2$.

(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

解 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\sin\dfrac{x-a}{2}\cos\dfrac{x+a}{2}}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}\cos\frac{x+a}{2}=\cos a.$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sin x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sin x}{\sin x}\,\dfrac{\sin x}{x}=1.$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+3}\right)^{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+3}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+3}\right)^{x+3}\left(1+\dfrac{1}{x+3}\right)^{-3}=e.$

(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\operatorname{ctg}x}}=e.$

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-2}{x^3+3}\right)^{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-2}{x^3+3}\right)^{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1-\dfrac{2}{x^3}\right)^{x^3}}{\left(1+\dfrac{3}{x^3}\right)^{x^3}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1-\dfrac{2}{x^3}\right)^{-\frac{x^3}{2}}\right]^{-2}}{\left[\left(1+\dfrac{3}{x^3}\right)^{\frac{x^3}{3}}\right]^{3}}=e^{-5}.$$

*　　*　　*　　*

14. 证明：若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 单调增加，且有界，则极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 都存在.

证 首先证明极限 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在.

在 (a,b) 内任取一个单调增加数列 $\{b_n\}$：$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n\leqslant\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. 已知 $f(x)$ 在 (a,b) 单调增加，又有上界，则

$$f(b_1)\leqslant f(b_2)\leqslant\cdots\leqslant f(b_n)\leqslant\cdots,$$

又 $\exists\ M>0,\forall\ n\in\mathbf{N}$，有 $f(b_n)\leqslant M$. 于是，数列 $\{f(b_n)\}$ 单调增加有上界. 根据公理，数列 $\{f(b_n)\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=B$（往证 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B$），即

$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N\in\mathbf{N},\forall\ n\geqslant N$，有 $B-\varepsilon<f(b_n)<B+\varepsilon$.

$\exists\ \delta=b-b_N>0$ 或 $b-\delta=b_N,\forall\ x:b-\delta=b_N<x<b$,

$\exists\ b_m>b_N$，使 $b-\delta=b_N<x\leqslant b_m<b$，从而，有

$$B-\varepsilon<f(b-\delta)=f(b_N)\leqslant f(x)\leqslant f(b_m)<B+\varepsilon$$

或
$$B-\varepsilon<f(x)<B+\varepsilon\Longleftrightarrow|f(x)-B|<\varepsilon,$$

即极限 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在.

同法可证，极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在.

15. 已知下列极限，确定 a 与 b：

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$.

解 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)\right]\left[\sqrt{x^2-x+1}+(ax+b)\right]}{\sqrt{x^2-x+1}+(ax+b)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-a^2)x^2-(1+2ab)x+(1-b^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}=0.$$

成立（分子的次数必低于一次），从而

$$1-a^2=0\quad\text{与}\quad 1+2ab=0.$$

从中解得 $\qquad a=\pm1,b=\mp\dfrac{1}{2}$.

当 $a=-1,b=\dfrac{1}{2}$ 时，极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-\dfrac{1}{2}\right)$ 不存在.

于是，$a=1,b=-\frac{1}{2}$.

16. 写出极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 的海涅定理，并给出证明.

答 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 的海涅定理：

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A \Longleftrightarrow$ 任意数列$\{a_n\}$，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$，有

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = A.$$

证 $\Rightarrow$已知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，即

$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ B>0, \forall\ x>B$，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

又已知$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$，即对上述的 $B>0, \exists\ N\in\mathbf{N}, \forall\ n>N$，有 $a_n>B$，从而

$$|f(a_n) - A| < \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=A$.

$\Leftarrow$用反证法. 假设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq A$，即

$\exists\ \varepsilon_0>0, \forall\ B>0, \exists\ a_0>B$，有$|f(a_0)-A|\geqslant\varepsilon_0$，

取 $B_1=1, \exists\ a_1>B_1=1$，有$|f(a_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$，

取 $B_2=2, \exists\ a_2>B_2=2$，有$|f(a_2)-A|\geqslant\varepsilon_0$，

……

取 $B_n=n, \exists\ a_n>B_n=n$，有$|f(a_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$，

…　…

于是，存在某个数列$\{a_n\}$，显然$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$，有$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)\neq A$. 与已知条件矛盾，即 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

17. 应用海涅定理证明：若函数 $f(x)$在(a,b)有定义，且单调增加，则$\forall\ x_0\in(a,b)$，极限 $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$与 $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$都存在，且

$$f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0).$$

证 首先证明$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0-0)\leqslant f(x_0)$.

在区间(a,x_0)内任取某个单调增加数列$\{a_n\}$，使$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_0$. 由已知条件，数列$\{f(a_n)\}$也是单调增加，且有上界（显然，$f(x_0)$就是$\{f(a_n)\}$的一个上界）. 根据公理，数列$\{f(a_n)\}$收敛，设$\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=B$，即

$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N\in\mathbf{N},\forall\ n\geqslant N$，有$|f(a_n)-B|<\varepsilon$.

证明$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=B$.

在区间(a,x_0)内任取数列$\{b_n\}$，使$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=x_0$.

已知$x_0>a_N,\exists\ m\in\mathbf{N},\forall\ n>m$，有$a_N<b_n<x_0$. 从而，$\forall\ n>m$，$\exists\ n_1,n_2\in\mathbf{N}$，且$n_1,n_2\geqslant N$，使$a_{n_1}<b_n\leqslant a_{n_2}$. 已知$f(x)$单调增加，有

$$f(a_{n_1})\leqslant f(b_n)\leqslant f(a_{n_2})$$

或
$$f(a_{n_1})-B\leqslant f(b_n)-B\leqslant f(a_{n_2})-B,$$

即
$$|f(b_n)-B|\leqslant\max\{|f(a_{n_1})-B|,|f(a_{n_2})-B|\}<\varepsilon.$$

于是，$\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=B$. 根据海涅定理，有

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0-0)=B.$$

因为$\forall\ n\in\mathbf{N}$，有$b_n<x_0$，所以$f(b_n)\leqslant f(x_0)$. 根据极限的保序性，有$\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=B\leqslant f(x_0)$，即

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0-0)=B\leqslant f(x_0).$$

同法可证，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0+0)\geqslant f(x_0)$.

于是，
$$f(x_0-0)\leqslant f(x_0)\leqslant f(x_0+0).$$

18. 证明：若函数$f(x)$在$[a,b]$严格增加，且$x_n\in(a,b)$，$n=1,2,\cdots$，有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(a)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证 用反证法. 假设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq a$，即

$\exists\ \varepsilon_0>0(a+\varepsilon_0<b),\forall\ K\in\mathbf{N},\exists\ n_k>K$，有$a+\varepsilon_0\leqslant x_{n_k}$.

已知$f(x)$在$[a,b]$严格增加，有

$$f(a)<f(a+\varepsilon_0)\leqslant f(x_{n_k}).$$

从而，有 $f(x_{n_k})-f(a)>f(a+\varepsilon_0)-f(a)=C$（正常数），即数列 $\{f(x_n)\}$ 的子数列 $\{f(x_{n_k})\}$ 不以 $f(a)$ 为极限. 从而，数列 $\{f(x_n)\}$ 也不以 $f(a)$ 为极限. 与已知条件矛盾. 于是，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

13. 用极限运算法则及定理，验证下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})=\dfrac{1}{1-x}\quad(|x|<1)$.

证 $(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$

$=(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$

$=(1-x^4)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})=\cdots$

$=(1-x^{2^{n+1}})$.

或 $$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}.$$

于是，$$\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1}{1-x}.\quad(|x|<1)$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{\sin x}{x}$.

证 $\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\cdot 2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$

$=2^{n-1}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\dfrac{x}{2^{n-1}}$

$=2^{n-2}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^{n-2}}\cdot\sin\dfrac{x}{2^{n-2}}=\cdots$

$=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=\sin x$.

或 $$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}.$$

于是，$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1.$

证 $\forall\, x \neq 0$，有

$$\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \leqslant \frac{1}{x}.$$

上述不等式每项乘 x，

当 $x>0$ 时，有 $\quad 1 - x < x\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant 1$；

当 $x<0$ 时，有 $\quad 1 \leqslant x\left[\frac{1}{x}\right] < 1 - x.$

根据两边夹定理，有

$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] = \frac{b}{a} \quad (a>0, b>0).$

证 $\forall\, x \neq 0$，有

$$\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] = \frac{x}{a}\left\{\frac{b}{x} - \left\{\frac{b}{x}\right\}\right\}$$

$$= \frac{b}{a} - \frac{x}{a}\left\{\frac{b}{x}\right\}.$$

已知 $\forall\, x \neq 0$，有 $\left|\left\{\frac{b}{x}\right\}\right| < 1$，即 $\left\{\frac{b}{x}\right\}$ 有界．于是

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] = \frac{b}{a} - \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{a}\left\{\frac{b}{x}\right\} = \frac{b}{a}.$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left[\frac{x}{a}\right]\frac{b}{x} = 0 \quad (a>0, b>0).$

证 $\quad \forall\, x: 0<x<a$，有 $0<\frac{x}{a}<1$．从而

$$\left[\frac{x}{a}\right] = 0.$$

于是，$\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{x}{a}\right]\frac{b}{x}=0$.

练习题　2.5

（《讲义》上册，第 102 页）

1. 将下列符号的意义用不等式叙述出来：

(1)　$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

答　$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \Longleftrightarrow \forall\ A>0, \exists\ \delta>0, \forall\ x: 0<|x-a|<\delta$，有

$$|f(x)|>A.$$

(2)　$\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=+\infty$.

答　$\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=+\infty \Longleftrightarrow \forall\ A>0, \exists\ \delta>0, \forall\ x: a<x<a+\delta$，有

$$g(x)>A.$$

(3)　$\lim\limits_{x\to \infty} h(x)=-\infty$.

答　$\lim\limits_{x\to \infty} h(x)=-\infty \Longleftrightarrow \forall\ A>0, \exists\ B>0, \forall\ x: |x|>B$，有

$$h(x)<-A.$$

(4)　$\lim\limits_{x\to +\infty} s(x)=-\infty$.

答　$\lim\limits_{x\to +\infty} s(x)=-\infty \Longleftrightarrow \forall\ A>0, \exists\ B>0, \forall\ x>B$，有

$$s(x)<-A.$$

(5)　$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$.

答　$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty \Longleftrightarrow \forall\ A>0, \exists\ \delta>0, \forall\ x: a-\delta<x<a$，有

$$f(x)<-A.$$

(6)　$\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=\infty$.

答　$\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=\infty \Longleftrightarrow \forall\ A>0, \exists\ B>0, \forall\ x<-B$，有

$$|g(x)|>A.$$

2. 证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+1}{x^2}=\infty$.

证 限定 $0<|x|<\dfrac{1}{6}$. $\forall A>0$,要使不等式

$$\left|\frac{3x+1}{x^2}\right|\geqslant\frac{1-3|x|}{|x|^2}>\frac{1}{2|x|^2}>A$$

成立,从不等式$\dfrac{1}{2|x|^2}>A$解得$|x|<\dfrac{1}{\sqrt{2A}}$. 取 $\delta=\min\left\{\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{\sqrt{2A}}\right\}$,于是

$\forall A>0,\exists\ \delta=\min\left\{\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{\sqrt{2A}}\right\}>0,\forall x:0<|x|<\delta$,有

$$\left|\frac{3x+1}{x^2}\right|>A,$$

即

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x+1}{x^2}=\infty.$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_2 x=-\infty$.

证 $\forall A>0$,要使不等式

$$\log_2 x<-A\qquad(x>0)$$

成立,解得 $x<2^{-A}$. 取 $\delta=2^{-A}$,于是

$\forall A>0,\exists\ \delta=2^{-A}>0,\forall x:0<x<\delta$,有 $\log_2 x<-A$,

即

$$\lim_{x\to 0^+}\log_2 x=-\infty.$$

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty\quad(a<1)$.

证 $\forall A>1$,要使不等式

$$a^x>A$$

成立,解得 $x<\log_a A$. 取 $B=-\log_a A$,于是

$\forall A>1,\exists\ B=-\log_a A>0,\forall x<-B$,有 $a^x>A$.

即

$$\lim_{x\to-\infty}a^x=+\infty.$$

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\operatorname{tg}x=+\infty$.

证 限定 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$. $\forall A>0$,要使不等式

$$\operatorname{tg} x > A$$

成立，解得 $x > \operatorname{arcctg} A = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} A$[1]. 取 $\delta = \operatorname{arcctg} A$，于是

$\forall A > 0, \exists \delta = \operatorname{arcctg} A > 0, \forall x: \frac{\pi}{2} - \delta < x < \frac{\pi}{2}$，有 $\operatorname{tg} x > A$，

即
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty.$$

3. 证明：若 $\lim_{x \to a} P(x) = +\infty$，$\lim_{x \to a} Q(x) = A$，则

$$\lim_{x \to a} [P(x) + Q(x)] = +\infty.$$

证 已知 $\lim_{x \to a} Q(x) = A$，根据§2.1定理2.

$\exists M > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall x: 0 < |x - a| < \delta_1$，有 $|Q(x)| \leqslant M$.

又已知 $\lim_{x \to a} P(x) = +\infty$，即

$\forall A > 0, \exists \delta_2 > 0, \forall x: 0 < |x - a| < \delta_2$，有 $P(x) > A + M$.

$\exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0, \forall x: 0 < |x - a| < \delta$，有

$P(x) + Q(x) \geqslant P(x) - |Q(x)| > A + M - M = A$.

即
$$\lim_{x \to a} [P(x) + Q(x)] = +\infty.$$

4. 证明：若 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$，$\lim_{x \to -\infty} g(x) = B$，则

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - g(x)] = \infty.$$

证 已知 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ 与 $\lim_{x \to -\infty} g(x) = B$，即

$\exists M > 0, \exists B_1 > 0, \forall x < -B_1$，有 $|g(x)| \leqslant M$.

$\forall A > 0, \exists B_2 > 0, \forall x < -B_2$，有 $|f(x)| > A + M$.

$\exists B = \max\{B_1, B_2\} > 0, \forall x < -B$，有

$|f(x) - g(x)| \geqslant |f(x)| - |g(x)| > A + M - M = A$.

即
$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - g(x)] = \infty.$$

6. 证明：当 $x \to a$ 时，符号 o 具有下列性质：

---

[1] $\forall x \in \mathbf{R}$，有 $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$，见高中《代数》(甲种本)第二册，第15页或《讲义》上册，第209页.

(1) $o[f(x)]\pm o[f(x)]=o[f(x)]$.

证 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{o[f(x)]\pm o[f(x)]}{f(x)}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{o[f(x)]}{f(x)}\pm\lim_{x\to a}\frac{o[f(x)]}{f(x)}=0,$$

即
$$o[f(x)]\pm o[f(x)]=o[f(x)].$$

(3) $o\{o[f(x)]\}=o[f(x)]$.

证 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{o\{o[f(x)]\}}{f(x)}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{o\{o[f(x)]\}}{o[f(x)]}\cdot\frac{o[f(x)]}{f(x)}=0,$$

即
$$o\{o[f(x)]\}=o[f(x)].$$

8. 证明：

(4) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=O\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)(x\to+\infty)$.

证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}\neq 0,$$

即
$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\quad(x\to+\infty).$$

(6) $x^n-1\sim n(x-1)(x\to 1)$.

证 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{n(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)}{n(x-1)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{n}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)=1.$$

即
$$x^n-1\sim n(x-1)(x\to 1).$$

* * * *

9. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 单调增加，存在数列 $\{a_n\}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=b$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$。

证 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=b$，即

$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N\in\mathbf{N},\forall\ n\geqslant N$，有 $|f(a_n)-b|<\varepsilon$。

在区间 $(a,+\infty)$ 内任取数列 $\{b_n\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$。

$\exists\ m\in\mathbf{N},\forall\ n>m$，有 $a_N<b_n$。从而，$\forall\ n>m,\exists\ n_1,n_2\in\mathbf{N}$，且 $n_1,n_2\geqslant N$，使 $a_{n_1}<b_n\leqslant a_{n_2}$。已知 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 单调增加，有

$$f(a_{n_1})\leqslant f(b_n)\leqslant f(a_{n_2})$$

或
$$f(a_{n_1})-b\leqslant f(b_n)-b\leqslant f(a_{n_2})-b.$$

即
$$|f(b_n)-b|\leqslant\max\{|f(a_{n_1})-b|,|f(a_{n_2})-b|\}<\varepsilon.$$

于是，$\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=b$。根据海涅定理，有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b.$$

10. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\Leftrightarrow$ 任意数列 $\{a_n\}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，有

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=+\infty.$$

证 $\Rightarrow$ 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，即

$\forall\ A>0,\exists\ B>0,\forall\ x>B$，有 $f(x)>A$。

又已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，对上述的 $B>0,\exists\ N\in\mathbf{N},\forall\ n>N$，有

$$a_n>B.\ \text{从而，有}\ f(a_n)>A.$$

即
$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=+\infty.$$

$\Leftarrow$ 用反证法。假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq+\infty$，即

$\exists\ A>0,\forall\ B>0,\exists\ a_0>B$，有 $f(a_0)\leqslant A$。

当 $B=1$ 时，$\exists\ a_1>1$，有 $f(a_1)\leqslant A$，

当 $B=2$ 时，$\exists\ a_2>2$，有 $f(a_2)\leqslant A$，

… …

当 $B=n$ 时，$\exists\ a_n>n$，有 $f(a_n)\leqslant A$，

$\cdots \qquad \cdots$

从而，构造一个数列$\{a_n\}$. 显然，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$，而数列$\{f(a_n)\}$却不是正无穷大($+\infty$)，矛盾. 于是，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

第三章 连续函数

练习题 3.1

（《讲义》上册，第 110 页）

1. 证明下列函数在其定义域连续：

(1) $f(x)=\sqrt[3]{x+4}$.

证 定义域是 $\mathbf{R}$，分两种情况证明：

1) $x_0=-4$. $\forall\ \varepsilon>0$，要使不等式

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|\sqrt[3]{x+4}\right|=\sqrt[3]{|x+4|}<\varepsilon$$

成立．解得 $|x+4|<\varepsilon^3$. 取 $\delta=\varepsilon^3$，于是

$\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta=\varepsilon^3>0$, $\forall\ x$: $|x-(-4)|=|x+4|<\delta$，有

$$\left|\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{-4+4}\right|<\varepsilon,$$

即函数 $f(x)=\sqrt[3]{x+4}$ 在 $x_0=-4$ 连续.

2) $\forall\ x_0\in\mathbf{R}$，且 $x_0\neq-4(x_0+4\neq0)$. $\forall\ \varepsilon>0$，要使不等式

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x_0+4}\right|$$

$$=\left|\frac{(x+4)-(x_0+4)}{(x+4)^{\frac{2}{3}}+(x+4)^{\frac{1}{3}}(x_0+4)^{\frac{1}{3}}+(x_0+4)^{\frac{2}{3}}}\right|$$

$$=\left|\frac{x-x_0}{(x+4)^{\frac{2}{3}}+(x+4)^{\frac{1}{3}}(x_0+4)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{4}(x_0+4)^{\frac{2}{3}}+\frac{3}{4}(x_0+4)^{\frac{2}{3}}}\right|$$

$$=\left|\frac{x-x_0}{\left[(x+4)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}(x_0+4)^{\frac{1}{3}}\right]^2+\frac{3}{4}(x_0+4)^{\frac{2}{3}}}\right|$$

$$\leqslant \frac{|x-x_0|}{\frac{3}{4}(x_0+4)^{\frac{2}{3}}} < \varepsilon$$

成立. 从不等式$\frac{|x-x_0|}{\frac{3}{4}(x_0+4)^{\frac{2}{3}}}<\varepsilon$解得$|x-x_0|<\frac{3}{4}(x_0+4)^{\frac{2}{3}}\varepsilon$.

取$\delta=\frac{3}{4}(x_0+4)^{\frac{2}{3}}\varepsilon$. 于是

$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta=\frac{3}{4}(x_0+4)^{\frac{2}{3}}\varepsilon>0, \forall\ x: |x-x_0|<\delta$, 有

$$\left|\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x_0+4}\right|<\varepsilon,$$

即函数$f(x)=\sqrt[3]{x+4}$在x_0连续.

综上所证, 函数$f(x)=\sqrt[3]{x+4}$在其定义域$\mathbf{R}$连续.

(2) $g(x)=\sin\frac{1}{x}$.

证 函数$g(x)$的定义域是$\mathbf{R}-\{0\}$, $\forall\ x_0\in\mathbf{R}-\{0\}$.

限定$|x-x_0|<\frac{|x_0|}{2}$, 有$|x_0|-|x|<\frac{|x_0|}{2}$或$|x|>\frac{|x_0|}{2}$.

$\forall\ \varepsilon>0$, 要使不等式

$$\begin{aligned}|g(x)-g(x_0)| &= \left|\sin\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x_0}\right| \\ &= \left|2\cos\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x_0}}{2}\sin\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{2}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right| = \frac{1}{|xx_0|}|x-x_0| \\ &< \frac{2}{|x_0|^2}|x-x_0| < \varepsilon\end{aligned}$$

成立. 从不等式$\frac{2}{|x_0|^2}|x-x_0|<\varepsilon$解得$|x-x_0|<\frac{|x_0|^2}{2}\varepsilon$. 取$\delta=\min\left\{\frac{|x_0|}{2}, \frac{|x_0|^2}{2}\varepsilon\right\}>0$. 于是,

$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta=\min\left\{\frac{|x_0|}{2}, \frac{|x_0|^2}{2}\varepsilon\right\}>0, \forall\ x: |x-x_0|<\delta$, 有

$$\left|\sin\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon,$$

即函数 $g(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x_0\neq 0$ 连续. 从而函数 $g(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}-\{0\}$ 连续.

2. 设 $f(a)$ 有意义,用"$\varepsilon-\delta$"语言叙述函数 $f(x)$ 在 a 不连续.

答 $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq f(a)\Longleftrightarrow\exists\ \varepsilon_0>0,\forall\ \delta>0,\exists\ x_0:|x_0-a|<\delta$,有

$$|f(x_0)-f(a)|\geqslant\varepsilon_0.$$

4. 证明:若 $f(x)$ 在区间 I 连续,且对任意有理数 $r\in I$,有 $f(r)=0$,则 $\forall\ x\in I$,有 $f(x)=0$.

证 已知对有理数 $r\in I$,有 $f(r)=0$.

任意无理数 $a\in I$,总存在区间 I 内的有理数列 $\{r_n\}$,使

$$\lim_{n\to\infty}r_n=a.$$

已知 $f(x)$ 在 I 连续,从而在无理数 $a\in I$ 也连续,有

$$f(a)=\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{n\to\infty}f(r_n)=0.$$

于是,$\forall\ x\in I$(不论 x 是有理数或是无理数),有 $f(x)=0$.

5. 证明:若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 单调增加,则 $f(x)$ 的间断点都是第一类间断点.

证 $\forall\ x_0\in(a,b)$,由练习题 2.4 第 17 题,极限

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)\text{ 与 }f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)$$

都存在,且有:$f(x_0-0)\leqslant f(x_0)\leqslant f(x_0+0)$. 因为 x_0 是 $f(x)$ 的间断点,所以函数 $f(x)$ 在 x_0 存在不相等的左右极限,则 x_0 必是第一类的间断点. 于是,单调增加函数 $f(x)$ 的间断点都是第一类间断点(显然,单调减少函数 $f(x)$ 的间断点也是第一类间断点).

6. 证明:若 $f(x)$ 是奇函数或偶函数,且 $f(x)$ 在 $a(\neq 0)$ 连续,则 $f(x)$ 在 $-a$ 也连续.

证 奇函数 $f(-x)=-f(x)$,偶函数 $f(-x)=f(x)$.

已知 $f(x)$ 在 a 连续,即

$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0,\forall\ x:|x-a|<\delta$,有 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

若 $f(x)$是奇函数，有

$$|f(-x)-f(-a)|=|-f(x)-[-f(a)]|$$
$$=|f(x)-f(a)|<\varepsilon;$$

若 $f(x)$是偶函数，有

$$|f(-x)-f(-a)|=|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

于是，$f(x)$在 $-a$ 也连续.

7. 求下列函数的间断点，并指出其类型：

(3) $y=\dfrac{x}{\sin x}$.

解 使 $\sin x=0$ 的点 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$都是它的间断点．有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1,\qquad \lim_{\substack{x\to k\pi\\(k\neq 0)}}\frac{x}{\sin x}=\infty.$$

于是，0 是它的可去间断点，而 $k\pi(k\in\mathbf{Z}$，且 $k\neq 0)$是它的第二类间断点.

(4) $y=\dfrac{1}{\ln|x|}$.

解 $x=0$ 和使 $\ln|x|=0$ 的 $x=\pm 1$ 都是它的间断点．有

$$\lim_{x\to\pm 1}\frac{1}{\ln|x|}=\infty,\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln|x|}=0.$$

于是，± 1 是它的第二类间断点，0 是它的可去间断点.

(6) $y=e^{-\frac{1}{x}}$.

解 0 是它唯一的间断点，有

$$\lim_{x\to 0^-}e^{-\frac{1}{x}}=+\infty,\qquad \lim_{x\to 0^+}e^{-\frac{1}{x}}=0.$$

于是，0 是它的第二类间断点.

(8) $y=\dfrac{\sin x}{|x|}$.

解 0 是它的唯一间断点，有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{-x}=-1.$$

于是，0 是它的第一类间断点.

8. 在下列函数中，A 取什么值，函数能连续开拓？

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4}, & x\neq 4,\\ A, & x=4.\end{cases}$

解 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}(x+4)=8.$

于是，$A=f(4)=8$，函数 $f(x)$ 在点 $x=4$ 能连续开拓.

(3) $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ A+2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

解 $\lim\limits_{x\to 0^-}e^x=1$，　$\lim\limits_{x\to 0^+}(A+2)=A+2.$

于是，$f(0)=1=A+2$，即 $A=-1$，函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 能连续开拓.

*　　*　　*　　*

9. 证明：若 $f(x)$ 在 $U(a)$ 有定义，且极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=A,$$

则 $f(x)$ 在 a 连续.

证 由已知 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=A$，即

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=A+\alpha(h),$$

其中 $\alpha(h)$ 是无穷小 $(h\to 0)$，或

$$f(a+h)=f(a)+A\cdot h+\alpha(h)\cdot h$$

$$\lim_{h\to 0}f(a+h)=f(a)+\lim_{h\to 0}A\cdot h+\lim_{h\to 0}\alpha(h)\cdot h=f(a),$$

即 $f(x)$ 在 a 连续.

10. 证明：若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 连续，$\forall\ c>0$，则函数

$$F(x)=\begin{cases}-c, & f(x)<-c,\\ f(x), & |f(x)|\leqslant c,\\ c, & f(x)>c\end{cases}$$

在 $\mathbf{R}$ 也连续.

函数 $y=F(x)$的图象如图 3. a.

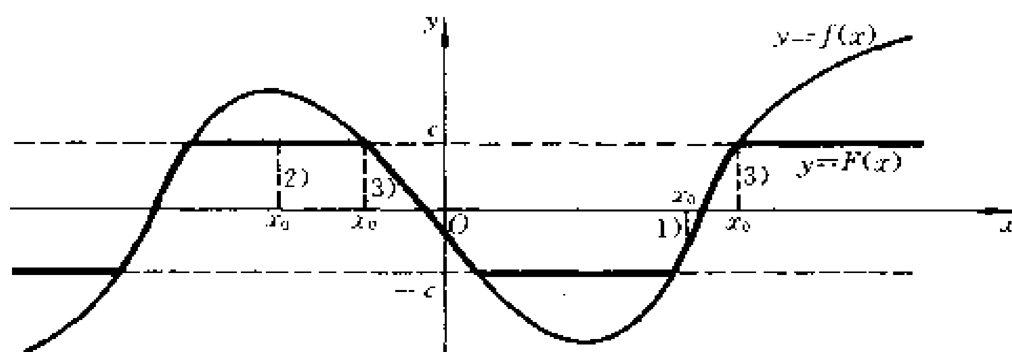


图 3. a

证法一

证　$\forall x_0\in\mathbf{R}$,分以下三种情况:

1)　$|f(x_0)|<c$. 已知 $f(x)$在 x_0 连续,即

$\forall \varepsilon>0,\exists \delta>0,\forall x:|x-x_0|<\delta$,有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,且 $|f(x)|<c$. 由函数 $f(x)$的定义,有

$$|F(x)-F(x_0)|=|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

即函数 $F(x)$在 x_0 连续.

2)　$|f(x_0)|>c,\exists \delta>0,\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$,有 $f(x)>c$ 或 $f(x)<-c$,如图 3. a. 由函数 $F(x)$的定义,$F(x)=c$ 或 $F(x)=-c$. 显然,函数 $F(x)$在 x_0 连续.

3)　$|f(x_0)|=c$,即 $f(x_0)=c$ 或 $f(x_0)=-c$. 不妨设 $f(x_0)=c$. 如图 3. a. 已知 $f(x)$在 x_0 连续,即

$\forall \varepsilon>0,\exists \delta>0,\forall x:|x-x_0|<\delta$,有 $c-\varepsilon<f(x)<c+\varepsilon$.

由函数 $F(x)$的定义,有 $c-\varepsilon<F(x)\leqslant c$. 于是

$$|F(x)-F(x_0)|=|F(x)-c|<\varepsilon.$$

即函数 $F(x)$在 x_0 连续.

同法可证,若 $f(x_0)=-c$,则 $F(x)$在 x_0 也连续.

综上所证,函数 $F(x)$在 $\mathbf{R}$ 连续.

证法二

证　$\forall x\in\mathbf{R}$,函数 $F(x)$可表为:

$$F(x)=\frac{1}{2}(|f(x)+c|-|f(x)-c|).$$

事实上，当 $f(x)<-c$ 时，即 $f(x)+c<0$，从而 $f(x)-c<0$，有

$$F(x)=\frac{1}{2}(-[f(x)+c]+[f(x)-c])=-c.$$

当 $|f(x)|\leqslant c$ 时，即 $-c\leqslant f(x)\leqslant c$，从而 $f(x)+c\geqslant 0$ 与 $f(x)-c\leqslant 0$，有

$$F(x)=\frac{1}{2}([f(x)+c]+[f(x)-c])=f(x).$$

当 $f(x)>c$ 时，即 $f(x)-c>0$，从而 $f(x)+c>0$，有

$$F(x)=\frac{1}{2}([f(x)+c]-[f(x)-c])=c.$$

根据 3.2 定理 1 和练习题 3.1 第 3 题，函数 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 连续.

11. 证明：黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x=\frac{m}{n}, \text{其中 } m\in\mathbf{Z}, n\in\mathbf{N}, (m,n)=1,\\ 1, & x=0,\\ 0, & x \text{ 是无理数}.\end{cases}$$

在任意有理点 x 不连续，在任意无理点 x 连续.

证 首先证明 $R(x)$ 在点 0 不连续.

$\exists\ \varepsilon_0=\frac{1}{2}>0$，$\forall\ \delta>0$，总存在无理数 x_0：$|x_0-0|<\delta$，有

$$|R(x_0)-R(0)|=|0-1|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

即 $R(x)$ 在点 0 不连续.

其次证明 $R(x)$ 在任意有理点 $x=\frac{m}{n}$（m,n 暂时固定，$m\neq 0$，$(m,n)=1$）不连续.

$\exists\ \varepsilon_0<\frac{1}{n}(\varepsilon_0>0)$，$\forall\ \delta>0$，总存在无理数 x_0：$\left|x_0-\frac{m}{n}\right|<\delta$，有

$$\left|R(x_0)-R\left(\frac{m}{n}\right)\right|=\frac{1}{n}>\varepsilon_0,$$

即 $R(x)$ 在有理点 $x=\frac{m}{n}$ 不连续.

最后证明 $R(x)$ 在任意无理点 α 都连续.

首先证明 $R(x)$ 在闭区间[0,1]的任意无理点 α 都连续.

由函数 $R(x)$ 的定义可知：$R(\alpha)=0$；$\forall\ \varepsilon>0$，$R(x)\geqslant\varepsilon$ 的点 x 在闭区间[0,1]上只有有限个(事实上，要 $R(x)\geqslant\varepsilon>0$，$x$ 必是有理数. 若 $x=\frac{p}{q}$，$R\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q}\geqslant\varepsilon$，则 $0\leqslant p<q\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$. 由此可见，满足此不等式的有理数 $\frac{p}{q}$ 只有有限个). 于是，$\exists\ \delta>0$，使 $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$ 不含有满足不等式 $R(x)\geqslant\varepsilon$ 的有理点 x，即

$\forall\ x\in(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$，有 $\quad |R(x)-R(\alpha)|=R(x)<\varepsilon$.

于是，$R(x)$ 在闭区间[0,1]内的无理点 α 都连续. 又因为 $R(x)$ 以 1 为周期(易证)，所以 $R(x)$ 在任意无理点都连续.

练习题 3.2

（《讲义》上册，第 121 页）

1. 证明：若函数 $f(x)$ 在 a 连续，且 $f(a)<0$. 则 $\exists\ \delta>0$，$\forall\ x$：$|x-a|<\delta$，有 $f(x)<0$.

证 已知 $f(x)$ 在 a 连续，且 $f(a)<0$，则

对 $-f(a)>0$，$\exists\ \delta>0$，$\forall\ x$：$|x-a|<\delta$，有

$|f(x)-f(a)|<-f(a)$，从而 $\quad f(x)<0$.

3. 证明：若函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 严格增加，且连续，则反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在点 $\alpha=f(a)$ 右连续，即

$$\lim_{y\to\alpha^+}f^{-1}(y)=f^{-1}(\alpha).$$

证 $\forall\ \varepsilon>0$（使 $a+\varepsilon<b$）. 设 $f(a+\varepsilon)=\beta$ 或 $a+\varepsilon=f^{-1}(\beta)$.

因为 $f(x)$ 严格增加，$f(a)=\alpha$，$f(a+\varepsilon)=\beta$，所以 $\alpha<\beta$.

$\exists\ \delta=\beta-\alpha>0$，$\forall\ y$：$\alpha<y<\alpha+\delta$ 或 $\alpha<y<\beta$. 已知反函数 $f^{-1}(y)$ 也是严格增加，以及定理 6（连续函数的介值性），有

$$f^{-1}(\alpha) < f^{-1}(y) < f^{-1}(\beta) = a + \varepsilon = f^{-1}(\alpha) + \varepsilon,$$

即
$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(\alpha)| < \varepsilon.$$

于是，反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $\alpha = f(a)$ 右连续，即

$$\lim_{y \to \alpha^+} f^{-1}(y) = f^{-1}(\alpha).$$

4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$，$a > 0$.

解 $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

$$= \lim_{x \to a^+} \frac{\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x-a}} + 1}{\sqrt{x+a}}$$

$$= \lim_{x \to a^+} \frac{\dfrac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a}) + 1}{\sqrt{x-a}(\sqrt{x} + \sqrt{a})}}{\sqrt{x+a}}$$

$$= \lim_{x \to a^+} \frac{\sqrt{x-a} + (\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})\sqrt{x+a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

(4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$.

解

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)\left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x} \right)}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1}=\frac{1}{2}.$$

(5) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{2x}}$

$=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\ln e=1$.

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right]}{\ln\left[x^{10}\left(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}}\right)\right]}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{10\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x}}{10+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}}\right)}{\ln x}}=\frac{1}{5}.$$

5. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$，则 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 有界.

证　已知 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=B$，则

$\exists\ \varepsilon_0=1>0, \exists\ \delta>0, \forall\ x: a<x<a+\delta$，有 $|f(x)-A|<1$

或　　$\forall\ x: a<x<a+\delta$，有 $|f(x)|<1+|A|$.

$\exists\ \varepsilon_0=1>0, \exists\ b>0$（使 $b>a+\delta$），$\forall\ x>b$，有 $|f(x)-B|<1$

或　　$\forall\ x>b$，有 $|f(x)|<1+|B|$.

而 $f(x)$ 在 $[a+\delta,b]$ 连续，根据定理 4，即

$\exists\ M>0, \forall\ x\in[a+\delta,b]$，有 $|f(x)|\leqslant M$.

于是，$\exists\ L=\max\{M,1+|A|,1+|B|\}>0, \forall\ x\in(a,+\infty)$，有

$$|f(x)|\leqslant L,$$

即 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 有界.

6. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 除一个（或有限个）第一类不连续点外连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界.

证　设 $f(x)$ 有一个第一类不连续点 $c\in(a,b)$，即极限

$$\lim_{x\to c^-} f(x) \qquad 与 \qquad \lim_{x\to c^+} f(x)$$

都存在，设 $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=A$ 与 $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=B$，即

$\exists\ \varepsilon_0=1>0, \exists\ \delta_1>0$（使 $a<c-\delta_1$），$\forall\ x: c-\delta_1<x<c$，有

$$|f(x)-A|<1 \quad 或 \quad |f(x)|<1+|A|.$$

同样，$\exists\ \varepsilon_0=1>0, \exists\ \delta_2>0$（使 $c+\delta_2<b$），$\forall\ x: c<x<c+\delta_2$，有

$$|f(x)-B|<1 \quad 或 \quad |f(x)|<1+|B|.$$

而函数 $f(x)$ 在 $[a,c-\delta_1]$ 与 $[c+\delta_2,b]$ 都连续. 根据定理 4，$f(x)$ 在 $[a,c-\delta_1]$ 与 $[c+\delta_2,b]$ 有界，即

$\exists\ M>0, \forall\ x\in[a,c-\delta_1]\cup[c+\delta_2,b]$，有

$$|f(x)|\leqslant M.$$

$\exists\ L=\max\{M,|f(c)|,1+|A|,1+|B|\}>0, \forall\ x\in[a,b]$，有

$$|f(x)|\leqslant L,$$

即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界.

有多于一个的有限个第一类不连续点情况：可将 $[a,b]$ 分成有限个小区间，使每个小区间上只有一个第一类不连续点. 上面已

证，函数 $f(x)$ 在每个小区间上都有界. 于是，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界.

7. 证明：若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $f(a)<g(a)$，$f(b)>g(b)$，则 $\exists\ c\in(a,b)$，使 $f(c)=g(c)$.

证 作辅助函数：

$$F(x)=f(x)-g(x).$$

显然，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且

$$F(a)=f(a)-g(a)<0 \quad 与 \quad F(b)=f(b)-g(b)>0.$$

根据引理(零点定理)，$\exists\ c\in(a,b)$，使 $F(c)=f(c)-g(c)=0$，即

$$f(c)=g(c).$$

8. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$，则 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 能取到最小值.

证 已知 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$，即

$\exists\ M=\max\{f(a),0\}\geqslant 0$，$\exists\ \delta>0$(使 $a<b-\delta$)，$\forall\ x$：$b-\delta<x<b$，有

$$f(x)\geqslant M.$$

显然，$f(x)$ 在闭区间 $[a,b-\delta]$ 连续，根据定理 5(最值性)，$f(x)$ 在 $[a,b-\delta]$ 取到最小值，设 $f(x)$ 在 $\xi\in[a,b-\delta]$ 取到最小值，则有 $f(\xi)\leqslant f(a)\leqslant M$. 于是，$\forall\ x\in[a,b)$，有

$$f(\xi)\leqslant f(x),$$

即函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 取到最小值.

9. 证明下列方程：

(2) $\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{7}{x-2}+\dfrac{16}{x-3}=0$ 在 $(1,2)$ 与 $(2,3)$ 至少各有一个实根.

证 设函数 $F(x)=\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{7}{x-2}+\dfrac{16}{x-3}$.

显然，函数 $F(x)$ 在开区间 $(1,2)$ 与 $(2,3)$ 都连续，且

$$\lim_{x\to 1^-}F(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{5}{x-1}+\frac{7}{x-2}+\frac{16}{x-3}\right)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 2} F(x) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{5}{x-1}+\frac{7}{x-2}+\frac{16}{x-3}\right) = -\infty.$$

不难证明，存在闭区间$[\alpha,\beta]\subset(1,2)$，使

$$F(\alpha) > 0 \text{ 与 } F(\beta) < 0.$$

根据零点定理，方程 $F(x)=\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{7}{x-2}+\dfrac{16}{x-3}=0$ 在闭区间$[\alpha,\beta]$，从而在$(1,2)$内至少有一个实根.

同法：

$$\lim_{x\to 2^-} F(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{5}{x-1}+\frac{7}{x-2}+\frac{16}{x-3}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 3} F(x) = \lim_{x\to 3}\left(\frac{5}{x-1}+\frac{7}{x-2}+\frac{16}{x-3}\right) = -\infty.$$

不难证明，存在闭区间$[\delta,\gamma]\subset(2,3)$，使

$$F(\delta) > 0 \quad \text{与} \quad F(\gamma) < 0.$$

根据零点定理，方程 $F(x)=\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{7}{x-2}+\dfrac{16}{x-3}=0$ 在闭区间$[\delta,\gamma]$，从而在$(2,3)$内至少有一个实根.

(4) $x-2\sin x=a(a>0)$至少有一个正实根.

证 设函数 $F(x)=x-2\sin x-a$. $F(0)=-a<0$.

$\exists\, n_0\in\mathbf{N}$，使 $n_0\pi>a$，有

$$F(n_0\pi) = n_0\pi - 2\sin n_0\pi - a = n_0\pi - a > 0.$$

根据零点定理，方程 $F(x)=x-2\sin x-a=0$ 在$(0,n_0\pi)$内至少有一实根，即方程 $x-2\sin x=a$ 至少有一个正实根.

10. 证明：若 $f(x)$与 $g(x)$在$[a,b]$连续，则函数

$F(x)=\max\{f(x),g(x)\}$与 $\Phi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$在$[a,b]$也连续.

证 已知$\forall\, x\in[a,b]$，有(见练习题 1.1 第 16 题的解答)

$$F(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\},$$

$$\Phi(x)=\min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\}.$$

根据定理 1 与练习题 3.1，第 3 题，以上二式等号右端的函数

在$[a,b]$连续. 于是，函数$F(x)$与$\Phi(x)$在$[a,b]$也连续.

11. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=0.$$

$$\left(\forall\ x>0,\ \left|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 1\right)$$

(2) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

解 $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin a+\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$

$$=\lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\cdot\frac{1}{\sin a}}$$

$$=e^{\frac{\cos a}{\sin a}}=e^{\operatorname{ctg}a}.\quad\left(\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\cos a\right)$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{2}\right]^{\frac{x}{2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}}\right]^{\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}}=e.$$

(4) $\lim\limits_{x\to0}(x+e^{x})^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}(x+e^{x})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left\{\left[1+(e^{x}-1+x)\right]^{\frac{1}{e^{x}-1+x}}\right\}^{\frac{e^{x}-1+x}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+(e^x-1+x)\right]^{\frac{1}{e^x-1+x}}\right\}^{\frac{e^x-1}{x}+1}$$

$$=e^{1+1}=e^2. \quad \left(\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\right)$$

(5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$ $\quad(a>0)$.

解 $\dfrac{a^x-x^a}{x-a}=\dfrac{a^x-a^a+a^a-x^a}{x-a}$

$$=\frac{a^x-a^a}{x-a}-\frac{x^a-a^a}{x-a}$$

$$=\frac{a^a(a^{x-a}-1)}{x-a}-\frac{e^{a\ln x}-e^{a\ln a}}{x-a}$$

$$=a^a\frac{a^{x-a}-1}{x-a}-\frac{e^{a\ln a}(e^{a(\ln x-\ln a)}-1)}{x-a}$$

$$=a^a\frac{a^{x-a}-1}{x-a}-a^a\frac{e^{a(\ln x-\ln a)}-1}{a(\ln x-\ln a)}\frac{a(\ln x-\ln a)}{x-a}.$$

已知 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{x-a}-1}{x-a}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{a^y-1}{y}=\ln a$, $\quad(y=x-a)$

$$\lim_{x\to a}\frac{e^{a(\ln x-\ln a)}-1}{a(\ln x-\ln a)}=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}$$

$$=\ln e=1.$$

$(y=a(\ln x-\ln a))$

又已知 $\quad\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}=\dfrac{1}{a}$.（§3.2 例 6）

于是，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}=a^a\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{x-a}-1}{x-a}$

$$-a^a\lim_{x\to a}\frac{e^{a(\ln x-\ln a)}-1}{a(\ln x-\ln a)}\cdot a\cdot\frac{\ln x-\ln a}{x-a}$$

$$=a^a\ln a-a^a\cdot a\cdot\frac{1}{a}=a^a(\ln a-1)$$

$$=a^a(\ln a-\ln e)=a^a\ln\frac{a}{e}.$$

13. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$，且 $t_1+t_2+\cdots+t_n=1$，$t_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $[a,b]$ 内至少存在一点 ξ，使

$$f(\xi)=t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n).$$

证 若$f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)$，则结论显然成立.

若$f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)$不全相等，设

$$\max\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}=f(x_k),$$

$$\min\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}=f(x_j).$$

不妨设$x_j<x_k$. 显然，$f(x)$在$[x_j,x_k]$连续，又有

$$f(x_j)<t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n)<f(x_k).$$

根据介值性定理，$\exists\ \xi\in[x_j,x_k]\subset(a,b)$，使

$$f(\xi)=t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n).$$

14. 证明：若函数$f(x)$在(a,b)单调，且$f(x)$取到$f(a+0)$与$f(b-0)$中间所有的数，则$f(x)$在(a,b)连续.

证 不妨设$f(x)$在(a,b)单调增加. 用反证法.

假设$f(x)$在(a,b)不连续，即$f(x)$在(a,b)内至少有一个间断点$c\in(a,b)$. 由练习题3.1第5题知，c必是第一类间断点，即$f(c-0)$与$f(c+0)$都存在，且$f(c-0)\neq f(c+0)$. 已知$f(x)$在(a,b)单调增加，有

$$f(a+0)\leqslant f(c-0)<f(c+0)\leqslant f(b-0).$$

于是，$f(x)$取不到$f(c+0)$与$f(c-0)$之间除$f(c)$外的所有数，即$f(x)$取不到$f(a+0)$与$f(b-0)$中间所有数，与已知条件矛盾，即函数$f(x)$在(a,b)连续.

15. 证明：若函数$f(x)$在$[a,b]$连续，且非常数，则函数值集合$A=\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$是一个闭区间$[m,M]$，其中m与M分别是$f(x)$在$[a,b]$的最小值和最大值.

分析 证明函数值集合$\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$是闭区间$[m,M]$，即往证这两个数集相等：$\{f(x)\mid x\in[a,b]\}=[m,M]$.

证 一方面，$\forall\ x\in[a,b]$，有$m\leqslant f(x)\leqslant M$，即

$$\{f(x)\mid x\in[a,b]\}\subset[m,M];$$

另一方面，已知$f(x)$在$[a,b]$连续，根据定理6(介值性)，$\forall\ \xi\in[m,M]$，则$\exists\ c\in[a,b]$，使

$$f(c)=\xi,$$

即 $$[m,M]\subset\{f(x)\mid x\in[a,b]\}.$$
于是, $$\{f(x)\mid x\in[a,b]\}=[m,M].$$

16. 证明:若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$连续,且函数值集合也是$[a,b]$,则至少存在一点 $x_0\in[a,b]$,使 $f(x_0)=x_0$,即至少有一个不动点 x_0.

证 考虑函数 $F(x)=f(x)-x$. 显然,$F(x)$在$[a,b]$连续.

若 $F(a)=f(a)-a=0$ 或 $F(b)=f(b)-b=0$,则 $x_0=a$ 或$x_0=b$ 结论成立.

若 $F(a)\neq0$,同时 $F(b)\neq0$,有

$F(a)=f(a)-a>0$,同时 $F(b)=f(b)-b<0$(否则,$f(a)-a<0$,即 $f(a)<a$,与函数值集合也是$[a,b]$矛盾;同理,若 $f(b)-b>0$,也存在矛盾.)根据零点定理,$\exists\ x_0\in(a,b)$,使

$$F(x_0)=0 \qquad 或 \qquad f(x_0)=x_0.$$

于是,至少存在一点 $x_0\in[a,b]$,使 $f(x_0)=x_0$.

17. 证明:若$\forall\ x,y\in\mathbf{R}$,有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,且 $f(x)$在 0 连续,则函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 连续,且 $f(x)=ax$,其中 $a=f(1)$是常数.

证 $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)$,从而 $f(0)=0$.

$\forall\ x_0,x\in\mathbf{R}$,有

$$f(x)=f(x-x_0+x_0)=f(x-x_0)+f(x_0).$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}f(x)&=\lim_{x\to x_0}f(x-x_0)+f(x_0)\\&=\lim_{y\to0}f(y)+f(x_0)\\&=f(0)+f(x_0)=f(x_0).\end{aligned}$$

即 $f(x)$在 x_0 连续. 于是,$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 连续.

$\forall\ n\in\mathbf{N},\forall\ b\in\mathbf{R}$,有

$f(nb)=f[(n-1)b+b]=f[(n-1)b]+f(b)=\cdots=nf(b)$;

$f(b)=f\left(\dfrac{n}{n}b\right)=f\left(n\dfrac{b}{n}\right)=nf\left(\dfrac{b}{n}\right)$ 或 $f\left(\dfrac{b}{n}\right)=\dfrac{1}{n}f(b)$.

于是,$\forall\ n,m\in\mathbf{N}$,有 $f\left(\dfrac{m}{n}b\right)=\dfrac{m}{n}f(b)$.

同时由题设

$$0=f(0)=f(b-b)=f(b)+f(-b)\text{或} f(-b)=-f(b).$$

于是，$\forall\ r\in\mathbf{Q}$，有 $\quad f(rb)=rf(b).$

$\forall\ \alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$（即 α 是无理数），存在有理数列$\{r_n\}$，

使 $\quad\lim\limits_{n\to\infty}r_n=\alpha$，已知 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 连续，有

$$\begin{aligned}f(\alpha b)&=f(b\cdot\lim_{n\to\infty}r_n)=\lim_{n\to\infty}f(r_nb)\\&=\lim_{n\to\infty}r_nf(b)=\alpha f(b).\end{aligned}$$

于是，$\forall\ x\in\mathbf{R}$，有 $f(bx)=xf(b)$.

令 $b=1$，有 $\qquad f(x)=f(1)\cdot x=ax,$

其中 $a=f(1)$是常数.

第四章　实数的连续性

练习题　4.1

（《讲义》上册，第 136 页）

1. 指出下列数集的上确界与下确界(如果存在)，并验证之：

(4)　$\left\{(-1)^{n+1}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\middle|n=1,2,\cdots\right\}$.

解　从观察中不难看到：

$$\sup\left\{(-1)^{n+1}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\middle|n=1,2,\cdots\right\}=1,$$

$$\inf\left\{(-1)^{n+1}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\middle|n=1,2,\cdots\right\}=-1.$$

事实上，①$\forall\ n\in\mathbf{N}$，有$(-1)^{n+1}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\leqslant 1$；

②$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ n_0=2k-1\in\mathbf{N}$，要使

$$1-\varepsilon<(-1)^{2k}\left(1-\frac{1}{3^{2k-1}}\right)=1-\frac{1}{3^{2k-1}}$$

或 $\frac{1}{3^{2k-1}}<\varepsilon$，只须 $k>\frac{1}{2}\left(1+\log_3\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(有\ n_0>\log_3\frac{1}{\varepsilon}\right)$即可.

于是　$$\sup\left\{(-1)^{n+1}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\middle|n=1,2,\cdots\right\}=1.$$

①$\forall\ n\in\mathbf{N}$，有$-1\leqslant(-1)^{n+1}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$；

②$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ n_0=2k\in\mathbf{N}$，要使

$$(-1)^{2k+1}\left(1-\frac{1}{3^{2k}}\right)=\frac{1}{3^{2k}}-1<-1+\varepsilon$$

或$\frac{1}{3^{2k}}<\varepsilon$，只须 $k>\frac{1}{2}\log_3\frac{1}{\varepsilon}\left(有\ n_0>\log_3\frac{1}{\varepsilon}\right)$即可.

于是 $$\sin f\left\{(-1)^{n+1}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\middle|n=1,2,\cdots\right\}=-1.$$

(5) $\{x\,|\,x$ 是有理数，$x^2<2\}$.

解 x 是有理数，$x^2<2\Longleftrightarrow|x|<\sqrt{2}\Longleftrightarrow-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$.

从观察中不难看到：

$\sup\{x\,|\,x$ 是有理数，$x^2<2\}=\sqrt{2}$.

$\inf\{x\,|\,x$ 是有理数，$x^2<2\}=-\sqrt{2}$.

事实上，①任意有理数 x，$x^2<2$，有 $x\leqslant\sqrt{2}$；

②$\forall\ \varepsilon>0$，由有理数的稠密性，存在有理数 x_0，有

$$\sqrt{2}-\varepsilon<x_0<\sqrt{2}.$$

于是， $\sup\{x\,|\,x$ 是有理数，$x^2<2\}=\sqrt{2}$.

同法可证，$\inf\{x\,|\,x$ 是有理数，$x^2<2\}=-\sqrt{2}$.

(6) $\{x^2\,|-1<x\leqslant2\}$.

解 从观察中不难看到：

$$\sup\{x^2\,|-1<x\leqslant2\}=4,\qquad\inf\{x^2\,|-1<x\leqslant2\}=0.$$

事实上，①$\forall\ x:-1<x\leqslant2$，有 $x^2\leqslant4$；

②$\forall\ \varepsilon>0(\varepsilon<4)$，$\exists\ x_0:1<x_0\leqslant2$，有 $4-\varepsilon<x_0^2$（只须 $\sqrt{4-\varepsilon}<x_0$）.

于是 $$\sup\{x^2\,|-1<x\leqslant2\}=4.$$

①$\forall\ x:-1<x\leqslant2$，有 $0\leqslant x^2$；

②$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ x_0:-1<x_0\leqslant2$，有 $x_0^2<0+\varepsilon$（只须 $|x_0|<\sqrt{\varepsilon}$）.

于是 $$\inf\{x^2\,|-1<x\leqslant2\}=0.$$

(8) $\{\sin x\,|\,x\in(0,2\pi]\}$.

解 从观察中不难看到：

$\sup\{\sin x\,|\,x\in(0,2\pi]\}=1$， $\inf\{\sin x\,|\,x\in(0,2\pi]\}=-1$.

事实上，①$\forall\ x\in(0,2\pi]$，有 $\sin x\leqslant1$；

②$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\subset(0,2\pi)$，有 $1-\varepsilon<\sin x_0$（只须

$\arcsin(1-\varepsilon)<x_0$).

于是 $$\sup\{\sin x \mid x\in(0,2\pi]\}=1.$$

同法可证， $$\inf\{\sin x \mid x\in(0,2\pi]\}=-1.$$

5. 证明：若 A 是非空有界数集，$\sup A=a$（或 $\inf A=b$），且 $-A=\{-x \mid x\in A\}$，则 $\inf(-A)=-a$（或 $\sup(-A)=-b$）.

证 已知 $\sup A=a$，即

①$\forall\ x\in A$，有 $x\leqslant a$；②$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ x_0\in A$，有 $a-\varepsilon<x_0$.

从而，①$\forall\ (-x)\in -A$，有 $-a\leqslant -x$；

②$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ (-x_0)\in -A$，有 $-x_0<-a+\varepsilon$.

即 $$\inf(-A)=-a.$$

同法可证， $$\sup(-A)=-b.$$

6. 证明：若数集 E 有下界，则数集 E 必有下确界.

证法一 应用闭区间套定理，仿照定理 2 证明，从略.

证法二 应用定理 2 和第 5 题结果.

证 已知数集 E 有下界，从而数集 $-E$ 必有上界. 根据定理 2，数集 $-E$ 存在上确界，设

$$\sup(-E)=-b.$$

再由第 5 题，有 $\inf E=b$，即数集 E 有下确界.

7. 证明：若 A 与 B 是两个非空数集，且 $\forall\ x\in A$ 与 $\forall\ y\in B$，有 $x\leqslant y$，则 $\sup A\leqslant\inf B$.

证 设 $\sup A=a$，$\inf B=b$. 用反证法.

假设 $\sup A>\inf B$，即 $b<a$. 有 $b<\dfrac{a+b}{2}<a$.

一方面，$\dfrac{a+b}{2}<a=\sup A$，则 $\exists\ x_0\in A$，有 $\dfrac{a+b}{2}<x_0$；

另一方面，$b=\inf B<\dfrac{a+b}{2}$，则 $\exists\ y_0\in B$，有 $y_0<\dfrac{a+b}{2}$.

于是，$\exists\ x_0\in A$ 与 $y_0\in B$，有

$$y_0<\frac{a+b}{2}<x_0,$$

与已知条件矛盾，即 $\sup A \leqslant \inf B$.

8. 证明：若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 单调增加，且 $\forall x \in (a,b)$，有 $f(x) \leqslant M$（其中 M 是常数），则 $\exists c \leqslant M$，使

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = c.$$

证 已知数集 $\{f(x) \mid x \in (a,b)\}$ 有上界. 根据定理 2，数集 $\{f(x) \mid x \in (a,b)\}$ 存在上确界，设

$$\sup\{f(x) \mid x \in (a,b)\} = c \leqslant M.$$

往证 c 是函数 $f(x)$ 在 b 的左极限（$\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = c$）.

根据上确界的定义，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists x_0 \in (a,b)$，使 $c - \varepsilon < f(x_0) \leqslant c$.

$\exists \delta = b - x_0 > 0$，$\forall x: b - \delta < x < b$ 或 $\forall x: x_0 < x < b$，有

$$c - \varepsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant c \quad \text{或} \quad |f(x) - c| < \varepsilon.$$

即

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = c.$$

注 本题与练习题 2.4 第 14 题与第 17 题基本相同，但证明方法不同，即找到极限 c 的方法不同. 这里是应用确界定理，而那里却应用公理.

9. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $\forall x \in [a,b]$，有 $f(x) > 0$，则 $\exists r > 0$，$\forall x \in [a,b]$，有 $f(x) > r$.

证法一 应用 §3.2 定理 5（最值性）.

证 已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，根据定理 5，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 取到最小值 m，即 $\exists x_0 \in [a,b]$，$\forall x \in [a,b]$，有

$$f(x) \geqslant f(x_0) = m.$$

已知 $\forall x \in [a,b]$，有 $f(x) > 0$，则 $f(x_0) = m > 0$. 于是，$\exists r = \dfrac{m}{2} > 0$，$\forall x \in [a,b]$，有 $f(x) > r$.

证法二 应用有限覆盖定理.

证 根据连续函数的保号性，$\forall y \in [a,b]$，且 $\dfrac{f(y)}{2} > 0$，

$\exists \delta_y > 0$，$\forall x \in (y - \delta_y, y + \delta_y) \cap [a,b]$，有 $f(x) > \dfrac{f(y)}{2}$.

显然，开区间集$\{(y-\delta_y, y+\delta_y) \mid y\in[a,b]\}$覆盖闭区间$[a,b]$。根据有限覆盖定理，存在$n$个（有限个）开区间：

$$\{(y_i-\delta_{y_i}, y_i+\delta_{y_i}) \mid y_i\in[a,b], i=1,2,\cdots,n\}$$

也覆盖闭区间$[a,b]$。$\forall x\in(y_i-\delta_{y_i}, y_i+\delta_{y_i})\cap[a,b]$，有$f(x)>\frac{f(y_i)}{2}$，$i=1,2,\cdots,n$。取

$$m=\min\{f(y_i) \mid i=1,2,\cdots,n\}>0.$$

从而，$\forall x\in[a,b]$，$\exists y_k\in[a,b]$，使$x\in(y_k-\delta_{y_k}, y_k+\delta_{y_k})$，有

$$f(x)>\frac{m}{2}.$$

于是，取$r=\frac{m}{2}>0$，则$\forall x\in[a,b]$，有$f(x)>r$。

10. 证明：ξ是E的聚点$\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists x\in E$，有$x\in\mathring{U}(\xi,\varepsilon)$。

证 $\Rightarrow$显然.

$\Leftarrow$取$\varepsilon_1=1$，$\exists x_1\in E$，有$x_1\in\mathring{U}(\xi,1)$。显然，$x_1\neq\xi$，

取$\varepsilon_2=\min\left\{\frac{1}{2},|x_1-\xi|\right\}>0$，$\exists x_2\in E$，有$x_2\in\mathring{U}(\xi,\varepsilon_2)$。显然，$x_2$不同于$\xi$与$x_1$，

取$\varepsilon_3=\min\left\{\frac{1}{3},|x_2-\xi|\right\}>0$，$\exists x_3\in E$，有$x_3\in\mathring{U}(\xi,\varepsilon_3)$。显然，$x_3$不同于$\xi$与$x_1,x_2$，

$\cdots\qquad\cdots$

取$\varepsilon_n=\min\left\{\frac{1}{n},|x_{n-1}-\xi|\right\}>0$，$\exists x_n\in E$，有$x_n\in\mathring{U}(\xi,\varepsilon_n)$。显然，

x_n不同于ξ与$x_1,x_2\cdots,x_{n-1}$，

$\cdots$

于是，得到数集E的无限点集$\{x_n \mid n\in\mathbf{N}\}$，$\forall i,j\in\mathbf{N}$，且$i\neq j$，有$x_i\neq x_j$。显然$\{x_n\}$是一个收敛数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$。于是，$\forall\varepsilon>0$，则点$\xi$的$\varepsilon$邻域$U(\xi,\varepsilon)$都含有$E$的无限多个点$x_n$，即$\xi$是$E$的聚点.

* * * *

11. 证明：若 E 是非空有上界数集，设 $\sup E=a$，且 $a\notin E$，则存在数列 $x_n\in E$，$x_n<x_{n+1}$，$n\in\mathbf{N}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证 已知 $\sup E=a$，由确界定义，

$\varepsilon_1=1$，$\exists\ x_1\in E$，有 $\quad a-\varepsilon_1<x_1<a$，

$\varepsilon_2=\min\left\{\dfrac{1}{2},a-x_1\right\}>0$，$\exists\ x_2\in E$，有 $x_1<x_2$，并且 $a-\varepsilon_2<x_2<a$，

$\varepsilon_3=\min\left\{\dfrac{1}{3},a-x_2\right\}>0$，$\exists\ x_3\in E$，有 $x_2<x_3$，并且 $a-\varepsilon_3<x_3<a$，

… …

于是，得到数列 $\{x_n\}$，$x_n\in E$，$x_n<x_{n+1}$，$\forall\ n\in\mathbf{N}$. 显然，有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

12. 证明：若 A 与 B 是两个非空数集，$A+B=\{x+y\mid x\in A,y\in B\}$，则

$$\sup(A+B)=\sup A+\sup B.$$

证 设 $\sup A=a$ 与 $\sup B=b$. 由确界定义，

① $\forall\ x\in A$，有 $x\leqslant a$；$\forall\ y\in B$，有 $y\leqslant b$，即

$\forall\ (x+y)\in A+B$，有 $x+y\leqslant a+b$；

② $\forall\ \dfrac{\varepsilon}{2}>0$，$\exists\ x_0\in A$，有 $a-\dfrac{\varepsilon}{2}<x_0$；$\forall\ \dfrac{\varepsilon}{2}>0$，$\exists\ y_0\in B$，有 $b-\dfrac{\varepsilon}{2}<y_0$，即

$$\forall\ \varepsilon=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}>0,\exists\ (x_0+y_0)\in A+B,$$

$$\text{有 } a+b-\varepsilon<x_0+y_0.$$

于是，$$\sup(A+B)=a+b=\sup A+\sup B.$$

13. 证明：
$$\sup\{a_n+b_n\}\leqslant\sup\{a_n\}+\sup\{b_n\}.$$
$$\inf\{a_n+b_n\}\geqslant\inf\{a_n\}+\inf\{b_n\}.$$

证 $\forall\ n\in\mathbf{N}$，有

$$a_n\leqslant\sup\{a_n\}\quad\text{与}\quad b_n\leqslant\sup\{b_n\}.$$

从而，$\forall\ n\in\mathbf{N}$，有 $\qquad a_n+b_n\leqslant\sup\{a_n\}+\sup\{b_n\}$，

即数 $\sup\{a_n\}+\sup\{b_n\}$ 是数集 $\{a_n+b_n\}$ 的上界. 于是

$$\sup\{a_n+b_n\}\leqslant\sup\{a_n\}+\sup\{b_n\}.$$

同法可证， $\qquad \inf\{a_n+b_n\}\geqslant\inf\{a_n\}+\inf\{b_n\}$.

14. 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，$0<x\leqslant1$，$\forall\ a\in(0,1]$，都存在开区间 I_a，当 $\forall\ x\in I_a$，有 $|f(x)-f(a)|<\frac{1}{3}$，则开区间集 $\{I_a\,|\,a\in(0,1]\}$ 覆盖 $(0,1]$，但是没有有限个 I_a 覆盖 $(0,1]$.

证 用反证法 假设开区间集 $\{I_a\,|\,a\in(0,1]\}$ 有 n 个（有限个）开区间 $\{I_{a_i}\,|\,i=1,2,\cdots,n\}$ 覆盖 $(0,1]$.

$\forall\ i\in\{1,2,\cdots,n\}$，$\forall\ x\in I_{a_i}$，有 $|f(x)-f(a_i)|<\frac{1}{3}$

或 $\quad |f(x)|=|f(x)-f(a_i)+f(a_i)|$

$$\leqslant|f(x)-f(a_i)|+|f(a_i)|<\frac{1}{3}+|f(a_i)|\quad（常数）.$$

即函数 $f(x)$ 在 I_{a_i} 有界.

$$\exists\ M=\max\{|f(a_1)|,|f(a_2)|,\cdots,|f(a_n)|\}+\frac{1}{3}>0.$$

于是，$\forall\ x\in(0,1]$，$\exists\ I_{a_i}\in\{I_{a_i}\,|\,i=1,2,\cdots,n\}$，$x\in I_{a_i}$，有 $|f(x)|=\frac{1}{x}\leqslant M$，即函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 有上界. 但是已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 无上界，矛盾，即开区间集 $\{I_a\,|\,a\in(0,1]\}$ 没有有限个 I_a 覆盖 $(0,1]$.

15. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且零点集

$$G=\{x\,|\,f(x)=0\}\neq\varnothing,$$

则 $\sup G\in G$，$\inf G\in G$.

证 零点集 $G\subset[a,b]$，即 G 既有上界又有下界，设

$$\sup G=p\quad 与\quad \inf G=q.$$

往证 $\quad p\in G$ 与 $q\in G$，即往证 $f(p)=0$ 与 $f(q)=0$.

如果 G 有最大数，最大数就是 $p=\sup G$，则 $f(p)=0$.

如果 G 没有最大数，则 G 必是无限集. 已知 $\sup G = p$. 由上确界定义，

$\varepsilon = 1$，$\exists\ x_1 \in G$，有 $\quad p - 1 < x_1 < p$，

$\varepsilon = \frac{1}{2}$，$\exists\ x_2 \in G$，有 $\quad p - \frac{1}{2} < x_2 < p$，

… …

$\varepsilon = \frac{1}{n}$，$\exists\ x_n \in G$，有 $\quad p - \frac{1}{n} < x_n < p$，

… …

于是，得到 G 中的数列 $\{x_n\}$（$\forall\ n \in \mathbf{N}, x_n \in G$），即 $f(x_n) = 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p \in [a, b]$. 已知函数 $f(x)$ 在 p 的连续性，又根据海涅定理，有

$$f(p) = \lim_{x\to p} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0,$$

即 $\quad p = \sup G \in G$.

同法可证， $\quad q = \inf G \in G$.

16. 用闭区间套定理证明聚点定理.

聚点定理 有界无限点集 E 至少有一个聚点 ξ.

证 因为点集 E 有界，所以存在闭区间 $[a_1, b_1]$，使

$$E \subset [a_1, b_1].$$

将闭区间 $[a_1, b_1]$ 二等分：$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$，$\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$，至少有一个闭区间含有 E 的无限多个点. 否则闭区间 $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ 与 $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ 都含有 E 的有限多个点，那么闭区间 $[a_1, b_1]$ 只含有 E 的有限多个点. 与已知条件矛盾. 设含有 E 的无限多个点的那个闭区间表为 $[a_2, b_2]$. 如果两个闭区间 $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ 与 $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ 都含有 E 的无限多个点，则任取其一.

再将闭区间 $[a_2, b_2]$ 二等分：$\left[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}\right]$ 与 $\left[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2\right]$，同样，至少有一个闭区间含有 E 的无限多个点，将此闭区间表为 $[a_3, b_3]$.

同样方法，无限次作下去，构造闭区间套：

1) $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}=0$.

每个闭区间$[a_n,b_n]$都含有 E 的无限多个点. 根据闭区间套定理,存在唯一 ξ 属于所有的闭区间$[a_n,b_n]$,$\forall\ n\in\mathbf{N}$,且

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\xi=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

已知$\forall\ n\in\mathbf{N}$,有 $a_n\leqslant\xi\leqslant b_n$,根据极限的保序性,$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ k\in\mathbf{N}$,有

$$\xi-\varepsilon<a_k\leqslant\xi\leqslant b_k<\xi+\varepsilon,$$

即 $[a_k,b_k]\subset(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)=U(\xi,\varepsilon)$. 已知闭区间$[a_k,b_k]$含有 E 的无限多个点,从而 $U(\xi,\varepsilon)$也含有 E 的无限多个点,即 ξ 是 E 的聚点.

练习题 4.2

(《讲义》上册,第 143 页)

3. 证明:

(1) $f(x)=x^2$ 在$(-1,1)$一致连续,在 $\mathbf{R}$ 非一致连续.

解 $\forall\ \varepsilon>0$,$\forall\ x_1,x_2\in(-1,1)$,要使不等式

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1^2-x_2^2|=|x_1+x_2||x_1-x_2|$$
$$\leqslant(|x_1|+|x_2|)|x_1-x_2|<2|x_1-x_2|<\varepsilon$$

成立,从不等式 $2|x_1-x_2|<\varepsilon$ 解得 $|x_1-x_2|<\frac{\varepsilon}{2}$. 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$,于是

$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta=\frac{\varepsilon}{2}>0$,$\forall\ x_1,x_2\in(-1,1)$:$|x_1-x_2|<\delta$,有

$$|x_1^2-x_2^2|<\varepsilon,$$

即函数 $f(x)=x^2$ 在$(-1,1)$一致连续.

因为函数 $f(x)=x^2$ 在$[0,+\infty)$是严格增加,当 $x\to+\infty$时,有 $f(x)=x^2\to+\infty$,且 x^2 的增加速度比 x 的增加速度快得多,即当 n 充分大时,两点 $\sqrt{n}$ 与 $\sqrt{n+1}$的距离很小,而这两点函数值的距离

$$\left|f(\sqrt{n+1})-f(\sqrt{n})\right|(=n+1-n=1)$$

却保持常数 1. 于是

$$\exists\ \varepsilon_0=\frac{1}{2}>0,\forall\ \delta>0,\exists\ \sqrt{n},\sqrt{n+1}\in\mathbf{R}:$$

$$\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \delta$$

$\left(\text{只须 } n>\frac{1}{4\delta^2}\right)$，有

$$\left|f(\sqrt{n+1})-f(\sqrt{n})\right|=n+1-n=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

即函数 $f(x)=x^2$ 在 $\mathbf{R}$ 非一致连续.

(3) $f(x)=\sqrt{x}$ 在$[1,+\infty)$一致连续.

证 $\forall\ \varepsilon>0,\forall\ x_1,x_2\in[1,+\infty)$，要使不等式

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|=\frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}|x_1-x_2|<\varepsilon$$

成立，从不等式$\frac{1}{2}|x_1-x_2|<\varepsilon$ 解得$|x_1-x_2|<2\varepsilon$. 取 $\delta=2\varepsilon$，于是

$$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta=2\varepsilon>0,\forall\ x_1,x_2\in[1,+\infty):|x_1-x_2|<\delta,\text{有}$$

$$\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|<\varepsilon.$$

即函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在$[1,+\infty)$一致连续.

5. 证明：若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 I 一致连续，则函数 $f(x)+g(x)$ 在区间 I 也一致连续.

证 已知 $f(x)$与 $g(x)$在 I 一致连续，即

$$\forall\ \varepsilon>0,\begin{cases}\exists\ \delta_1>0,\forall\ x_1,x_2\in I:|x_1-x_2|<\delta_1,\text{有}\\ \qquad |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon;\\ \exists\ \delta_2>0,\forall\ x_1,x_2\in I:|x_1-x_2|<\delta_2,\text{有}\\ \qquad |g(x_1)-g(x_2)|<\varepsilon.\end{cases}$$

$\exists\ \delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，于是，

$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0,\forall\ x_1,x_2\in I:|x_1-x_2|<\delta$，有

$$|[f(x_1)+g(x_1)]-[f(x_2)+g(x_2)]|$$
$$\leqslant|f(x_1)-f(x_2)|+|g(x_1)-g(x_2)|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

即函数 $f(x)+g(x)$ 在区间 I 一致连续.

6. 证明：函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 一致连续 $\Longleftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 连续，且 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 都存在.

证 $\Rightarrow$ 已知 $f(x)$ 在 (a,b) 一致连续，即

$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0,\forall\ x_1,x_2\in(a,b):|x_1-x_2|<\delta$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 显然，$f(x)$ 在 (a,b) 连续，且

$$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0,\forall\ x_1,x_2\in(a,b):$$
$$\left.\begin{cases}a<x_1<a+\delta\\a<x_2<a+\delta\end{cases}\right\}(|x_1-x_2|<\delta)，有$$
$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

根据柯西收敛准则，函数 $f(x)$ 在 a 存在右极限 $f(a+0)$.

同法可证，函数 $f(x)$ 在 b 存在左极限 $f(b-0)$.

$\Leftarrow$ 已知 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 存在，将函数 $f(x)$ 在 a 作右连续开拓，即令 $f(a)=f(a+0)$. 同样，将函数 $f(x)$ 在 b 作左连续开拓，即令 $f(b)=f(b-0)$. 于是，函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续. 根据定理 4，函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 一致连续，从而函数 $f(x)$ 在 (a,b) 也一致连续.

7. 证明：函数 $f(x)$ 在区间 I 一致连续 $\Longleftrightarrow$ 对区间 I 上任意两个数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$，当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0.$$

并证明函数 $f(x)=e^x$ 在 $\mathbf{R}$ 非一致连续.

证 $\Rightarrow$ 已知函数 $f(x)$ 在 I 一致连续，即

$$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0,\forall\ x,y\in I:|x-y|<\delta，有$$
$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

又已知$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，对上述$\delta>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，$\forall\ n>N$，有

$$|x_n-y_n|<\delta,$$

从而，有
$$|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0.$$

$\Leftarrow$用反证法. 假设$f(x)$在I非一致连续，即

$$\exists\ \varepsilon_0>0, \forall\ \delta>0, \exists\ x,y\in I:|x-y|<\delta, \text{有}$$

$$|f(x)-f(y)|\geqslant\varepsilon_0.$$

取$\delta=1$，$\exists\ x_1,y_1\in I$：$|x_1-y_1|<1$，有$|f(x_1)-f(y_1)|\geqslant\varepsilon_0$，

$\delta=\dfrac{1}{2}$，$\exists\ x_2,y_2\in I$：$|x_2-y_2|<\dfrac{1}{2}$，有$|f(x_2)-f(y_2)|\geqslant\varepsilon_0$，

… …

$\delta=\dfrac{1}{n}$，$\exists\ x_n,y_n\in I$：$|x_n-y_n|<\dfrac{1}{n}$，有$|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon_0$.

… …

从而在区间I上构造某两个数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$. 显然

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0, \text{但是}\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]\neq 0,$$

与已知条件矛盾. 于是，函数$f(x)$在区间I一致连续.

根据上述一致连续的必要充分条件，有

函数$f(x)$在区间I非一致连续$\Longleftrightarrow$在区间I上存在某两个数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$，当$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$时，有

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]\neq 0.$$

下面证明函数$f(x)=e^x$在$\mathbf{R}$非一致连续.

证 $\forall\ n\in\mathbf{N}$，设$x_n=\ln(n+1)$，$y_n=\ln n$. 从而在$\mathbf{R}$构造两个数列：$\{x_n\}$与$\{y_n\}$，有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim_{n\to\infty}[\ln(n+1)-\ln n]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=0,$$

但是，
$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=\lim_{n\to\infty}(n+1-n)$$

$$= 1 \neq 0,$$

即函数 $f(x)=e^x$ 在 **R** 非一致连续.

8. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$，则函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续.

证 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$. 根据柯西收敛准则，有

$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ A>a, \forall\ x_1,x_2>A$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

又已知函数 $f(x)$ 闭区间 $[a,A+1]$ 连续，根据定理 4，函数 $f(x)$ 在 $[a,A+1]$ 一致连续，即

对上述 $\varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$（使 $\delta<1$），$\forall\ x_1,x_2\in[a,A+1]$：$|x_1-x_2|<\delta$，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

于是，$\forall\ x_1,x_2\in[a,+\infty)$：$|x_1-x_2|<\delta$（使 $\delta<1$），有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

即函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续.

9. 应用一致连续定义证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 与 $[b,c]$ 一致连续，则函数 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 一致连续.

证 已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 与 $[b,c]$ 一致连续，即

$$\forall\ \varepsilon>0,\begin{cases}\exists\ \delta_1>0, \forall\ x_1,x_2\in[a,b]: |x_1-x_2|<\delta_1,\text{有} \\ \qquad |f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{\varepsilon}{2}. \\ \exists\ \delta_2>0, \forall\ x_1,x_2\in[b,c]: |x_1-x_2|<\delta_2,\text{有} \\ \qquad |f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{\varepsilon}{2}.\end{cases}$$

$\exists\ \delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. 于是

$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0, \forall\ x_1,x_2\in[a,c]$：$|x_1-x_2|<\delta$，当

1) $x_1,x_2\in[a,b]$：$|x_1-x_2|<\delta$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$；

2) $x_1,x_2\in[b,c]$：$|x_1-x_2|<\delta$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$；

3) $x_1\in[a,b], x_2\in[b,c]$：$|x_1-x_2|<\delta$，（$|x_1-b|<\delta$，$|x_2-b|<$

$\delta)$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-f(b)|+|f(b)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，

即函数 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 一致连续.

10. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则 $\forall\ \varepsilon>0$，可将 $[a,b]$ 分成有限个小区间：

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n],\quad x_0=a,x_n=b,$$

使 $\forall\ x_i',x_i''\in[x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,\cdots,n$，有 $|f(x_i')-f(x_i'')|<\varepsilon$.

证 已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，根据定理 4，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 一致连续，即

$$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0,\forall\ x,y\in[a,b]:|x-y|<\delta,\text{有}$$
$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

将 $[a,b]$ 分成有限个（n 个）区间：

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n],\quad x_0=a,x_n=b,$$

使每个小区间的长 $x_i-x_{i-1}<\delta$，$i=1,2,\cdots,n$，则

$\forall\ x_i',x_i''\in[x_{i-1},x_i]$，有 $|x_i'-x_i''|<\delta$，有

$$|f(x_i')-f(x_i'')|<\varepsilon.$$

*　　*　　*　　*

11. 应用一致连续定义证明：多项式 $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 在任意有限区间 $[a,b]$ 一致连续，其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是常数.

证 设 $M=\max\{|a|,|b|\}$. $\forall\ x\in[a,b]$，有 $|x|\leqslant M$. $\forall\ m\in\mathbf{N}$，$\forall\ x_1,x_2\in[a,b]$，有

$$\begin{aligned}|x_1^m-x_2^m|&\leqslant|x_1-x_2|(|x_1|^{m-1}+|x_1|^{m-2}|x_2|\\&\quad+\cdots+|x_2|^{m-1})\\&\leqslant mM^{m-1}|x_1-x_2|.\end{aligned}$$

$\forall\ \varepsilon>0$，$\forall\ x_1,x_2\in[a,b]$，要使不等式

$$\begin{aligned}|P_n(x_1)-P_n(x_2)|&=|a_0(x_1^n-x_2^n)+a_1(x_1^{n-1}-x_2^{n-1})\\&\quad+\cdots+a_{n-1}(x_1-x_2)|\\&\leqslant|a_0||x_1^n-x_2^n|+|a_1||x_1^{n-1}-x_2^{n-1}|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\cdots+|a_{n-1}||x_1-x_2| \\
&\leqslant (nM^{n-1}|a_0|+(n-1)M^{n-2}|a_1| \\
&\quad +\cdots+|a_{n-1}|)|x_1-x_2| \\
&= A|x_1-x_2|<\varepsilon
\end{aligned}
$$

成立，其中 $A=nM^{n-1}|a_0|+(n-1)M^{n-2}|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|$ 是正常数，从不等式 $A|x_1-x_2|<\varepsilon$ 解得 $|x_1-x_2|<\frac{\varepsilon}{A}$. 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{A}$，于是

$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta=\frac{\varepsilon}{A}>0, \forall\ x_1,x_2\in[a,b]:\ |x_1-x_2|<\delta$，有

$$|P_n(x_1)-P_n(x_2)|<\varepsilon,$$

即多项式 $P_n(x)$ 在任意有限区间 $[a,b]$ 一致连续.

12. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[bx-f(x)]=0$，其中 b 是非零常数，则函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续.

证法一 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}[bx-f(x)]=0$，根据柯西收敛准则，

$\forall\ \frac{\varepsilon}{2}>0, \exists\ A>a, \forall\ x_1,x_2>A$，有

$$|[bx_1-f(x_1)]-[bx_2-f(x_2)]|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而，
$$
\begin{aligned}
&|f(x_1)-f(x_2)|-|b||x_1-x_2| \\
&\leqslant |[f(x_1)-bx_1]-[f(x_2)-bx_2]|<\frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}
$$

或
$$|f(x_1)-f(x_2)|<|b||x_1-x_2|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

要使 $|b||x_1-x_2|<\frac{\varepsilon}{2}$，解得 $|x_1-x_2|<\frac{\varepsilon}{2|b|}$. 取 $\delta_1=\frac{\varepsilon}{2|b|}$，于是

$$|f(x_1)-f(x_2)|<|b||x_1-x_2|+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

又已知函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,A+1]$ 连续，根据定理 4，函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,A+1]$ 一致连续，即

对上述 $\varepsilon>0, \exists\ \delta_2>0, \forall\ x_1,x_2\in[a,A+1]:\ |x_1-x_2|<\delta_2$，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

$\exists\ \delta=\min\{\delta_1,\delta_2,1\}$，于是

$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta=\min\{\delta_1,\delta_2,1\}>0$，$\forall\ x_1,x_2\in[a,+\infty)$：$|x_1-x_2|<\delta$，有

x_1 和 x_2 同时属于$[a,A+1]$或$[A,+\infty)$，于是

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

即函数 $f(x)$在$[a,+\infty)$一致连续.

证法二 显然，函数 $F(x)=bx-f(x)$在$[a,+\infty)$连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$. 由第 8 题知，$F(x)$在$[a,+\infty)$一致连续，而 bx 显然在$[a,+\infty)$一致连续（$|bx_1-bx_2|=|b||x_1-x_2|$）. 于是，由第 5 题，函数 $f(x)=bx-F(x)$在$[a,+\infty)$一致连续.

13. 证明：若函数 $f(x)$在(a,b)连续，单调、有界，则函数 $f(x)$在(a,b)一致连续.

证 不妨设函数 $f(x)$在(a,b)单调增加，由练习题 2.4 第 14 题，函数 $f(x)$在 a 存在右极限 $f(a+0)$，同时函数 $f(x)$在 b 存在左极限 $f(b-0)$. 再由第 6 题，函数 $f(x)$在(a,b)一致连续.

14. 应用聚点定理证明：

若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$连续，则函数 $f(x)$在$[a,b]$有界.

证 用反证法. 假设函数 $f(x)$在$[a,b]$无界，即

$\forall\ M>0$，$\exists\ x_0\in[a,b]$，有 $|f(x_0)|>M$.

取 $M_1=1$，$\exists\ x_1\in[a,b]$，有 $|f(x_1)|>M_1$，

$M_2=\max\{2,|f(x_1)|\}>0$，$\exists\ x_2\in[a,b]$，有 $|f(x_2)|>M_2$，

$M_3=\max\{3,|f(x_2)|\}>0$，$\exists\ x_3\in[a,b]$，有 $|f(x_3)|>M_3$，

…

$M_n=\max\{n,|f(x_{n-1})|\}>0$，$\exists\ x_n\in[a,b]$，有 $|f(x_n)|>M_n$，

… …

显然，$x_i\neq x_j$，$i,j\in\mathbf{N}$. 从而，构造一个有界无限点集 $A=\{x_n|n\in\mathbf{N}\}\subset[a,b]$. 根据聚点定理，点集 A 至少存在一个聚点 ξ，且 $\xi\in[a,b]$（易证）.

一方面，函数 $f(x)$在点 ξ 连续，即

对 $\varepsilon_0=1>0$，$\exists\ \delta>0$，$\forall\ x\in(a,b)$：$|x-\xi|<\delta$，有

$$|f(x)-f(\xi)|\leqslant 1.$$

或 $\forall\ x\in U(\xi,\delta)\cap[a,b]$，有 $|f(x)|\leqslant|f(\xi)|+1$.
从而，函数 $f(x)$ 在 $U(\xi,\delta)$ 有界.

另一方面，由聚点定义，在点 ξ 的 δ 邻域 $U(\xi,\delta)$ 含有 A 的无限多个点 x_{n_k}，有 $|f(x_{n_k})|>n_k$. 由于 $n_k\in\mathbf{N}$，且 $n_k\to+\infty$，从而，函数 $f(x)$ 在 $U(\xi,\delta)$ 又无界，与前面所证矛盾.

于是函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界.

15. 应用致密性定理证明：

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 取到最小值 m 与最大值 M.

证 根据定理 1，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界，即函数值集 $\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$ 既有上界又有下界. 根据确界定理，函数值集 $\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$ 既有上确界又有下确界，设

$\sup\{f(x)\mid x\in[a,b]\}=\xi$ 与 $\inf\{f(x)\mid x\in[a,b]\}=\eta$.

下面证明函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 取到最大值，即 $\exists\ x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)=\xi$.

由上确界定义，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ x_\varepsilon\in[a,b]$，使 $\xi-\varepsilon<f(x_\varepsilon)\leqslant\xi$.

取 $\varepsilon=1>0$，$\exists\ x_1\in[a,b]$，使 $\xi-1<f(x_1)\leqslant\xi$，

$\varepsilon=\dfrac{1}{2}>0$，$\exists\ x_2\in[a,b]$，使 $\xi-\dfrac{1}{2}<f(x_2)\leqslant\xi$，

…　　…

$\varepsilon=\dfrac{1}{n}>0$，$\exists\ x_n\in[a,b]$，使 $\xi-\dfrac{1}{n}<f(x_n)\leqslant\xi$，

…　　…

从而，构造一个有界数列 $\{x_n\}$，显然，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\xi$.

根据致密性定理，有界数列 $\{x_n\}$ 必有一个收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0\in[a,b]$，再根据 §2.2 定理 9，有

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\xi.$$

已知函数 $f(x)$ 在 x_0 连续，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

于是，
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{k\to +\infty} f(x_{n_k}) = \xi = f(x_0),$$

即函数 $f(x)$ 在 $x_0 \in [a,b]$ 取到最大值 ξ.

同法可证，函数 $f(x)$ 在点 $x_0' \in [a,b]$ 取到最小值 η. 即

$$f(x_0') = \eta.$$

16. 应用确界定理证明：

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，且 $f(a)f(b)<0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 c，使 $f(c)=0$.

证 不妨设 $f(a)>0$ 与 $f(b)<0$. 考虑数集

$$A = \{x \mid f(x) > 0, x \in [a,b]\}.$$

A 是非空($a\in A$)有上界(b 是上界)的数集. 根据确界定理，数集 A 有上确界，设

$$\sup A = \sup\{x \mid f(x) > 0, x \in [a,b]\} = c \in (a,b).$$

下面证明 $f(c)=0$. 用反证法. 假设 $f(c)\neq 0$. 根据连续函数的保号性，

若 $f(c)>0$，则 $\exists\ \delta_1>0, \forall\ x\in(c,c+\delta_1)$，有 $f(x)>0$，与 $\sup A=c$ 矛盾；

若 $f(c)<0$，则 $\exists\ \delta_2>0, \forall\ x\in(c-\delta_2,c)$，有 $f(x)<0$，从而 $(c-\delta_2,c)\cap A=\phi$，与 $\sup A=c$ 也矛盾.

于是，在 (a,b) 内至少存在一点 c，使 $f(c)=0$.

17. 应用有限覆盖定理证明：

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 一致连续.

证 $\forall\ a\in[a,b]$，已知函数 $f(x)$ 在 a 连续，即

$\forall\ \frac{\varepsilon}{2}>0, \exists\ \delta_a>0, \forall\ x\in(a-\delta_a, a+\delta_a)\cap[a,b]$，有

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是$\forall\ x_1,x_2\in(\alpha-\delta_\alpha,\alpha+\delta_\alpha)\cap[a,b]$，即$|x_1-\alpha|<\delta_\alpha$，$|x_2-\alpha|<\delta_\alpha$，有

$$|f(x_1)-f(\alpha)|<\frac{\varepsilon}{2}\quad 与\quad |f(x_2)-f(\alpha)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而，
$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-f(\alpha)|+|f(\alpha)-f(x_2)|<\varepsilon. \tag{1}$$

将每个开区间$(\alpha-\delta_\alpha,\alpha+\delta_\alpha)$中的$\delta_\alpha$缩小一半，得到开区间集：

$$\left\{\left(\alpha-\frac{\delta_\alpha}{2},\alpha+\frac{\delta_\alpha}{2}\right)\middle|\alpha\in[a,b]\right\}.$$

这个开区间集覆盖闭区间$[a,b]$. 根据有限覆盖定理，存在n个（有限个）开区间集

$$\left\{\left(\alpha_i-\frac{\delta_{\alpha_i}}{2},\alpha_i+\frac{\delta_{\alpha_i}}{2}\right)\middle|i=1,2,\cdots,n\right\}$$

也覆盖闭区间$[a,b]$：

$$\exists\ \delta=\min\left\{\frac{\delta_{\alpha_1}}{2},\frac{\delta_{\alpha_2}}{2},\cdots,\frac{\delta_{\alpha_n}}{2}\right\}>0.$$

下面证明这个δ就满足一致连续的要求.

$\forall\ x_1,x_2\in[a,b]$，且$|x_1-x_2|<\delta$，设$x_1\in\left(\alpha_k-\frac{\delta_{\alpha_k}}{2},\alpha_k+\frac{\delta_{\alpha_k}}{2}\right)$，即$|x_1-\alpha_k|<\frac{\delta_{\alpha_k}}{2}$，从而有

$$|x_2-\alpha_k|\leqslant|x_2-x_1|+|x_1-\alpha_k|<\delta+\frac{\delta_{\alpha_k}}{2}$$
$$\leqslant\frac{\delta_{\alpha_k}}{2}+\frac{\delta_{\alpha_k}}{2}=\delta_{\alpha_k},$$

即$x_2\in(\alpha_k-\delta_{\alpha_k},\alpha_k+\delta_{\alpha_k})$. 由(1)式，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

于是，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta=\min\left\{\frac{\delta_{\alpha_1}}{2},\frac{\delta_{\alpha_2}}{2},\cdots,\frac{\delta_{\alpha_n}}{2}\right\}>0$，$\forall\ x_1,x_2\in[a,b]$：

$|x_1-x_2|<\delta$(x_1 与 x_2 必属于某个开区间$(\alpha_k-\delta_{\alpha_k},\alpha_k+\delta_{\alpha_k})$)，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

即函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$一致连续.

第五章　导数与微分

练习题　5.1

（《讲义》上册，第 157 页）

3. 求两条抛物线 $y=x^2$ 与 $y=2-x^2$ 在交点处的（两条切线）交角 θ.

解　不难解得两条抛物线的交点坐标是(1,1)与(−1,1).

设抛物线 $y=x^2$ 与 $y=2-x^2$ 在点(1,1)的切线斜率分别是 k_1 与 k_2，有

$$k_1=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2-1^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2.$$

$$k_2=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2-(1+\Delta x)^2-2+1^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(-2-\Delta x)=-2.$$

于是，

$$\operatorname{tg}\theta_1=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{4}{3},$$

即

$$\theta_1=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}.$$

同法可求得两条抛物线在点(−1,1)的交角

$$\theta_2=\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}.$$

4. 根据导数定义，求下列函数在点 x 的导数：

(3) $f(x)=\sqrt{x+1}$，$x>-1$.

解 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{(x+\Delta x)+1}-\sqrt{x+1}}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{(x+\Delta x)+1}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

(4) $f(x)=\sin 3x$.

解 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin 3(x+\Delta x)-\sin 3x}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{3\Delta x}{2}\cos\frac{6x+3\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}3\frac{\sin\frac{3\Delta x}{2}}{\frac{3\Delta x}{2}}\cos\frac{6x+3\Delta x}{2}=3\cos 3x.$$

6. 求函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant c,\\ ax+b, & x<c.\end{cases}$$

在 c 的右导数. 当 a 与 b 取何值,函数 $f(x)$ 在 c 可导.

解 $f'_+(c)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{(c+\Delta x)^2-c^2}{\Delta x}=2c.$

$$f'_-(c)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{a(c+\Delta x)+b-c^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\left(a+\frac{ac+b-c^2}{\Delta x}\right).$$

由此可见,$ac+b-c^2=0\Longleftrightarrow f'_-(c)$ 存在,且 $f'_-(c)=a$.
又已知函数 $f(x)$ 在 c 可导$\Longleftrightarrow f'_-(c)=f'_+(c)$. 于是,函数 $f(x)$ 在 c 可导$\Longleftrightarrow a$ 与 b 应满足方程组:

$$\begin{cases}ac+b-c^2=0,\\ 2c=a.\end{cases}$$

从中解得 $a=2c,b=-c^2$,即当 $a=2c,b=-c^2$ 时,函数 $f(x)$ 在 c 可导.

7. 求函数在点 0 的左右导数:

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解 $f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}=1$,

$f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}=0.$

(2) $\varphi(x)=|\mathrm{arctg}x|$.

解 $\varphi'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{|\mathrm{arctg}\Delta x|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{-\mathrm{arctg}\Delta x}{\Delta x}$

$$=\lim_{y\to 0^-}\frac{-\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}y)}{\mathrm{tg}y}\qquad (设\ \Delta x=\mathrm{tg}y)$$

$$=\lim_{y\to 0^-}\frac{-y}{\mathrm{tg}y}=-\lim_{y\to 0^-}\frac{y}{\sin y}\cdot\cos y=-1.$$

$\varphi'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{|\mathrm{arctg}\Delta x|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{arctg}\Delta x}{\Delta x}$

$$=\lim_{y\to 0^+}\frac{\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}y)}{\mathrm{tg}y}\qquad (设\ \Delta x=\mathrm{tg}y)$$

$$=\lim_{y\to 0^+}\frac{y}{\mathrm{tg}y}=1.$$

9. 证明：若 $f'_+(a)>0$，则$\exists\ \delta>0,\forall\ x\in(a,a+\delta)$，有

$$f(a)<f(x).$$

证 已知 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，根据极限保号性，$\exists\ \delta>0,\forall\ x: a<x<a+\delta$，或 $x\in(a,a+\delta)$，有

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0.$$

已知 $x>a$ 或 $x-a>0$. 于是，$f(x)-f(a)>0$ 或 $f(a)<f(x)$.

10. 证明：若函数 $f(x)$ 在 a 可导，则

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a).$$

证 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{xf(a)-af(a)+af(a)-af(x)}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(a)(x-a)-a[f(x)-f(a)]}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left(f(a)-a\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)=f(a)-af'(a).$$

11. 证明：若$\forall\ x\in U(a)$，有$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，$f(a)=g(a)=h(a)$，且$f'(a)=h'(a)$，则$g(x)$在$a$可导，且$f'(a)=g'(a)=h'(a)$。

证 已知$\forall\ x\in U(a)$，有$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，从而

$$f(x)-f(a)\leqslant g(x)-g(a)\leqslant h(x)-h(a).$$

当$x>a$，即$x-a>0$时，用$x-a$除之，有

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\leqslant\frac{h(x)-h(a)}{x-a}.$$

已知$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_+(a)$与$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{h(x)-h(a)}{x-a}=h'_+(a)$，且$f'_+(a)=h'_+(a)$。根据两边夹定理，极限$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$存在，即$g(x)$在$a$右可导，且

$$f'_+(a)=g'_+(a)=h'_+(a).$$

同法可证，$f'_-(a)=g'_-(a)=h'_-(a)$。

又已知$f'(a)=h'(a)$，所以$f'_+(a)=f'_-(a)=f'(a)$与$h'_+(a)=h'_-(a)=h'(a)$。于是，$g'_+(a)=g'_-(a)=h'(a)$，即$g(x)$在a可导，且

$$f'(a)=g'(a)=h'(a).$$

*　　*　　*　　*

13. 设函数$f(x)$在a可导，且$f(a)\neq 0$，求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$$

解 $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a)+f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\right]^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\right]^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\right]^{\frac{f(a)}{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}}\right\}^{\frac{1}{f(a)}\cdot\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{\frac{1}{n}}}$$

$$=e^{\frac{1}{f(a)}f'(a)}=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

14. 设函数 $f(x)$ 在 a 可导，求下列极限：

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$.

解 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h}=f'(a)$.

(4) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+2t)-f(a+t)}{2t}$.

解

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+2t)-f(a+t)}{2t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+2t)-f(a)-[f(a+t)-f(a)]}{2t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+2t)-f(a)}{2t}-\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}$$

$$=f'(a)-\frac{1}{2}f'(a)=\frac{1}{2}f'(a).$$

15. 证明：若函数 $f(x)$ 在 a 连续，且 $f(a)\neq 0$，而函数 $[f(x)]^2$ 在 a 可导，则函数 $f(x)$ 在 a 也可导.

证 已知 $f(x)$ 在 a 连续，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(a+\Delta x)=f(a)$.

又已知 $[f(x)]^2$ 在 a 可导，即极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(a+\Delta x)]^2-[f(a)]^2}{\Delta x}$$

存在，设 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[f(a+\Delta x)]^2-[f(a)]^2}{\Delta x}=A$. 于是，极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(a+\Delta x)-f(a)][f(a+\Delta x)+f(a)]}{\Delta x[f(a+\Delta x)+f(a)]}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(a+\Delta x)]^2-[f(a)]^2}{\Delta x}\cdot\frac{1}{f(a+\Delta x)+f(a)}$$

$$=\frac{A}{2f(a)},$$

即函数 $f(x)$ 在 a 可导.

练习题 5.2

（《讲义》上册，第 175 页）

1. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^4+3x^2-6$.

解 $y'=4x^3+6x$.

(3) $y=(1+4x^3)(1+2x^2)$.

解 $y'=12x^2(1+2x^2)+4x(1+4x^3)$

$=40x^4+12x^2+4x=4x(10x^3+3x+1)$.

(5) $y=\dfrac{x^3+1}{x^2-x-2}$.

解 $y'=\dfrac{3x^2(x^2-x-2)-(x^3+1)(2x-1)}{(x^2-x-2)^2}$

$=\dfrac{x^4-2x^3-6x^2-2x+1}{(x^2-x-2)^2}$.

(7) $y=x\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x$.

解 $y'=\mathrm{tg}x+\dfrac{x}{\cos^2x}+\dfrac{1}{\sin^2x}$

$=\mathrm{tg}x+x\sec^2x+\csc^2x$.

(9) $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$.

解 $y'=\dfrac{-\dfrac{1}{x}(1+\ln x)-(1-\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}}{(1+\ln x)^2}$

$=-\dfrac{2}{x(1+\ln x)^2}$.

(11) $y=\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x}$.

解 $y'=\left(\dfrac{1}{x}\mathrm{arctg}x\right)'$

$=-\dfrac{1}{x^2}\mathrm{arctg}x+\dfrac{1}{x}\ \dfrac{1}{1+x^2}$

$$=\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{1+x^2}-\text{arctg}x\right).$$

(13) $y=x^2\arccos x$.

解 $y'=2x\arccos x-\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

(15) $y=x\sin x\ln x$.

解 $y'=\sin x\ln x+x\cos x\ln x+x\sin x\dfrac{1}{x}$

$$=\sin x(\ln x+1)+x\cos x\ln x.$$

2. 求下列函数的导数：

(1) $y=(2x^2-3)^2$.

解 $y'=2(2x^2-3)\cdot 4x=8x(2x^2-3)$.

(3) $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

解 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}\cdot\dfrac{1-x-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}$

$$=\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}.$$

(5) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

解 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

$$\cdot\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$$

$$=\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}.$$

(7) $y=\sin 2x\cos 3x$.

解 $y'=2\cos 2x\cos 3x-3\sin 2x\sin 3x$.

(9) $y=a\sin^3\dfrac{x}{3}$.

解 $y'=3a\sin^2\dfrac{x}{3}\cdot\cos\dfrac{x}{3}\cdot\dfrac{1}{3}$

$=a\sin^2\dfrac{x}{3}\cos\dfrac{x}{3}$.

(11) $y=\ln\mathrm{tg}x$.

解 $y'=\dfrac{1}{\mathrm{tg}x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2x}=\dfrac{1}{\sin x\cos x}$

$=\dfrac{2}{\sin 2x}$.

(13) $y=(x\mathrm{ctg}x)^2$.

解 $y'=2x\mathrm{ctg}x\left(\mathrm{ctg}x-\dfrac{x}{\sin^2x}\right)$

$=2x\mathrm{ctg}x(\mathrm{ctg}x-x\csc^2x)$.

(15) $y=\log_3(x^2-\sin x)$.

解 $y'=\dfrac{1}{(x^2-\sin x)\ln 3}\cdot(2x-\cos x)$

$=\dfrac{2x-\cos x}{(x^2-\sin x)\ln 3}$.

(17) $y=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$.

解 $y'=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\dfrac{x\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$

$=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

(19) $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

解法一

解 $y'=\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}}$

$$\cdot\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)-(\sqrt{x^2+1}-x)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right)}{(\sqrt{x^2+1}+x)^2}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

解法二 $y=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$$=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)-\ln(\sqrt{x^2+1}+x).$$

解 $y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)$

$$-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right)$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

注 从上述的解法一和解法二看到，求商的对数函数的导数，首先应用对数的性质将它化为对数的差，然后再求导数比较简单.

(21) $y=\sqrt{a^2+x^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}$.

解 $y=\sqrt{a^2+x^2}-a\left[\ln(a+\sqrt{a^2+x^2})-\ln x\right]$.

$$y'=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-a\left(\frac{1}{a+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{a^2}{x\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}.$$

(23) $y=7^{x^2+2x}$.

解 $y'=7^{x^2+2x}\ln 7\cdot(2x+2)$

$$=2(x+1)\cdot 7^{x^2+2x}\ln 7.$$

(25) $y=\ln\frac{e^x}{1+e^x}$.

解 $y=\ln e^x-\ln(1+e^x)=x-\ln(1+e^x)$.

$$y'=1-\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{1}{1+e^x}.$$

(27) $y=(\arcsin x)^2$.

解 $y'=2\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(29) $y=\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$.

解 $y'=\frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}\cdot\frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2}$

$$=\frac{2}{1+x^2}.$$

(31) $y=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}$.

解 $y'=\sqrt{a^2-x^2}+\frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+a^2\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\cdot\frac{1}{a}$

$$=2\sqrt{a^2-x^2}.$$

(33) $y=\arcsin(\sin x)$

解 $y'=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2x}}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{|\cos x|}$

$$=\begin{cases}1, & x\in\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right),\\ -1, & x\in\left((2k+1)\pi-\frac{\pi}{2},(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}\right).\end{cases}\quad k\in\mathbf{Z}.$$

(35) $y=\operatorname{arctg}\frac{a}{x}+\ln\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$.

解 $y=\operatorname{arctg}\frac{a}{x}+\frac{1}{2}[\ln(x-a)-\ln(x+a)]$.

$$y'=\frac{1}{1+\left(\frac{a}{x}\right)^2}\left(-\frac{a}{x^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$$

$$=\frac{2a^3}{x^4-a^4}.$$

(37) $y=x^{\frac{1}{x}}$.

解 $y=e^{\frac{1}{x}\ln x}$.

$$y'=e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}\right)$$

$$=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).$$

(39) $y=(\sin x)^x$.

解 $y=e^{x\ln\sin x}$

$$y'=e^{x\ln\sin x}\left(\ln\sin x+x\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$=(\sin x)^x(\ln\sin x+x\operatorname{ctg}x).$$

4. 证明：若函数 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 在 x 皆可导，且在 x 皆不为 0，设 $g(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$，则函数 $g(x)$ 在 x 也可导，且

$$g'(x)=g(x)\left[\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}+\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}+\cdots+\frac{f_n'(x)}{f_n(x)}\right].$$

证 已知函数 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 在 x 可导，则 $f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$ 在 x 也可导，由乘积的求导公式，有

$$g'(x)=[f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)]'$$

$$=\sum_{k=1}^{n}f_1(x)f_2(x)\cdots f_k'(x)\cdots f_n(x)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}g(x)\cdot\frac{f_1(x)\cdots f_k'(x)\cdots f_n(x)}{f_1(x)\cdots f_k(x)\cdots f_n(x)}$$

$$=g(x)\left[\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}+\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}+\cdots+\frac{f_n'(x)}{f_n(x)}\right].$$

5. 证明：可导的偶函数的导函数是奇函数；可导的奇函数的导函数是偶函数，并对这个事实给以几何说明.

证 设 $f(x)$ 是可导的偶函数，即 $f(-x)=f(x)$，有

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}=-f'(x).$$

即可导的偶函数的导函数是奇函数.

同法可证,可导的奇函数的导函数是偶函数.

几何说明:可导的偶函数的图象是关于 y 轴对称的曲线,且曲线上每一点都存在切线,在点 (x,y) 与 $(-x,y)$ 的切线斜率仅相差一个负号,即其导函数是奇函数.

7. 证明:在曲线 $y=x^2+x+1$ 上横坐标为 $x_1=0,x_2=-1,x_3=-\frac{1}{2}$ 的三点的法线交于一点.

证 $y'=2x+1$. 曲线 $y=x^2+x+1$ 在三点的

切线斜率:$y'_{x_1=0}=1, y'_{x_2=-1}=-1, y'_{x_3=-\frac{1}{2}}=0$.

法线斜率:$\frac{-1}{y'_{x_1=0}}=-1, \frac{-1}{y'_{x_2=-1}}=1, \frac{-1}{y'_{x_3=-\frac{1}{2}}}=\infty$.

曲线上三点坐标是 $(0,1),(-1,1),\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$,在曲线上通过这三点的三条法线方程是

$$\begin{cases}x+y-1=0,\\ x-y+2=0,\\ x+\frac{1}{2}=0.\end{cases}$$

由平面解析几何,因为

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=0.$$

所以,三条法线交于一点.

* * * *

8. 证明：若幂函数 $y=x^\alpha$ 的定义域是 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{R}-\{0\}$，则

$$y'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

证 在§5.2例10中，已证：$\forall x>0$，有

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

若幂函数 $y=x^\alpha$ 的定义域是 $\mathbf{R}-\{0\}$，则 $\forall x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq0$ 时，由导数定义，有

$$\begin{aligned}
y'=(x^\alpha)'&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(x+\Delta x)^\alpha-x^\alpha}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{x^\alpha\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha-1\right]}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{x^\alpha}{x}\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha-1}{\frac{\Delta x}{x}}\qquad(\text{由 §3.2 例 9})\\
&=\alpha x^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

若幂函数 $y=x^\alpha$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，则点 0 属于函数 $y=x^\alpha$ 的定义域，此时只有当 $\alpha\geqslant1$ 时，幂函数 $y=x^\alpha$ 在点 0 才可导，且

$$(x^\alpha)'|_{x=0}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(0+\Delta x)^\alpha-0^\alpha}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}(\Delta x)^{\alpha-1}$$

$$=\begin{cases}0, & \alpha>1,\\ 1, & \alpha=1.\end{cases}$$

显然，幂函数 $y=x^\alpha(\alpha\geqslant1)$ 的导数公式 $y'=\alpha x^{\alpha-1}$ 在点 0 也成立.

9. 证明：若函数 $f_{ij}(x)$ 可导 $(i,j=1,2,\cdots,n)$，则

$$\begin{vmatrix}f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kn}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}'$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

证 由 n 阶行列式的定义，

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\lambda} f_{1i_1}(x) \cdots f_{ki_k}(x) \cdots f_{ni_n}(x).$$

其中 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的某一种排列；λ 是排列 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 的逆序数，$\sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 表示对 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 的所有排列求和，共有 $n!$ 项. 于是

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}'$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\lambda} [f_{1i_1}(x) \cdots f_{ki_k}(x) \cdots f_{ni_n}(x)]'$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} \left\{ (-1)^{\lambda} \sum_{k=1}^{n} [f_{1i_1}(x) \cdots f_{ki_k}(x) \cdots f_{ni_n}(x)] \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\lambda} f_{1i_1}(x) \cdots f'_{ki_k}(x) \cdots f_{ni_n}(x) \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

10. 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x 可导，求下列函数的导数：

(3) $y=\sqrt[g(x)]{f(x)}$　　　$(g(x)\neq 0, f(x)>0.)$

解 $y=e^{\frac{\ln f(x)}{g(x)}}$

$$y'=e^{\frac{\ln f(x)}{g(x)}}\left(\frac{\ln f(x)}{g(x)}\right)'$$

$$=\sqrt[g(x)]{f(x)}\left(\frac{f'(x)}{g(x)f(x)}-\frac{g'(x)\ln f(x)}{[g(x)]^2}\right).$$

(4) $y=\log_{f(x)}g(x)$　　　$(g(x)>0, f(x)>0)$.

解 $y=\log_{f(x)}g(x)=\dfrac{\ln g(x)}{\ln f(x)}$.

$$y'=\frac{\dfrac{g'(x)}{g(x)}\ln f(x)-\dfrac{f'(x)}{f(x)}\ln g(x)}{[\ln f(x)]^2}$$

$$=\frac{g'(x)}{g(x)\ln f(x)}-\frac{f'(x)\ln g(x)}{f(x)[\ln f(x)]^2}.$$

练习题　5.3

（《讲义》上册，第 183 页）

1. 求下列方程确定的隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$：

(2) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.

解　$2b^2x+2a^2y\cdot y'=0$，　$y'=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$.

(4)　$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

解　$\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot y'=0$,

$$y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}.$$

(6) $y=\cos(x+y)$.

解 $y'=-\sin(x+y)\cdot(1+y')$,

$$y'=\frac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}.$$

(8) $\sin(xy)=x$.

解 $\cos(xy)(y+xy')=1$,

$$y'=\frac{1-y\cos(xy)}{x\cos(xy)}.$$

2. 应用对数求导法，求下列函数的导数：

(2) $y=\dfrac{x^2}{1-x}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$.

解 $$\ln|y|=\ln\left|\frac{x^2}{1-x}\cdot\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}\right|$$

$$=2\ln|x|-\ln|1-x|+\frac{1}{3}\ln|3-x|-\frac{2}{3}\ln|3+x|.$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{3(3-x)}-\frac{2}{3(3+x)}$$

$$=\frac{2-x}{x(1-x)}+\frac{x-9}{3(9-x^2)},$$

即 $$y'=\frac{x^2}{1-x}\cdot\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}\left(\frac{2-x}{x(1-x)}+\frac{x-9}{3(9-x^2)}\right).$$

(4) $y=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}$,

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 都是常数.

解 $\ln|y|=\alpha_1\ln|x-a_1|+\alpha_2\ln|x-a_2|+\cdots+\alpha_n\ln|x-a_n|$.

$$\frac{y'}{y}=\frac{\alpha_1}{x-a_1}+\frac{\alpha_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{x-a_n}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{x-a_k},$$

即 $$y'=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{x-a_k}.$$

3. 求下列曲线在指定点的斜率：

(1) $x^2+3xy+y^2+1=0$，在$(2,-1)$.

解 $2x+3(y+xy')+2yy'=0$，

$$y'=-\frac{2x+3y}{3x+2y}.$$

在$(2,-1)$的斜率 $y'\big|_{\substack{x=2\\y=-1}}=-\frac{1}{4}$.

(3) $\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{y}=1$，在$(4,1)$.

解 $\frac{\sqrt[3]{2}}{3}x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{8}y^{-\frac{7}{8}}\cdot y'=0$，

$$y'=\frac{8\cdot\sqrt[3]{2}\,y^{\frac{7}{8}}}{3x^{\frac{2}{3}}}.$$

在$(4,1)$的斜率 $y'\big|_{\substack{x=4\\y=1}}=\frac{4}{3}$.

4. 求下列参数方程的导数$\frac{dy}{dx}$：

(2) $\begin{cases}x=\dfrac{3at}{1+t^3},\\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}.\end{cases}$

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{3at^2}{1+t^3}\right)}{\frac{d}{dt}\left(\frac{3at}{1+t^3}\right)}=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}.$$

(4) $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=b\sin^3 t.\end{cases}$

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{d}{dt}(b\sin^3 t)}{\frac{d}{dt}(a\cos^3 t)}=\frac{3b\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}$$

$$=-\frac{b}{a}\operatorname{tg}t.$$

* * * *

7. 若曲线由极坐标方程 $\rho=f(\theta)$ 表示，则曲线可化为以极角 θ

为参数的参数方程

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta = f(\theta)\sin\theta. \end{cases}$$

求$\frac{dy}{dx}$.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{d}{d\theta}(f(\theta)\sin\theta)}{\frac{d}{d\theta}(f(\theta)\cos\theta)}$

$$=\frac{f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta}.$$

8. 应用第 7 题证明：两条心脏线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 与 $\rho=a(1-\cos\theta)$ 在交点处的切线垂直.

证 不难求得，这两条心脏线有两个交点 $\left(a,\pm\frac{\pi}{2}\right)$，两条心脏线的方程是

$$\rho = f(\theta) = a(1+\cos\theta),$$
$$\rho = g(\theta) = a(1-\cos\theta).$$

设两条心脏线在交点 $\left(a,\pm\frac{\pi}{2}\right)$ 的斜率分别是 k_1 与 k_2，由第 7 题的公式，有

$$k_1=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta}\right|_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left.\frac{-a\sin\theta\sin\theta+a(1+\cos\theta)\cos\theta}{-a\sin\theta\cos\theta-a(1+\cos\theta)\sin\theta}\right|_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}}=\pm 1,$$

$$k_2=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{g'(\theta)\sin\theta+g(\theta)\cos\theta}{g'(\theta)\cos\theta-g(\theta)\sin\theta}\right|_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left.\frac{a\sin\theta\sin\theta+a(1-\cos\theta)\cos\theta}{a\sin\theta\cos\theta-a(1-\cos\theta)\sin\theta}\right|_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}}=\mp 1.$$

于是，$$k_1\cdot k_2=(\pm 1)(\mp 1)=-1,$$

即这两条心脏线在每个交点的两条切线都垂直.

练习题 5.1

（《讲义》上册，第 192 页）

1. 求下列函数的微分：

(5) $y=e^{ax}\cos bx$.

解 $y'=ae^{ax}\cos bx-be^{ax}\sin bx$

$=e^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)$.

于是， $dy=y'dx=e^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)dx$.

(6) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

解 $$y'=\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\frac{x}{|x|}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & 0<x<1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & -1<x<0.\end{cases}$$

于是， $$dy=y'dx=\begin{cases}-\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & 0<x<1,\\ \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & -1<x<0.\end{cases}$$

4. 证明：当 $|x|$ 充分小，$a>0$，n 是自然数，有近似公式

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{x}{na^{n-1}},$$

并用此公式求下列各数的近似值：

(1) $\sqrt[4]{80}$， (2) $\sqrt[7]{100}$， (3) $\sqrt[10]{1000}$.

证 设 $f(x)=\left(1+\dfrac{x}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}$，$f(0)=1$，$f'(x)=\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{x}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}-1}\cdot$ $\dfrac{1}{a^n}$ 当 $|x|$ 充分小时，由公式 $f(x)\approx f(0)+f'(0)x$，有

$$\left(1+\frac{x}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}\approx 1+\frac{x}{na^n}.$$

于是，当$|x|$充分小时，有

$$\sqrt[n]{a^n+x}=\sqrt[n]{a^n\left(1+\frac{x}{a^n}\right)}=a\left(1+\frac{x}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\approx a\left(1+\frac{x}{na^n}\right)=a+\frac{x}{na^{n-1}}.$$

(1) $\sqrt[4]{80}=\sqrt[4]{3^4-1}\approx 3+\frac{-1}{4\times 3^3}\approx 2.9907.$

(2) $\sqrt[7]{100}=\sqrt[7]{2^7-28}\approx 2+\frac{-28}{7\times 2^6}\approx 1.938.$

(3) $\sqrt[10]{1000}=\sqrt[10]{2^{10}-24}\approx 2+\frac{-24}{10\times 2^9}\approx 1.995.$

5. 应用微分 dy 近似代替改变量 Δy，求下列各数的近似值：

(1) $\sqrt[3]{1.02}$.

解　设 $f(x)=\sqrt[3]{x}$，$a=1$，$\Delta x=0.02$，$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$.

$\sqrt[3]{1.02}=\sqrt[3]{1+0.02}\approx 1+\frac{0.02}{3}\approx 1.007.$

(3)　$\cos 151°$.

解　设 $f(x)=\cos x$，$a=150°=\frac{5\pi}{6}$，$\Delta x=1°=\frac{\pi}{180}$，$f'(x)=-\sin x$.

$$\cos 151°=\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)$$
$$\approx\cos\frac{5\pi}{6}-\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)\frac{\pi}{180}$$
$$=-0.86603-0.5\times 0.01745\approx -0.8747.$$

练习题　5.5

(《讲义》上册，第 201 页)

1. 求下列函数的二阶导数与二阶微分：

(2) $y=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$.

解 $y'=e^{\sqrt{x}}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$=\frac{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}.$$

$$y''=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}\left(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}\right)$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$=\frac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{4x}-\frac{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}{4\sqrt{x^3}}.$$

$$d^2y=\left(\frac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{4x}-\frac{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}{4\sqrt{x^3}}\right)dx^2.$$

(3) $y=\dfrac{x^2+1}{(x+1)^3}$.

解 $y'=\dfrac{2x(x+1)^3-(x^2+1)\cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6}$

$$=-\frac{x^2-2x+3}{(x+1)^4}.$$

$$y''=-\frac{(2x-2)(x+1)^4-(x^2-2x+3)\cdot 4(x+1)^3}{(x+1)^8}$$

$$=\frac{2(x^2-4x+7)}{(x+1)^5}.$$

$$d^2y=\frac{2(x^2-4x+7)}{(x+1)^5}dx^2.$$

2. 求下列方程确定的隐函数 $y=f(x)$ 的二阶导数：

(2) $y^2=2px$.

解 $2yy'=2p$ 或 $yy'=p$. 解得 $y'=\dfrac{p}{y}$.

再对 $yy'=p$ 关于 x 求导，有 $y'^2+yy''=0$，解得

$$y''=-\frac{y'^2}{y}=-\frac{p^2}{y^3}.$$

(4) $y^2+2\ln y=x^4$.

解 $2yy'+\frac{2}{y}y'=4x^3$ 或 $y^2y'+y'=2x^3y$,解得

$$y'=\frac{2x^3y}{1+y^2}.$$

再对 $y^2y'+y'=2x^3y$ 关于 x 求导,有

$$2y(y')^2+y^2y''+y''=6x^2y+2x^3y'.$$

解得 $y''=\frac{6x^2y+2x^3y'-2y(y')^2}{1+y^2}$

$$=\frac{2x^2y[3(1+y^2)^2+2x^4(1-y^2)]}{(1+y^2)^3}.$$

3. 求下列函数的 n 阶导数:

(2) $y=\frac{1-x}{1+x}$.

解 设 $u(x)=\frac{1}{1+x}$, $v(x)=1-x$.

$u'(x)=[(1+x)^{-1}]'=-(1+x)^{-2}$,

$u''(x)=2!\,(1+x)^{-3}$,

…

$u^{(n)}(x)=(-1)^n n!\,(1+x)^{-(n+1)}$.

$v'(x)=-1$,

$v''(x)=0$.

由莱布尼兹公式,有

$$y^{(n)}=C_n^0\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}(1-x)+C_n^1\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n-1)}(1-x)'$$

$$=(-1)^n n!(1+x)^{-(n+1)}(1-x)$$

$$+n(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}(-1)$$

$$=(-1)^n n!(1+x)^{-n}\left(\frac{1-x}{1+x}+1\right)$$

$$=(-1)^n\frac{2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

(4) $y=(x^2+2x+2)e^{-x}$.

解 设 $u(x)=e^{-x}$, $v(x)=x^2+2x+2$.

$u'(x)=-e^{-x}$, $v'(x)=2x+2=2(x+1)$,

$u''(x)=e^{-x}$, $v''(x)=2$,

… $v'''(x)=0$.

$u^{(n)}(x)=(-1)^n e^{-x}$.

由莱布尼兹公式,有

$$y^{(n)}=C_n^0(e^{-x})^{(n)}(x^2+2x+2)+C_n^1(e^{-x})^{(n-1)}\cdot 2(x+1)$$
$$+C_n^2(e^{-x})^{(n-2)}\cdot 2$$
$$=(-1)^n e^{-x}(x^2+2x+2)+n(-1)^{n-1}e^{-x}\cdot 2(x+1)$$
$$+\frac{n(n-1)}{2!}(-1)^{n-2}e^{-x}\cdot 2$$
$$=(-1)^n e^{-x}[x^2-2(n-1)x+(n-1)(n-2)].$$

5. 已知 $e^{xy}=a^xb^y$,证明:$(y-\ln a)y''-2(y')^2=0$.

证 首先将 $e^{xy}=a^xb^y$ 改写为 $xy=x\ln a+y\ln b$. 应用隐函数求导法,有

$$y+xy'=\ln a+y'\ln b, \text{解得 } y'=\frac{y-\ln a}{\ln b-x}.$$

再对 $y+xy'=\ln a+y'\ln b$ 关于 x 求导,有

$$y'+y'+xy''=y''\ln b,$$

解得
$$y''=\frac{2y'}{\ln b-x}=\frac{2(y-\ln a)}{(\ln b-x)^2}.$$

于是,

$$(y-\ln a)y''-2(y')^2$$
$$=(y-\ln a)\frac{2(y-\ln a)}{(\ln b-x)^2}-2\left(\frac{y-\ln a}{\ln b-x}\right)^2=0.$$

6. 设函数 $z=g(y)$,$y=f(x)$都存在二阶导数,求复合函数 $z=g[f(x)]$的二阶导数.

解 已知 $z'=\{g[f(x)]\}'=g'(y)\cdot f'(x)$,$y$ 是 x 的函数.

$$z''=\{g[f(x)]\}''=g''(y)\cdot f'(x)\cdot f'(x)+g'(y)f''(x)$$
$$=g''(y)\cdot[f'(x)]^2+g'(y)f''(x).$$

7. 已知参数方程 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 和 y 关于 x 的导数公式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt},$$

证明：$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}\right)\Big/\frac{dx}{dt}$

$$=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

证 已知 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}$，有

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}\right)\Big/\frac{dx}{dt}$$

$$=\frac{d}{dt}\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]\Big/\varphi'(t)$$

$$=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^2}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$$

$$=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

9. 设有 n 次多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$. 证明：若将它改写为

$$f(x)=b_n(x-a)^n+b_{n-1}(x-a)^{n-1}+\cdots+b_0,$$

则 $$b_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(a),k=0,1,2,\cdots,n,\quad f^{(0)}(a)=f(a).$$

证 $f(x)=b_n(x-a)^n+b_{n-1}(x-a)^{n-1}+\cdots+b_0$,

$f'(x)=nb_n(x-a)^{n-1}+(n-1)b_{n-1}(x-a)^{n-2}+\cdots+b_1$,

$f''(x)=n(n-1)b_n(x-a)^{n-2}+(n-1)(n-2)b_{n-1}(x-a)^{n-3}$
$+\cdots+2!b_2$,

…

$f^{(k)}(x)=n(n-1)\cdots(n-k+1)b_n(x-a)^{n-k}+(n-1)(n-2)$
$\cdots(n-k)b_{n-1}(x-a)^{n-k-1}+\cdots+k!\ b_k$,

…

其中 $k=0,1,2,\cdots,n$. 令 $x=a$，有

$$f^{(k)}(a)=k!b_k \qquad 或 \qquad b_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(a).$$

10. 证明：函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

在 $x=0$ 存在任意阶导数，且 $f^{(n)}(0)=0$，$n=1,2,\cdots$.

证 首先，$\forall\, x\neq 0$，$\forall\, k\in\mathbf{N}$，求 $f^{(k)}(x)$。

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, \qquad f''(x)=\left(\frac{4}{x^6}-\frac{6}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},\cdots.$$

设 $\forall\, m\in\mathbf{N}$，$P_m\left(\frac{1}{x}\right)$ 表示 $\frac{1}{x}$ 的 m 次多项式，从而

$$f'(x)=P_3\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, \qquad f''(x)=P_6\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

不难用归纳法证明，$\forall\, k\in\mathbf{N}$，有

$$f^{(k)}(x)=P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

事实上，设 $f^{(k-1)}(x)=Q_{3(k-1)}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$，

其中 $Q_{3(k-1)}\left(\frac{1}{x}\right)$ 是 $\frac{1}{x}$ 的 $3(k-1)$ 次多项式. 有

$$\begin{aligned}f^{(k)}(x)&=Q_{3(k-1)}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}+Q'_{3(k-1)}\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\\&=\left[Q_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)-Q'_{3(k-1)}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}\right]e^{-\frac{1}{x^2}}\\&=P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},\end{aligned}$$

其中 $P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)=Q_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)-Q'_{3(k-1)}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}$ 是 $\frac{1}{x}$ 的 $3k$ 次多项式.

其次，证明：$\forall\, k\in\mathbf{N}$，$\lim\limits_{y\to\infty}\frac{y^k}{e^{y^2}}=0$.

事实上，$\forall\, y:|y|\geqslant 1$，$\exists\, n\in\mathbf{N}$，使 $n\leqslant|y|<n+1$. 当 $\forall\, n>k$ 时，有（$y\to\infty\Longleftrightarrow n\to\infty$）

$$\left|\frac{y^k}{e^{y^2}}\right| \leqslant \frac{(n+1)^k}{e^{n^2}} < \frac{(n+1)^k}{(1+1)^{n^2}}$$

$$< \frac{(n+1)^k}{\dfrac{n^2(n^2-1)\cdots(n^2-k+1)}{k!}}$$

$$= k!\frac{(n+1)^k}{n^{2k}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{k-1}{n^2}\right)} \to 0(n\to\infty),$$

即 $\forall\ k\in\mathbf{N}$,有$\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{y^k}{e^{y^2}}=0$. 设 $y=\dfrac{1}{x}$,$\forall\ k\in\mathbf{N}$,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{1}{x}\right)^k}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{y\to\infty}\frac{y^k}{e^{y^2}} = 0,$$

于是,$\forall\ m\in\mathbf{N}$,也有

$$\lim_{x\to 0}\frac{P_m\left(\dfrac{1}{x}\right)^*}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0. \tag{1}$$

最后证明,$\forall\ n\in\mathbf{N}$,有 $f^{(n)}(0)=0$.(用导数与高阶导数的定义). 用归纳法,当 $n=1$ 时,由(1)式,有

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0.$$

设 $f^{(n)}(0)=0$. 由(1)式,有

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{P_{3n}\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}P_{3n}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{P_{3n+1}\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0.$$

于是，$\forall\ n \in \mathbf{N}$，有 $f^{(n)}(0)=0$.

*　　*　　*　　*

11. 证明：若$\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$，有 $f'(x)>0$，且 $f''(x_0)$存在，则函数 $y=f(x)$的反函数 $x=\varphi(y)$在 $y_0=f(x_0)$存在二阶导数，且

$$\varphi''(y_0) = -\frac{f''(x_0)}{[f'(x_0)]^3}.$$

证　首先证明，函数 $y=f(x)$在$(x_0-\delta, x_0+\delta)$严格增加.

已知 $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$，有$(y \in (x_0-\delta, x_0+\delta))$

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0.$$

根据极限的保序性，$\exists\ \eta_x>0$，当$|y-x|<\eta_x$ 时，有

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0.$$

当 $y>x$ 时，有 $f(y)>f(x)$；当 $y<x$ 时，有 $f(y)<f(x)$. 于是，$\forall\ x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$都存在邻域$(x-\eta_x, x+\eta_x)$，使函数 $f(x)$在$(x-\eta_x, x+\eta_x)$严格增加.

$\forall x, y \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$，且 $x<y$. 根据有限覆盖定理，存在两两相交的有限个开区间$(x_i-\eta_{x_i}, x_i+\eta_{x_i})$，$i=1,2,\cdots,n$，其中 $x_1=x$，$x_n=y$且 $x_1<x_2<\cdots<x_n$，也覆盖闭区间$[x,y]$，即

$$[x,y] \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i - \eta_{x_i}, x_i + \eta_{x_i}).$$

取 $a_i \in (x_i, x_{i+1})$，$i=1,2,\cdots,n-1$，且 $a_i \in (x_i-\eta_{x_i}, x_i+\eta_{x_i}) \cap (x_{i+1}-\eta_{x_{i+1}}, x_{i+1}+\eta_{x_{i+1}})$. 于是，有

$$f(x) < f(a_1) < f(a_2) < \cdots < f(a_{n-1}) < f(y),$$

即函数 $f(x)$在$(x_0-\delta, x_0+\delta)$严格增加.

根据§3.2 定理 7，函数 $y=f(x)$在$(x_0-\delta, x_0+\delta)$存在反函数 $x=\varphi(y)$，且它在$(f(x_0-\delta), f(x_0+\delta))$连续，也严格增加.

其次证明，反函数 $x=\varphi(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 存在二阶导数.

根据§5.2定理4，$\forall y\in(f(x_0-\delta),f(x_0+\delta))$，有

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

任取 $\Delta y\neq 0$，使 $y_0+\Delta y\in(f(x_0-\delta),f(x_0+\delta))$，从而，有

$$\Delta x=\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)\neq 0.$$

$x_0+\Delta x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$，$f(x_0+\Delta x)=y_0+\Delta y$，且 $\Delta y\to 0\Longleftrightarrow\Delta x\to 0$. 于是

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\varphi'(y_0+\Delta y)-\varphi'(y_0)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{f'(x_0+\Delta x)}-\dfrac{1}{f'(x_0)}}{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}}{f'(x_0)f'(x_0+\Delta x)\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$$

$$=-\frac{f''(x_0)}{[f'(x_0)]^3},$$

即 $$\varphi''(y_0)=-\frac{f''(x_0)}{[f'(x_0)]^3}.$$

12. 证明：函数 $f(x)$ 是 n 次多项式，a 是方程 $f(x)=0$ 的 $k(k\leqslant n)$ 重根$\Longleftrightarrow$

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(k-1)}(a)=0,\text{而 } f^{(k)}(a)\neq 0,$$

证 $\Rightarrow$ 若 a 是方程 $f(x)=0$ 的 k 重根($k\leqslant n$)，则

$$f(x)=(x-a)^k g(x),$$

其中 $g(x)$ 是 $n-k$ 次多项式，且 $g(a)\neq 0$. 由莱布尼兹公式，$\forall m=1,2,\cdots,k-1,k$，有

$$f^{(m)}(x)=C_m^0[(x-a)^k]^{(m)}g(x)$$
$$+C_m^1[(x-a)^k]^{(m-1)}g'(x)+\cdots$$

$$+ C_m^{(l-1)}[(x-a)^k]^{(m-(l-1))} g^{(l-1)}(x)$$

$$+ C_m^l[(x-a)^k]^{(m-l)} g^{(l)}(x)$$

$$+ \cdots + C_m^m (x-a)^k g^{(m)}(x). \tag{1}$$

当 $m \leqslant k-1$ 时，(1)式等号右端每项都含有 $x-a$ 的因式，于是

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0.$$

当 $m=k$ 时，(1)式等号右端第一项是 $k!g(x)$，其余各项都含有 $x-a$ 的因式. 于是

$$f^{(k)}(a) = k!g(a) \neq 0.$$

$\Leftarrow$ 由第 9 题知，任意 n 次多项式都可改写为关于 $x-a$ 的 n 次多项式，即

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$+ \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} + \cdots + f(a).$$

已知 $f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(k-1)}(a)=0$，而 $f^{(k)}(a)\neq 0$，则

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$= (x-a)^k\left[\frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a) + \right.$$

$$\left. \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-k}\right]$$

$$= (x-a)^k g(x).$$

其中 $g(x)=\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}+\dfrac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-k}$ 是 $n-k$ 次多项式，且 $g(a)=\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}\neq 0$. 于是，$a$ 是方程 $f(x)=0$ 的 k 重根.

13. 证明：勒让德多项式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

满足微分方程

$$(1-x^2)P_n''(x)-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)=0. \tag{1}$$

证 设 $y=(x^2-1)^n$，有

$$y'=2nx(x^2-1)^{n-1} \quad 或 \quad (x^2-1)y'=2nxy.$$

对上式等号两端应用莱布尼兹公式，求 $n+1$ 阶导数，

$u(x)=y'$， $v(x)=x^2-1$.	$u(x)=y, v(x)=2nx$.
$u^{(k)}(x)=y^{(k+1)}, v'(x)=2x$,	$u^{(k)}=y^{(k)}, v'=2n$.
$v''(x)=2$.	

有
$$C_{n+1}^0 y^{(n+2)}(x^2-1)+C_{n+1}^1 y^{(n+1)}2x+C_{n+1}^2 y^{(n)}\cdot 2$$
$$=C_{n+1}^0 y^{(n+1)}\cdot 2nx+C_{n+1}^1 y^{(n)}\cdot 2n$$

或
$$(x^2-1)y^{(n+2)}+2(n+1)xy^{(n+1)}+n(n+1)y^{(n)}$$
$$=2nxy^{(n+1)}+2n(n+1)y^{(n)},$$

即
$$(x^2-1)y^{(n+2)}+2xy^{(n+1)}-n(n+1)y^{(n)}=0, \tag{2}$$

由勒让德多项式和已知 $y=(x^2-1)^n$，有

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n=\frac{1}{2^n n!}y^{(n)}$$

或
$$y^{(n)}=2^n n!P_n(x).$$

于是，
$$y^{(n+1)}=2^n n!P_n'(x), \quad y^{(n+2)}=2^n n!P_n''(x).$$

将它们代入(2)式，有

$$(x^2-1)P_n''(x)+2xP_n'(x)-n(n+1)P_n(x)=0$$

或
$$(1-x^2)P_n''(x)-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)=0,$$

即勒让德多项式 $P_n(x)$ 满足微分方程(1).

第六章　微分学基本定理及其应用

练习题　6.1

（《讲义》上册，第 212 页）

3. 证明：若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 有正根 x_0，则方程

$$na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$$

必存在小于 x_0 的正根．

证　设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x$.

已知 $f(0)=f(x_0)=0\quad(x_0>0)$，从而函数 $f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 满足洛尔定理的条件．于是，$\exists\ \xi\in(0,x_0)$，使

$$f'(\xi)=0,$$

即方程 $f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 存在小于 x_0 的正根．

4. 证明：方程 $x^3-3x+c=0$ 在区间 $(0,1)$ 内没有两个不同的实根．

证　用反证法．假设方程 $f(x)=x^3-3x+c=0$ 有两个不同的实根 $x_1,x_2\in(0,1)$，不妨设 $x_1<x_2$．显然，函数 $f(x)=x^3-3x+c$ 在 $[x_1,x_2]$ 满足洛尔定理的条件．于是，$\exists\ \xi\in(x_1,x_2)$，使

$$f'(\xi)=3\xi^2-3=3(\xi+1)(\xi-1)=0.$$

显然，这样的 $\xi\in(x_1,x_2)\subset[0,1]$ 是不存在的．矛盾，即方程 $x^3-3x+c=0$ 在区间 $(0,1)$ 内没有两个不同的实根．

7. 证明：若 $\forall\ x\in\mathbf{R}$，有 $f'(x)=a$，则 $f(x)=ax+b$.

证　任意取定一点 $x_0\in\mathbf{R}$，$\forall\ x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq x_0$．根据微分中值定理，有

$$f(x)-f(x_0)=f'(c_x)(x-x_0)=a(x-x_0).$$

其中 c_x 在 x 与 x_0 之间．当 $x=x_0$ 时，它也成立．于是，$\forall\ x\in\mathbf{R}$，有

$$f(x)=ax+f(x_0)-ax_0=ax+b,$$

其中 $b=f(x_0)-ax_0$ 是常数．

8．证明：若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，且 $f(a)<f(b)$，则在(a,b)内至少存在一点 c，使 $f'(c)>0$.

证　已知函数 $f(x)$ 在$[a,b]$满足微分中值定理的条件，有

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

其中 $c\in(a,b)$．已知 $a<b$ 与 $f(a)<f(b)$，有

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0,$$

即在(a,b)内至少存在一点 c，使 $f'(c)>0$.

9．证明下列不等式：

(1)　$|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$.

证　当 $x=y$ 时，显然成立．当 $x\neq y$ 时，根据微分中值定理，有

$$\sin x-\sin y=\cos c\cdot(x-y).$$

其中 c 在 x 与 y 之间．于是

$$|\sin x-\sin y|=|\cos c||x-y|\leqslant|x-y|.$$

(3)　$ay^{a-1}(x-y)<x^a-y^a<ax^{a-1}(x-y)$，　$a>1,0<y<x$.

证　根据微分中值定理，$\exists\ c\in(y,x)$，有

$$x^a-y^a=a\cdot c^{a-1}(x-y).$$

已知　$y^{a-1}<c^{a-1}<x^{a-1}$，则

$$ay^{a-1}(x-y)<x^a-y^a<ax^{a-1}(x-y).$$

(5)　$\dfrac{1}{n^p}<\dfrac{1}{p-1}\left(\dfrac{1}{(n-1)^{p-1}}-\dfrac{1}{n^{p-1}}\right)$，　$p>1,n\geqslant2$.

证　$\forall n\geqslant2$，考虑函数

$$f(x)=\frac{1}{x^{p-1}},\qquad[n-1,n].$$

根据微分中值定理，$\exists\ c\in[n-1,n]$，有

$$\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}=-\frac{p-1}{c^p}[(n-1)-n]=\frac{p-1}{c^p}.$$

已知$\frac{1}{c^p}>\frac{1}{n^p}$. 于是，

$$\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}>\frac{p-1}{n^p}$$

或

$$\frac{1}{n^p}<\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right).$$

10. 证明：

(1) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x=\frac{\pi}{2}$.

证 $\forall x\in\mathbf{R}$，有

$$(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0.$$

由§6.1的例1，有

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x=C(\text{常数}).$$

令$x=0$，有$C=\frac{\pi}{2}$，即

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x=\frac{\pi}{2}.$$

(2) $2\operatorname{arctg}x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi\operatorname{sgn}x$, $|x|\geq 1$.

证 $\forall x$: $x>1$ 或 $x<-1$，有

$$\left(2\operatorname{arctg}x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)'$$

$$=\frac{2}{1+x^2}+\frac{2}{1+x^2}\frac{1-x^2}{|1-x^2|}$$

$$=\frac{2}{1+x^2}\left(1+\frac{1-x^2}{|1-x^2|}\right)=0.$$

由§6.1的例1，在区间$(1,+\infty)$或$(-\infty,-1)$，有

$$2\operatorname{arctg}x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=C(\text{常数}).$$

令 $x=\pm\sqrt{3}$，有

$$2\operatorname{arctg}(\pm\sqrt{3})+\arcsin\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\pm\frac{2\pi}{3}\pm\frac{\pi}{3}=\pm\pi=C,$$

即当 $x>1$ 时，$C=\pi$；当 $x<-1$ 时，$C=-\pi$. 于是，$|x|>1$，有

$$2\operatorname{arctg}x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi\operatorname{sgn}x.$$

当 $x=\pm1$ 时，上式也成立．于是，$\forall x: |x|\geqslant1$，有

$$2\operatorname{arctg}x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi\operatorname{sgn}x.$$

11. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 可导，且 $\forall x\in(a,+\infty)$，有 $|f'(x)|\leqslant M$，其中 M 是常数，则 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 一致连续．

证　$\forall x_1,x_2\in(a,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，根据微分中值定理，有

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f'(\xi)||x_2-x_1|\leqslant M|x_2-x_1|,$$

其中 ξ 在 x_1 与 x_2 之间. 要使不等式

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant M|x_2-x_1|<\varepsilon$$

成立，从不等式 $M|x_2-x_1|<\varepsilon$ 解得 $|x_2-x_1|<\frac{\varepsilon}{M}$. 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$，于是

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\frac{\varepsilon}{M}>0,\forall x_1,x_2\in(a_1+\infty):|x_2-x_1|<\delta$，有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon,$$

即 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 一致连续．

12. 证明：若 $\forall x,y\in\mathbf{R}$，有 $|f(x)-f(y)|\leqslant M(x-y)^2$，其中 M 是常数，则 $f(x)$ 是常数函数。

证　$\forall x,y\in\mathbf{R}$，且 $x\neq y$，有

$$0\leqslant\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\leqslant M|x-y|.$$

已知 $\lim\limits_{y\to x}|x-y|=0$. 根据两边夹定理，有

$$\lim_{y\to x}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=0.$$

再由练习题 2.2 第 1 题，有

$$\lim_{y\to x}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=0,$$

即$\forall\ x\in\mathbf{R}$，函数$f(x)$在 x 可导，且 $f'(x)=0$. 由 §6.1 例 1，函数$f(x)$是常数函数.

13. 证明：若函数 $f(x)$在$[0,a)$可导，$f'(x)$单调增加，且 $f(0)=0$，则函数$\frac{f(x)}{x}$在$(0,a)$也单调增加.

证 $\forall\ x_1,x_2\in(0,a)$，且 $x_1<x_2$，有

$$\frac{f(x_2)}{x_2}-\frac{f(x_1)}{x_1}=\frac{x_1f(x_2)-x_2f(x_1)}{x_1x_2}$$

$$=\frac{x_1f(x_2)-x_1f(x_1)+x_1f(x_1)-x_2f(x_1)}{x_1x_2}$$

$$=\frac{x_1[f(x_2)-f(x_1)]+(x_1-x_2)[f(x_1)-f(0)]}{x_1x_2}$$

$$(f(0)=0)$$

$$=\frac{x_1f'(\xi_2)(x_2-x_1)+(x_1-x_2)f'(\xi_1)\cdot x_1}{x_1x_2}$$

$$=\frac{x_1(x_2-x_1)[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]}{x_1x_2}$$

其中 $0<\xi_1<x_1<\xi_2<x_2$. 已知 $f'(\xi_1)\leqslant f'(\xi_2)$，有

$$\frac{f(x_2)}{x_2}-\frac{f(x_1)}{x_1}\geqslant 0\text{ 或}\frac{f(x_1)}{x_1}\leqslant\frac{f(x_2)}{x_2},$$

即函数$\frac{f(x)}{x}$在$(0,a)$单调增加.

14. 证明：若函数 $f(x)$在 x_0 连续，且$\forall\ x\in(x_0-\delta,x_0)$，有 $f'(x)<0$，$\forall\ x\in(x_0,x_0+\delta)$，有 $f'(x)>0$，则 x_0 是函数 $f(x)$的极小点.

证 根据微分中值定理，已知$\forall\ x\in(x_0-\delta,x_0)$，有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(c_1)<0,$$

其中 $x<c_1<x_0$. 从而，有 $f(x)>f(x_0)$.

同样，已知$\forall\ x\in(x_0,x_0+\delta)$，有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(c_2)>0,$$

其中 $x_0<c_2<x$. 从而,有 $f(x)>f(x_0)$.

于是,$\forall\ x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$,有

$$f(x)\geqslant f(x_0),$$

即 x_0 是函数 $f(x)$的极小点.

* * * *

15. 证明:若 $c_0+\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{3}+\cdots+\frac{c_n}{n+1}=0$, $c_0,c_1,\cdots,c_n$ 是常数,则方程

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n=0$$

在(0,1)内至少有一个实根.

证 考虑函数

$$f(x)=c_0x+\frac{c_1}{2}x^2+\frac{c_2}{3}x^3+\cdots+\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}.$$

当 $x=0$ 时,有 $f(0)=0$.

当 $x=1$ 时,有 $f(1)=c_0+\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{3}+\cdots+\frac{c_n}{n+1}=0$.

根据洛尔定理,$\exists\ c\in(0,1)$,使

$$f'(c)=c_0+c_1c+c_2c^2+\cdots+c_nc^n=0,$$

即方程 $c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n=0$ 在(0,1)内至少有一个实根.

16. 证明:若函数 $f(x)$在$(a,+\infty)$可导,且 $\forall\ x\in(a,+\infty)$,有 $|f'(x)|\leqslant M$, M 是常数,则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0.$$

证 任意取定一点 $x_0\in(a,+\infty)$, $\forall\ x\in(a,+\infty)$,有

$$\left|\frac{f(x)}{x^2}\right|=\left|\frac{f(x)-f(x_0)+f(x_0)}{x^2}\right|$$

$$=\left|\frac{f'(c)(x-x_0)+f(x_0)}{x^2}\right|\leqslant\frac{M|x-x_0|+|f(x_0)|}{x^2},$$

其中 c 在 x 与 x_0 之间. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{M|x-x_0|+|f(x_0)|}{x^2}=0$,根据

两边夹法则，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0.$$

17. 证明：若 n 次多项式 $P(x)$ 有 $n+1$ 个零点（即方程 $P(x)=0$ 的实根），则 $p(x)\equiv 0$.

证明　设 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$.

用反证法　假设 $P(x)\not\equiv 0$，则 n 次多项式 $P(x)$ 的 x^n 的系数 $a_0\neq 0$. 分两种情况证明：

1. 设 $P(x)$ 有 $n+1$ 个不同的零点：$x_0,x_1,\cdots,x_n$，即 $P(x_i)=0$，$i=0,1,\cdots,n$. 不妨设 $x_0<x_1<\cdots<x_n$. 根据洛尔定理，$P'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$ 有 n 个不同的零点，且 $P'(x)$ 的零点都在 $P(x)$ 相邻的两个零点之间. 同样的方法，一直作下去，则

$$P^{(n-1)}(x)=n(n-1)\cdots 2a_0x+(n-1)!a_1$$

有两个不同的零点 ξ_1 与 ξ_2. 再根据洛尔定理，$P^{(n)}(x)=n!a_0$（非零常数）在 ξ_1 与 ξ_2 之间有一零点，这是不可能的，矛盾. 于是，$P(x)\equiv 0$.

2. 设 $P(x)$ 的 $n+1$ 个零点中有一个 x_0 是 k 重零点（$k\leqslant n+1$）：$x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-k+1}$，即 $P(x_i)=0,i=0,1,2\cdots,n-k+1$. 此时，$P(x)$ 可表为 $P(x)=a_0(x-x_0)^kQ(x)$，其中 $Q(x)$ 是 $n-k$ 次多项式，且 $Q(x_0)\neq 0$. 有

$$\begin{aligned}P'(x)&=ka_0(x-x_0)^{k-1}Q(x)+a_0(x-x_0)^kQ'(x)\\&=a_0(x-x_0)^{k-1}[kQ(x)+(x-x_0)Q'(x)]\\&=a_0(x-x_0)^{k-1}Q_1(x),\end{aligned}$$

其中 $Q_1(x)=kQ(x)+(x-x_0)Q'(x)$ 是 $n-k$ 次多项式（因为 $P'(x)$ 是 $n-1$ 次多项式），且 $Q_1(x_0)\neq 0$. 显然，x_0 是 $P'(x)$ 的 $k-1$ 重零点，根据洛尔定理，$P'(x)$ 仍有 $n-k+2$ 个不同的零点. 同样的方法，一直作下去，x_0 是 $P^{(k-1)}(x)$ 的一个重零点（即零点）. 根据洛尔定理，$P^{(k-1)}(x)$ 仍有 $n-k+2$ 个不同的零点. 由上述第一种情况（$k=n+1$），$P^{(n)}(x)=n!a_0$（非零常数）有一个零点，这是不可能的，矛盾. 于

是，$P(x)\equiv 0$.

18. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 可导，且

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x),$$

则在 $(a,+\infty)$ 内至少有一点 c，使 $f'(c)=0$.

证 设 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

若 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 是常数函数，即 $f(x)=A$，则 $\forall c\in(a,+\infty)$，有 $f'(c)=0$.

若 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 不是常数函数，不妨设 $\exists x_0\in(a,+\infty)$ 使 $f(x_0)>A$，即

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = A < f(x_0).$$

根据函数极限的保序性（§2.4 定理 3）.

$\exists x_1\in(a,x_0)$，使 $f(x_1)<f(x_0)$；$\exists x_2\in(x_0,+\infty)$，使 $f(x_0)>f(x_2)$.

已知 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 连续，则函数 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 取到最大值，显然最大点不能是区间 $[x_1,x_2]$ 的端点 x_1 和 x_2，只能在开区间 (x_1,x_2) 之内，此时的最大点就是极大点，设此极大点是 c. 因为可导函数 $f(x)$ 的极大点 c 必是稳定点，所以 $f'(c)=0$. 于是，在 $(a,+\infty)$ 内至少有一点 c，使 $f'(c)=0$.

19. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导 $(0<a<b)$，则 $\exists c\in(a,b)$，使

$$f(b)-f(a) = cf'(c)\ln\frac{b}{a}.$$

并用此结果证明

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{\xi}-1) = \ln\xi \quad (\xi>0).$$

证 根据柯西中值定理，$\exists c\in(a,b)$ 使

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a} = \frac{f'(c)}{\frac{1}{c}}$$

或 $$f(b)-f(a)=cf'(c)\ln\frac{b}{a}.$$

取 $f(x)=\sqrt[n]{x}$，$a=1,b=\xi$ 或 $a=\xi,b=1$，有 $f'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$，

$$f(b)-f(a)=f(\xi)-f(a)=\sqrt[n]{\xi}-1=c\cdot\frac{1}{n}c^{\frac{1}{n}-1}\ln\frac{\xi}{1}$$

或 $f(b)-f(a)=f(1)-f(\xi)=1-\sqrt[n]{\xi}=c\cdot\frac{1}{n}c^{\frac{1}{n}}\ln\frac{1}{\xi}$，

于是总有 $$n(\sqrt[n]{\xi}-1)=c^{\frac{1}{n}}\ln\xi,$$
其中 $1<c<\xi$ 或 $0<a=\xi<c<1$（常数 $\xi>0$）. 从而
$$1<c^{\frac{1}{n}}<\xi^{\frac{1}{n}} \text{ 或 } \xi^{\frac{1}{n}}<c^{\frac{1}{n}}<1.$$
已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi^{\frac{1}{n}}=1$（见 §2.1 例6）. 根据两边夹定理，$\lim\limits_{n\to\infty}c^{\frac{1}{n}}=1$. 于是 $\xi>0,\xi\neq1$ 时，有
$$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{\xi}-1)=\lim_{n\to\infty}c^{\frac{1}{n}}\ln\xi=\ln\xi.$$
当 $\xi=1$ 时，此等式当然成立.

21. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 存在二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，$f(c)>0$，其中 $a<c<b$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)<0$.

证 根据微分中值定理，有
$$\begin{aligned}f(c)&=f(c)-f(a)\\&=f'(\xi_1)(c-a)>0,\quad a<\xi_1<c.\\f(c)&=f(c)-f(b)\\&=f'(\xi_2)(c-b)>0,\quad c<\xi_2<b.\end{aligned}$$
于是，$f'(\xi_1)>0$ 与 $f'(\xi_2)<0$，而 $a<\xi_1<c<\xi_2<b$.

再根据微分中值定理，有
$$f'(\xi_2)-f'(\xi_1)=f''(\xi)(\xi_2-\xi_1)<0,\quad \xi_1<\xi<\xi_2$$
于是，$f''(\xi)<0$，即 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)<0$.

22. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 存在二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 c，使

$$|f''(c)| \geqslant \frac{2}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证 根据微分中值定理，有

$$\begin{aligned}
f(b)-f(a) &= f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a) \\
&= f'(c_2)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)+f'(c_1)\left(\frac{a+b}{2}-a\right) \\
&= [f'(c_2)+f'(c_1)]\frac{b-a}{2} \\
&= [f'(c_2)-f'(b)+f'(c_1)-f'(a)]\frac{b-a}{2} \\
&= [f''(\xi_2)(c_2-b)+f''(\xi_1)(c_1-a)]\frac{b-a}{2},
\end{aligned}$$

其中 $a<c_1<\frac{a+b}{2}<c_2<b, a<\xi_1<c_1<\frac{a+b}{2}<c_2<\xi_2<b$，有

$$|c_2-b|<\frac{b-a}{2}, \qquad |c_1-a|<\frac{b-a}{2}.$$

设 $|f''(c)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$，于是，有

$$\begin{aligned}
|f(b)-f(a)| &\leqslant (|f''(\xi_2)||c_2-b|+|f''(\xi_1)||c_1-a|)\frac{b-a}{2} \\
&\leqslant 2|f''(c)|\frac{(b-a)^2}{4}=|f''(c)|\frac{(b-a)^2}{2},
\end{aligned}$$

即 $$|f''(c)| \geqslant \frac{2}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

23. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导，且 $f(0)=0, \forall x\in[0,1]$，有 $|f'(x)|\leqslant|f(x)|$，则 $f(x)=0, x\in[0,1]$.

证 $\forall x\in(0,1)$，有

$$\begin{aligned}
&|f(x)| = |f(x)-f(0)| = |f'(\xi_1)|x \leqslant |f(\xi_1)|x \\
&= |f(\xi_1)-f(0)|x = |f'(\xi_2)|\xi_1 x \leqslant |f(\xi_2)|x^2 \\
&= |f(\xi_2)-f(0)|x^2 = |f'(\xi_3)|\xi_2 x^2 \leqslant |f(\xi_3)|x^3 \\
&= \cdots \leqslant |f(\xi_n)|x^n,
\end{aligned}$$

其中 $0<\xi_n<\xi_{n-1}<\cdots<\xi_2<\xi_1<x$. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，从而

$f(x)$在$[0,1]$有界，即$\exists M>0,\forall x\in[0,1]$，有$|f(x)|\leqslant M$. 于是，$\forall x\in[0,1)$，有

$$|f(x)|\leqslant|f(\xi_n)|x^n\leqslant Mx^n.$$

已知$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0\ (0\leqslant x<1)$，则$\forall x\in[0,1)$，有$f(x)=0$.

因为$f(x)$在点1左连续，所以$f(1)=0$. 于是，$\forall x\in[0,1]$，有

$$f(x)=0$$

24. 证明：若函数$f(x)$在$\mathbf{R}$可导，$\forall x\in\mathbf{R}$，$|f'(x)|\leqslant k$，且$k<1$，则函数$f(x)$存在不动点x，即$f(x)=x$.

证 任意取定一点$x_0\in\mathbf{R}$，令

$$x_1=f(x_0),x_2=f(x_1),\cdots,x_n=f(x_{n-1}),\cdots$$

得到一个数列$\{x_n\}$. 下面应用柯西收敛准则证明，数列$\{x_n\}$收敛.

$\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-x_n|&=|f(x_n)-f(x_{n-1})|=|f'(\xi_n)||x_n-x_{n-1}|\\&\leqslant k|x_n-x_{n-1}|=k|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})|\\&=k|f'(\xi_{n-1})||x_{n-1}-x_{n-2}|\\&\leqslant k^2|x_{n-1}-x_{n-2}|\leqslant\cdots\leqslant k^{n-1}|f'(\xi_1)||x_1-x_0|\\&\leqslant k^n|x_1-x_0|,\end{aligned}$$

其中$x_{i-1}<\xi_i<x_i,i=1,2,\cdots,n$. $\forall n,p\in\mathbf{N}$，有

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n|&=|x_{n+p}-x_{n+p-1}+x_{n+p-1}-\cdots\\&\qquad-x_{n+1}+x_{n+1}-x_n|\\&\leqslant|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\\&\leqslant k^{n+p-1}|x_1-x_0|+k^{n+p-2}|x_1-x_0|+\cdots+k^n|x_1-x_0|\\&=(k^{n+p-1}+k^{n+p-2}+\cdots+k^n)|x_1-x_0|\\&=\frac{k^n-k^{n+p}}{1-k}|x_1-x_0|<\frac{k^n}{1-k}|x_1-x_0|.\end{aligned}$$

已知$\lim\limits_{n\to\infty}k^n=0\quad(0<k<1)$，即

$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N$，有$k^n<\varepsilon$，从而$\forall n,p\in\mathbf{N}$，且$n>N$，有

$$|x_{n+p}-x_n|<\frac{|x_1-x_0|}{1-k}\varepsilon,$$

其中$\frac{|x_1-x_0|}{1-k}$是正常数．根据柯西收敛准则，数列$\{x_n\}$收敛．设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. 已知$f(x)$在$\mathbf{R}$连续，则有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}f(x_{n-1})=f(\lim_{n\to\infty}x_{n-1})$$

即$x=f(x)$. 于是，函数$f(x)$存在不动点x.

练习题　6.2

（《讲义》上册，第 225 页）

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(\sin x)'}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3\sin^2 x\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{3\sqrt{1-x^2}\cos x}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sin^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{3\sqrt{1-x^2}\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{-1}{2}\cdot1=-\frac{1}{6}.$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arcctg}x}$.

解 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arcctg}x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{-1}{1+x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x(1+x)}=1.$$

(7) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\sin3x}{\ln\sin x}$

解 $$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\sin3x}{\ln\sin x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\sin3x}\cdot3\cos3x}{\frac{1}{\sin x}\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{3\cos3x}{\cos x}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{\sin3x}$$

$$=3\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{1}{3}\frac{\sin x}{x}\frac{3x}{\sin3x}=3\cdot\frac{1}{3}=1.$$

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$.

解 $$\lim_{x\to+\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1.$$

(11) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 设 $y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\sin x-\ln x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-x\sin x}{4x\sin x + 2x^2\cos x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\sin x}{4\sin x + 2x\cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-\cos x}{4\cos x + 2\cos x - 2x\sin x} = -\frac{1}{6}.$$

于是，$\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{e}}$.

(13) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\mathrm{tg}x)^{2x-\pi}$.

解 设 $y = (\mathrm{tg}x)^{2x-\pi} = e^{(2x-\pi)\ln\mathrm{tg}x}$.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (2x - \pi)\ln\mathrm{tg}x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln\mathrm{tg}x}{\frac{1}{2x - \pi}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\mathrm{tg}x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{-2}{(2x - \pi)^2}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-(2x - \pi)^2}{2\sin x\cos x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{-4(2x - \pi)}{2(\cos^2 x - \sin^2 x)} = 0.$$

于是，$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\mathrm{tg}x)^{2x-\pi} = e^0 = 1$.

(15) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\mathrm{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解 设 $y = (\mathrm{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{1}{\ln x}\ln\mathrm{ctg}x}$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\ln x}\ln\mathrm{ctg}x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln\cos x - \ln\sin x}{\ln x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x}{\sin x\cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{-1}{\cos x} = -1.$$

于是，$\lim\limits_{x \to 0^+} (\mathrm{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

2. 证明：若 $f''(a)$ 存在，则

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{h^2} = f''(a).$$

证 由洛必达法则(只能应用一次),然后应用二阶导数的定义,有

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{h^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2f'(a+2h) - 2f'(a+h)}{2h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+2h) - f'(a) + f'(a) - f'(a+h)}{h}$$

$$= 2\lim_{h \to 0} \frac{f'(a+2h) - f'(a)}{2h} - \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}$$

$$= 2f''(a) - f''(a) = f''(a).$$

* * * *

3. 问 a 与 b 取何值,有极限

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{a}{x^2} + b\right) = 0.$$

解 $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{a}{x^2} + b\right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x + ax + bx^3}{x^3}$ $\quad\left(\frac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3\cos 3x + a + 3bx^2}{3x^2} = 0.$$

当 $x \to 0$ 时,上面商式存在极限,且分母 $3x^2$ 是无穷小,则分子 $3\cos 3x + a + 3bx^2$ 也必是无穷小,即有

$$\lim_{x \to 0}(3\cos 3x + a + 3bx^2) = 3 + a = 0.$$

从中解得 $a = -3$. 于是

$$\lim_{x \to 0} \frac{3\cos 3x - 3 + 3bx^2}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos 3x - 1 + bx^2}{x^2} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-3\sin 3x + 2bx}{2x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-9\cos 3x + 2b}{2} = 0.$$

当 $x \to 0$ 时,上面的商式是无穷小,且分母是常数,则分子必是

无穷小，即

$$\lim_{x\to 0}(-9\cos 3x+2b)=-9+2b=0.$$

从中解得 $b=\frac{9}{2}$. 于是，$a=-3, b=\frac{9}{2}$.

5. 求下列极限，并指出为什么不能应用洛必达法则：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

解 因为函数 $g(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $\mathbf{R}$ 有界，而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot x=0$，即函数 $f(x)=\frac{x^2}{\sin x}(x\to 0)$ 是无穷小，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x}\cdot\sin\frac{1}{x}=0.$$

因为极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

不存在，所以求此极限不能应用洛必达法则.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

解 分子与分母同用 e^x 除之，再取极限，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1.$$

因为 $\forall n\in\mathbf{N}$，极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x-e^{-x})^{(n)}}{(e^x+e^{-x})^{(n)}}$ 都是待定型，且与原极限类似，用洛必达法则不能化简该极限，其极限只能用上面的方法求出.

6. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有界与可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=b$，则 $b=0$.

证法一

证 考虑函数 $F(x)=f(x)-bx$. 由洛必达法则，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-bx}{x}\qquad\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{[f(x)-bx]'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}[f'(x)-b]=0.$$

从而，$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-bx}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-b\right)=0,$$

即 $$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

已知 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 有界，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$. 于是

$$b=0.$$

证法二 用反证法.

证 假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=b\neq0$，不妨设 $b>0$. 由极限的保序性，$\exists A>a,\forall x\geqslant A$，有 $f'(x)\geqslant\frac{b}{2}$. 由拉格朗日定理，

$$f(A+1)-f(A)=f'(\xi)\geqslant\frac{b}{2},\qquad A<\xi<A+1.$$

或 $$f(A+1)\geqslant f(A)+\frac{b}{2}.$$

同法可证，$\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$f(A+n)\geqslant f(A+n-1)+\frac{b}{2}.$$

于是，
$$\begin{aligned}f(A+n)&\geqslant f(A+n-1)+\frac{b}{2}\\&\geqslant f(A+n-2)+2\cdot\frac{b}{2}\\&\geqslant\cdots\geqslant f(A)+n\cdot\frac{b}{2}.\end{aligned}$$

当 $n\to+\infty$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f(A)+n\cdot\frac{b}{2}\right]=+\infty$，即数列 $\{f(A+n)\}$ 无界. 从而，函数 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 无界，与已知条件矛盾. 于是，$b=0$.

练习题　6.3

（《讲义》上册，第 234 页）

1. 将下列函数在指定点展成泰勒公式（到 $n=6$）：

(2)　$f(x)=e^{-x}$，在 $x=a$.

解　已知 $f^{(n)}(x)=(-1)^n e^{-x}$，$f^{(n)}(a)=(-1)^n e^{-a}$.

于是，

$$e^{-x}=e^{-a}-\frac{e^{-a}}{1!}(x-a)+\frac{e^{-a}}{2!}(x-a)^2-\frac{e^{-a}}{3!}(x-a)^3$$

$$+\frac{e^{-a}}{4!}(x-a)^4-\frac{e^{-a}}{5!}(x-a)^5+\frac{e^{-a}}{6!}(x-a)^6+R_6(x)$$

$$=e^{-a}\left[1-\frac{x-a}{1!}+\frac{(x-a)^2}{2!}-\frac{(x-a)^3}{3!}+\frac{(x-a)^4}{4!}\right.$$

$$\left.-\frac{(x-a)^5}{5!}+\frac{(x-a)^6}{6!}\right]+R_6(x).$$

(4)　$f(x)=\sqrt{x}$，在 $x=1$.

解　$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$，$\forall\ n\in\mathbf{N}$，且 $n\geqslant 2$，有

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}x^{-\frac{2n-1}{2}}.$$

$$f(1)=1,f'(1)=\frac{1}{2},\forall\ n\geqslant 2,$$

$$f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}.$$

于是

$$\sqrt{x}=1+\frac{1}{1!}\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2!}\frac{1}{2^2}(x-1)^2$$

$$+\frac{1}{3!}\frac{3!!}{2^3}(x-1)^3-\frac{1}{4!}\frac{5!!}{2^4}(x-1)^4+\frac{1}{5!}\frac{7!!}{2^5}(x-1)^5$$

$$-\frac{1}{6!}\frac{9!!}{2^6}(x-1)^6+R_6(x)$$

$$=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3$$

$$-\frac{5}{128}(x-1)^4+\frac{7}{256}(x-1)^5$$

$$-\frac{21}{1024}(x-1)^6+R_6(x).$$

2. 将下列函数展成马克劳林公式(到指定的次数):

(1) $\sqrt[m]{a^m+x}$ $(a>0)$,到 x^2 项.

解 $$\sqrt[m]{a^m+x}=\sqrt[m]{a^m\left(1+\frac{x}{a^m}\right)}=a\left(1+\frac{x}{a^m}\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$=a\left[1+\frac{1}{m}\frac{x}{a^m}+\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)}{2!}\left(\frac{x}{a^m}\right)^2+o(x^2)\right]$$

$$=a+\frac{1}{ma^{m-1}}x+\frac{1-m}{2m^2a^{2m-1}}x^2+o(x^2).$$

(3) $\frac{x}{e^x-1}$,到 x^4 项.

解 函数$\frac{x}{e^x-1}$在点 0 没有定义,但

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}=1,$$

即点 0 是它的可去不连续点. 在点 0 作连续开拓,有

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{e^x-1}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

函数 $f(x)$在点 0 还存在任意阶导数. 设

$$\frac{x}{e^x-1}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+o(x^5).$$

由指数函数 e^x 的马克劳林公式,有

$$e^x-1=\left[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right]-1$$

$$=\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5).$$

从而，有

$$x=[a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+o(x^5)]$$
$$\times\left[\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right]$$
$$=\frac{a_0}{1!}x+\left(\frac{a_1}{1!}+\frac{a_0}{2!}\right)x^2+\left(\frac{a_2}{1!}+\frac{a_1}{2!}+\frac{a_0}{3!}\right)x^3$$
$$+\left(\frac{a_3}{1!}+\frac{a_2}{2!}+\frac{a_1}{3!}+\frac{a_0}{4!}\right)x^4$$
$$+\left(\frac{a_4}{1!}+\frac{a_3}{2!}+\frac{a_2}{3!}+\frac{a_1}{4!}+\frac{a_0}{5!}\right)x^5+o(x^5).$$

上式是恒等式，等号两端的同次幂的系数必相等，有

$$a_0=1$$
$$\frac{a_1}{1!}+\frac{a_0}{2!}=0,$$
$$\frac{a_2}{1!}+\frac{a_1}{2!}+\frac{a_0}{3!}=0,$$
$$\frac{a_3}{1!}+\frac{a_2}{2!}+\frac{a_1}{3!}+\frac{a_0}{4!}=0,$$
$$\frac{a_4}{1!}+\frac{a_3}{2!}+\frac{a_2}{3!}+\frac{a_1}{4!}+\frac{a_0}{5!}=0.$$

从中解得：$a_0=1,a_1=-\frac{1}{2},a_2=\frac{1}{12},a_3=0,a_4=-\frac{1}{720}$，于是

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+o(x^4).$$

3. 证明：若函数 $f(x)$ 在 0 的邻域是偶函数（奇函数），且 $f(x)$ 在 0 存在各阶导数，则 $f(x)$ 的马克劳林公式只含有 x 的偶数次幂（奇数次幂）的项．

证 已知 $f(x)$ 在 0 的邻域是偶函数，由练习题 5.2 第 5 题，$\forall n\in\mathbf{N}, f^{(2n-1)}(x)$ 是奇函数．不难证明，若 $f^{(2n-1)}(x)$ 是奇函数，则

$$f^{(2n-1)}(0)=0.$$

于是，$\quad f(x)=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n})$．

即它的马克劳林公式只含有 x 的偶数次幂.

同法可证,已知 $f(x)$在 0 的邻域是奇函数,有

$$f(x)=\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(2n-1)}(0)}{(2n-1)!}x^{2n-1}+o(x^{2n-1}),$$

即它的马克劳林公式只含有 x 的奇数次幂.

6. 证明:若$\forall\ x\in(a,b)$,$f''(x)\geqslant 0$,且任意 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in(a,b)$,则有不等式

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)].$$

证 令 $x_0=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$. 显然,$x_0\in(a,b)$,且 $x_1+x_2+\cdots+x_n-nx_0=0$.

将函数 $f(x)$在 x_0 展开(到二阶导数),$\forall\ x\in(a,b)$,有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(\xi_0)}{2!}(x-x_0)^2;$$

其中 ξ_0 在 x_0 与 x 之间. 在上式中,令 $x=x_i$,$i=1,2,\cdots,n$,有

$$f(x_i)=f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0)+\frac{f''(\xi_i)}{2!}(x_i-x_0)^2,$$

其中 ξ_i 在 x_0 与 x_i 之间. 已知 $\forall\ x\in(a,b)$,$f''(x)>0$,从而,有

$$f(x_i)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

将上述 n 个不等式的不等号两端分别相加得

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$$
$$\geqslant nf(x_0)+f'(x_0)(x_1+x_2+\cdots+x_n-nx_0).$$

已知 $x_1+x_2+\cdots+x_n-nx_0=0$,即

$$f(x_0)\leqslant\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$$

或 $f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$.

*　　*　　*　　*

7. 证明:若 $f^{(n+1)}(x)$在 $U(a)$连续,$a+h\in U(a)$,有

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\cdots$$

$$+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h),0<\theta<1,$$

且 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$.

证 由已知条件，可将 $f(a+h)$ 展成到 $n+1$ 阶导数，即

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

$$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta_1 h),$$

其中 $0<\theta_1<1$. 比较上述两个 $f(a+h)$ 的展开式，有

$$\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta_1 h)$$

或
$$\frac{f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)}{h}=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a+\theta_1 h).$$

由函数 $n+1$ 阶导数的定义，有

$$\lim_{h\to 0}\theta\cdot\frac{f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)}{\theta h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a+\theta_1 h),$$

即 $f^{(n+1)}(a)\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a)$ 或 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$.

8. 设 $P(x)$ 是 n 次多项式函数，证明：

1)若 $P(a),P'(a),\cdots,P^{(n)}(a)$ 都是正数，则 $P(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 无零点.

2)若 $P(a),P'(a),\cdots,P^{(n)}(a)$ 正负号相间，则 $P(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 无零点.

证 将 n 次多项式函数 $P(x)$ 在 a 展成泰勒公式：

$$P(x)=P(a)+\frac{P'(a)}{1!}(x-a)$$

$$+\frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

1)若 $P(a),P'(a),\cdots,P^{(n)}(a)$ 都是正数，则 $\forall\ x>a$，有 $P(x)>0$. 于是，$P(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 无零点.

2)若 $P(a),P'(a),\cdots,P^{(n)}(a)$ 正负号相间，则 $\forall\ x<a$，有 $P(x)$

>0或 $P(x)<0$. 于是, $P(x)$在$(-\infty,a)$无零点.

9. 证明:若函数 $f(x)$ 在$(a,+\infty)$二次可导,设

$$M_k = \sup\{|f^{(k)}(x)|\,|\,x\in(a,+\infty)\},$$
$$k=0,1,2,\quad f^{(0)}(x)=f(x),$$

则 $M_1^2\leqslant 4M_0M_2$.

证 $\forall\, x\in(a,+\infty)$, $\forall\, h>0$,将 $f(x+2h)$在 x 展成泰勒公式(到二阶导数):

$$f(x+2h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}2h+\frac{f''(\xi)}{2!}4h^2,\quad x<\xi<x+2h$$

或
$$f'(x)=\frac{1}{2h}[f(x+2h)-f(x)]-f''(\xi)h.$$

从而, $|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2h}(|f(x+2h)|+|f(x)|)+|f''(\xi)|h.$

由已知条件, $\forall\, x\in(a,+\infty)$,有

$$|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2h}2M_0+M_2h=\frac{M_0}{h}+M_2h.$$

从而, $$\sup\{|f'(x)|\,|\,x\in(a,+\infty)\}\leqslant\frac{M_0}{h}+M_2h,$$

即 $$M_1\leqslant\frac{M_0}{h}+M_2h\quad 或\quad M_2h^2-M_1h+M_0\geqslant 0.$$

由此知,上述二次三项式的判别式满足 $M_1^2-4M_0M_2\leqslant 0$,即

$$M_1^2\leqslant 4M_0M_2.$$

10. 证明:若函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 二次可微,设

$M_k=\sup\{|f^{(k)}(x)|\,|\,x\in\mathbf{R}\},\quad k=0,1,2,\quad f^{(0)}(x)=f(x),$
则 $M_1^2\leqslant 2M_0M_2$.

证 $\forall\, x\in\mathbf{R}$, $\forall\, h>0$,将 $f(x+h)$与 $f(x-h)$在 x 分别展成泰勒公式(到二阶导数):

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi_1)}{2!}h^2,\qquad x<\xi_1<x+h$$

与 $$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(\xi_2)}{2!}h^2,\qquad x-h<\xi_2<x.$$

将上面二式等号左右两端相减，有

$$f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+\frac{h^2}{2}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)]$$

或 $$2f'(x)h=f(x+h)-f(x-h)-\frac{h^2}{2}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)].$$

从而 $$2|f'(x)|h\leqslant|f(x+h)|+|f(x-h)|+\frac{h^2}{2}[|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|].$$

由已知条件，$\forall x\in\mathbf{R}$，有

$$2|f'(x)|h\leqslant 2M_0+\frac{h^2}{2}2M_2\leqslant 2M_0+M_2h^2.$$

从而， $$2\sup\{|f'(x)|\,|x\in\mathbf{R}\}\cdot h\leqslant 2M_0+M_2h^2,$$

即 $2M_1h\leqslant 2M_0+M_2h^2$ 或 $M_2h^2-2M_1h+2M_0\geqslant 0$.

由此知，上述二次三项式的判别式满足 $4M_1^2-8M_0M_2\leqslant 0$，即

$$M_1^2\leqslant 2M_0M_2.$$

练习题 6.4

（《讲义》上册，第 269 页）

1. 讨论下列函数的严格单调区间与极值：

(2) $f(x)=(x+1)^4(x-3)^3$.

解 $$f'(x)=4(x+1)^3(x-3)^3+3(x+1)^4(x-3)^2=(x+1)^3(x-3)^2(7x-9).$$

令 $f'(x)=(x+1)^3(x-3)^2(7x-9)=0$，解得三个稳定点：$-1,\frac{9}{7},3$. 它们将 $f(x)$ 的定义域 $\mathbf{R}$ 分成四个区间：

$$(-\infty,-1),\left(-1,\frac{9}{7}\right),\left(\frac{9}{7},3\right),(3,+\infty).$$

列表如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$\left(-1,\frac{9}{7}\right)$	$\frac{9}{7}$	$\left(\frac{9}{7},3\right)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大	↘	极小	↗		↗

-1是函数$f(x)$的极大点,极大值是$f(-1)=0$.

$\frac{9}{7}$是函数$f(x)$的极小点,极小值是$f\left(\frac{9}{7}\right)=-\frac{16^4\times12^3}{7^7}$.

(4) $f(x)=\sin^2x$.

解 $f'(x)=2\sin x\cos x=\sin2x$.

令 $f'(x)=\sin2x=0$,解得无限多个稳定点:$\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$. 它们将函数$f(x)$的定义域$\mathbf{R}$分成无限多个区间:

$$\cdots,\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right),\left(-\frac{\pi}{2},0\right),\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\pi\right),\cdots.$$

列表

x	$\cdots$	$-\pi$	$\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$	0	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$	π	$\cdots$
$f'(x)$	$\cdots$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$\cdots$
$f(x)$	$\cdots$	极小	↗	极大	↘	极小	↗	极大	↘	极小	$\cdots$

$\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi(k\in\mathbf{Z})$是$f(x)$的极大点,极大值$f\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]=1$.

$k\pi(k\in\mathbf{Z})$是$f(x)$的极小点,极小值$f(k\pi)=0$.

(6) $f(x)=e^{-x}\sin x$.

解 $f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=e^{-x}(\cos x-\sin x)$.

令 $f'(x)=e^{-x}(\cos x-\sin x)=0$(即$\cos x-\sin x=0$),解得无限多个稳定点:$k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$. 它们将函数$f(x)$的定义域$\mathbf{R}$分成无限多个区间:

$\cdots,\left(-\frac{7\pi}{4},-\frac{3\pi}{4}\right),\left(-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right),\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right),\left(\frac{5\pi}{4},\frac{9\pi}{4}\right),\cdots.$

列表：

x	$\cdots$	$-\frac{7\pi}{4}$	$\left(-\frac{7\pi}{4},-\frac{3\pi}{4}\right)$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\left(-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$	$\frac{5\pi}{4}$	$\left(\frac{5\pi}{4},\frac{9\pi}{4}\right)$	$\frac{9\pi}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$	$\cdots$	0	−	0	−	0	−	0	+	0	$\cdots$
$f(x)$	$\cdots$	极大	↘	极小	↗	极大	↘	极小	↗	极大	$\cdots$

$\forall\ x\in\mathbf{Z}$，当 k 是奇数时，$k\pi+\frac{\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 的极小点，极小值

$$f\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

$\forall\ x\in\mathbf{Z}$，当 k 是偶数时，$k\pi+\frac{\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 的极大点，极大值

$$f\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

3. 证明下列不等式：

(1)　当 $x>0$ 时，　$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x.$

证　考虑函数 $f(x)=\ln(1+x)-x.$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}.$$

$\forall\ x>0$，有 $f'(x)<0$，即函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 严格减少，且 $f(0)=0$. 于是，$\forall\ x>0$，有

$$\ln(1+x)-x<0 \quad 或 \quad \ln(1+x)<x.$$

再考虑函数 $\varphi(x)=x-\frac{x^2}{2}-\ln(1+x).$

$$\varphi'(x)=1-x-\frac{1}{1+x}=-\frac{x^2}{1+x}.$$

$\forall\ x>0$，有 $\varphi'(x)<0$，即函数 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 严格减少，且 $\varphi(0)=0$. 于是，$\forall\ x>0$，有

$$\left(x-\frac{x^2}{2}\right)-\ln(1+x)<0 \quad 或 \quad x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x).$$

综上所证，$\forall x>0$，有

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x.$$

4. 设函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，-1 是极大点，极大值是 8，2 是极小点，极小值是 -19，求 a,b,c,d.

解 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

已知 -1 与 2 都是极值点，从而必是稳定点，有

$$f'(-1)=3a-2b+c=0, \tag{1}$$

$$f'(2)=12a+4b+c=0. \tag{2}$$

已知在极大点 -1，极大值是 8，有

$$f(-1)=-a+b-c+d=8. \tag{3}$$

已知在极小点 2，极小值是 -19，有

$$f(2)=8a+4b+2c+d=-19. \tag{4}$$

方程(1)，(2)，(3)，(4)组成四元一次联立方程组，从中解得：

$$a=2,b=-3,c=-12,d=1.$$

5. 证明：当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，有不等式

$$\frac{2}{\pi}x<\sin x.$$

证 考虑函数 $F(x)=\frac{\sin x}{x}-\frac{2}{\pi}$.

函数 $F(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 可导，$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，有(已知 $x<\operatorname{tg}x$)

$$F'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\operatorname{tg}x)}{x^2}<0.$$

即函数 $F(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 严格减少，且 $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. 于是，$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，有不等式

$$\frac{\sin x}{x}-\frac{2}{\pi}>0 \quad 或 \quad \frac{2}{\pi}x<\sin x.$$

6. 求下列函数在指定区间的最小值与最大值：

(1) $f(x)=2^x$, $x\in[-1,5]$.

解 $f'(x)=2^x\ln 2$. $\forall x\in[-1,5]$, $f'(x)>0$, 即函数 $f(x)$ 在 $[-1,5]$ 严格增加. 于是

$$\text{最小值 } f(-1)=2^{-1}=\frac{1}{2};\text{最大值 } f(5)=2^5.$$

(3) $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x$, $x\in\left[0,\frac{3}{4}\pi\right]$.

解 $f'(x)=3\sin^2 x\cos x-3\cos^2 x\sin x=3\sin x\cos x(\sin x-\cos x)$.

令 $f'(x)=3\sin x\cos x(\sin x-\cos x)=0$, 解得 $f(x)$ 在闭区间 $\left[0,\frac{3}{4}\pi\right]$ 上的稳定点: $0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}$. 有

$$f(0)=1, f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0.$$

于是, 最小值 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0$; 最大值 $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

(5) $f(x)=xe^{-x^2}, x\in\mathbf{R}$.

解 $f'(x)=e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}=e^{-x^2}(1-2x^2)$.

令 $f'(x)=e^{-x^2}(1-2x^2)=0$ $(1-2x^2=0)$, 解得两个稳定点: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 与 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$f''(x)=2xe^{-x^2}(2x^2-3).$$

$$f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{4}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}>0,\quad f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{4}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}<0.$$

即 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是 $f(x)$ 的极小点, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是 $f(x)$ 的极大点. 并且

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}xe^{-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x^2}}=0.$$

于是, 最小值 $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2e}}$; 最大值 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2e}}$.

7. 已知等腰三角形的周长是 $2l$(定数), 问它的腰多长其面积为最大, 并求其最大的面积.

解　设等腰三角形的腰长为 x，则它的底 $2l-2x$，其高

$$h=\sqrt{x^2-(l-x)^2}=\sqrt{2lx-l^2}.$$

等腰三角形的面积

$$A(x)=(l-x)\sqrt{2lx-l^2},\qquad x\in\left(\frac{l}{2},l\right).$$

$$A'(x)=\frac{2l^2-3lx}{\sqrt{2lx-l^2}}.$$

令 $A'(x)=\dfrac{2l^2-3lx}{\sqrt{2lx-l^2}}=0$ $(2l^2-3lx=0)$，解得唯一稳定点 $\dfrac{2}{3}l$.

作表：

x	$\left(\frac{l}{2},\frac{2}{3}l\right)$	$\frac{2}{3}l$	$\left(\frac{2}{3}l,l\right)$
$A'(x)$	+	0	—
$A(x)$	↗	极大	↘

显然，稳定点 $\dfrac{2}{3}l$ 是极大点，又

$$\lim_{x\to\frac{l}{2}^+}A(x)=0,\qquad \lim_{x\to l^-}A(x)=0$$

于是，函数 $A(x)$ 在极大点 $\dfrac{2}{3}l$ 取最大值．最大值，即等腰三角形的最大面积

$$A\left(\frac{2}{3}l\right)=\left(l-\frac{2}{3}l\right)\sqrt{2l\cdot\frac{2}{3}l-l^2}=\frac{l^2}{3\sqrt{3}}.$$

8. 已知圆柱形罐头盒的体积是 V（定数），问它的高与底半径多大能使罐头盒的表面积为最小？

解　设圆柱形罐头盒的高为 h，底半径为 x，则罐头盒的体积 $V=\pi x^2h$ 或 $h=\dfrac{V}{\pi x^2}$．于是，圆柱形罐头盒的表面积

$$A(x)=2\pi x^2+2\pi x\cdot h=2\pi x^2+\frac{2V}{x},\quad x\in(0,+\infty)$$

$$A'(x) = 4\pi x - \frac{2V}{x^2} = \frac{2(2\pi x^3 - V)}{x^2}.$$

令 $A'(x)=\dfrac{2(2\pi x^3-V)}{x^2}=0$ $(2\pi x^3-V=0)$. 解得唯一稳定点

$x=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

$$A''(x) = 4\pi + \frac{4V}{x^3}, \text{有 } A''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) > 0.$$

从而,稳定点$\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$是函数 $A(x)$的极小点. 又

$$\lim_{x\to 0^+} A(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} A(x) = +\infty.$$

于是,函数 $A(x)$在极小点$\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$取最小值,即底半径 $x=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$,相应

高 $h=2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$时,罐头盒的表面积为最小,最小的表面积

$$A\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = 2\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2 + 2V\sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}} = \sqrt[3]{54\pi V^2}.$$

9. 半径为 a 的球的内接直圆柱,问直圆柱的底半径与高多大能使直圆柱的体积最大?

解 设球的内接直圆柱的底半径为 x,则其高

$$h = 2\sqrt{a^2 - x^2}.$$

于是,内接直圆柱的体积

$$V(x) = 2\pi x^2\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad x \in (0,a).$$

$$V'(x) = 4\pi x\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{2\pi x^3}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{2\pi x(2a^2 - 3x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

令 $V'(x)=\dfrac{2\pi x(2a^2-3x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}=0$ $(x(2a^2-3x^2)=0)$,在$(0,a)$内有

唯一稳定点 $x=\sqrt{\dfrac{2}{3}}a$. 作表:

x	$\left(0,\sqrt{\frac{2}{3}}a\right)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}a$	$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a,a\right)$
$V'(x)$	+	0	−
$V(x)$	↗	极大	↘

稳定点$\sqrt{\frac{2}{3}}a$是极大点.

$$\lim_{x\to 0} V(x)=0,\quad \lim_{x\to a} V(x)=0.$$

于是,函数$V(x)$在极大点$\sqrt{\frac{2}{3}}a$取最大值,即底半径$x=\sqrt{\frac{2}{3}}a$,高$h=\frac{2a}{\sqrt{3}}$时,内接直圆柱的体积最大,最大体积为

$$V\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a\right)=2\pi\cdot\frac{2}{3}a^2\sqrt{a^2-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a\right)^2}=\frac{4}{3\sqrt{3}}\pi a^3.$$

10. 如图,铁路线上AB直线段长100公里,工厂C到铁路线上A处的垂直距离CA为20公里,现在要在AB上选一点D,从D向C修一条直线公路.已知铁路运输每吨公里与公路运输每吨公里的运费之比为3∶5.为了使原料从B处运到工厂C的运费最省,D应选在何处?

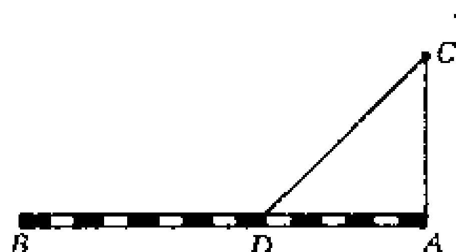


图6.a

解 设$AD=x$,$x\in[0,100]$,从而,

$$DB=100-x,CD=\sqrt{400+x^2}.$$

已知铁路运费与公路运费分别是吨公里$3a$(元)与$5a$(元).于

是，从 B 到 C 的运费是

$$W(x)=3a(100-x)+5a\sqrt{400+x^2}.$$

$$W'(x)=-3a+\frac{5ax}{\sqrt{400+x^2}}=\frac{-3a\sqrt{400+x^2}+5ax}{\sqrt{400+x^2}}.$$

令 $W'(x)=\dfrac{-3a\sqrt{400+x^2}+5ax}{\sqrt{400+x^2}}=0$ $(-3a\sqrt{400+x^2}+5ax=0)$，在 $[0,100]$ 内解得唯一稳定点 $x=15$，而

$$W(0)=400a,W(100)\approx 510a,W(15)=380a.$$

根据问题的实际意义，函数 $W(x)$ 必存在最小值，于是，函数 $W(x)$ 在 $x=15$ 时取最小值，即 $AD=15$ 公里时，从 B 经 D 到 C 的运费最省.

11. 讨论下列函数的凸凹性与拐点：

(2) $y=x+\sin x$.

解 $y=x+\sin x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

$$y'=1+\cos x,\qquad y''=-\sin x$$

令 $y''=-\sin x=0$. 解得 $x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 它们将 $\mathbf{R}$ 分成无限多个区间：

$$\cdots,(-2\pi,-\pi),(-\pi,0),(0,\pi),(\pi,2\pi),\cdots$$

作表：

x	…	$(-2\pi,-\pi)$	$-\pi$	$(-\pi,0)$	0	$(0,\pi)$	π	$(\pi,2\pi)$	2π	…
y''	…	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	…
y	…	凹	拐点	凸	拐点	凹	拐点	凸	拐点	…

$$\forall\ k\in\mathbf{Z},\begin{cases}((2k-1)\pi,2k\pi)\text{是严凸区间},\\(2k\pi,(2k+1)\pi)\text{是严凹区间}.\end{cases}$$

$(k\pi,k\pi)$ 都是拐点.

(4) $y=e^{-x}\sin x$.

解 $y=e^{-x}\sin x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

$$y'=e^{-x}(\cos x-\sin x),\quad y''=-2e^{-x}\cos x.$$

令 $y''=-2e^{-x}\cos x=0\ (\cos x=0)$，解得 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，它们将 $\mathbf{R}$ 分成无限多个区间：

$$\cdots,\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right),\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right),\cdots$$

作表：

x	$\cdots$	$\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$	$\frac{3\pi}{2}$	$\cdots$
y''	$\cdots$	+	0	−	0	+	0	$\cdots$
y	$\cdots$	凸	拐点	凹	拐点	凸	拐点	$\cdots$

$$\forall k\in\mathbf{Z},\begin{cases}\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}\right)\text{是严凸区间},\\ \left((2k-1)\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\text{是严凹区间}.\end{cases}$$

$\left(k\pi+\frac{\pi}{2},(-1)^k e^{-\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)}\right)$ 都是拐点.

13. 证明：两个凸函数的和还是凸函数.

证 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在开区间 I 都是凸函数，即 $\forall x_1,x_2\in I$，$\forall t\in(0,1)$，有

$$f[tx_1+(1-t)x_2]\leqslant tf(x_1)+(1-t)f(x_2),$$
$$g[tx_1+(1-t)x_2]\leqslant tg(x_1)+(1-t)g(x_2).$$

于是，

$$\begin{aligned}&f[tx_1+(1-t)x_2]+g[tx_1+(1-t)x_2]\\ \leqslant\ &tf(x_1)+(1-t)f(x_2)+tg(x_1)+(1-t)g(x_2)\\ =\ &t[f(x_1)+g(x_1)]+(1-t)[f(x_2)+g(x_2)],\end{aligned}$$

即 $f(x)+g(x)$ 在开区间 I 是凸函数.

14. 证明：若函数 $f(x)$ 在开区间 I 是凸的，则 $\forall x_0\in I$，存在 $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$，且 $f'_-(x_0)\leqslant f'_+(x_0)$.

证 $\forall x_0\in I$，$\forall x\in I$，且 $x\neq x_0$，考虑函数

$$F(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

$\forall x_1,x_2\in(x_0-\delta,x_0)$ $(x_0-\delta\in I)$，且 $x_1<x_2<x_0$. 由 §6.4 第三段(3)式，有

$$(x_0-x_2)f(x_1)+(x_1-x_0)f(x_2)+(x_2-x_1)f(x_0)\geqslant 0$$

或
$$(x_0-x_2)f(x_1)+(x_1-x_0)f(x_2)+[(x_2-x_0)+(x_0-x_1)]f(x_0)\geqslant 0.$$

经过整理，得

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$$

或
$$F(x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}=F(x_2),$$

即函数 $F(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 单调增加.

再任意取一点 $x_3>x_0(x_3\in I)$，$\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$，$x<x_0<x_3$. 同法可证

$$F(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_0)}{x_3-x_0}\text{（常数）},$$

即函数 $F(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 有上界.

由练习题 4.1 第 8 题，函数 $F(x)$ 在点 x_0 存在左极限，即

$$\lim_{x\to x_0^-}F(x)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_-(x_0).$$

同法可证，函数 $F(x)$ 在点 x_0 存在右极限，即

$$\lim_{x\to x_0^+}F(x)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_+(x_0).$$

因为 $\forall x_1,x_2\in I$，且 $x_1<x_0<x_2$，有

$$F(x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}=F(x_2).$$

所以 $$\lim_{x_1\to x_0^-}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\leqslant\lim_{x_2\to x_0^+}\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0},$$

即 $$f'_-(x_0)\leqslant f'_+(x_0).$$

15. 求下列曲线的渐近线

(3) $$y=\frac{x^2}{x^2-1}.$$

解

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2}{x^2-1}=\infty,\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x^2-1}=\infty,$$

直线 $x=-1, x=1$ 是曲线的垂直渐近线.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\frac{x^2}{x^2-1}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)=1.$$

直线 $y=1$ 是曲线的水平渐近线.

(4) $$y=xe^{\frac{1}{x^2}}.$$

解 $$\lim_{x\to 0}xe^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}\qquad\left(设\ y=\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{y\to\infty}\frac{e^{y^2}}{y}=\lim_{y\to\infty}\frac{2ye^{y^2}}{1}=\infty.$$

直线 $x=0$ 是曲线的垂直渐近线.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x^2}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(xe^{\frac{1}{x^2}}-x)=\lim_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x^2}}-1)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}e^{\frac{1}{x^2}}=0.$$

直线 $y=x$ 是曲线的斜渐近线.

(5) $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{e}} x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=\infty$.

直线 $x=-\frac{1}{e}$ 是曲线的垂直渐近线.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-x\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-1}{\frac{1}{x}}\qquad\left(设\ y=\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{\ln(e+y)-1}{y}$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{1}{e+y}=\frac{1}{e}.$$

直线 $y=x+\frac{1}{e}$ 是曲线的斜渐近线.

16. 作下列函数的图象:

(3) $y=x\operatorname{arctg}x$.

解 函数 $y=x\operatorname{arctg}x$ 的定义域是 **R**, 且是 **R** 上的偶函数.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\operatorname{arctg}x}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg}x=\pm\frac{\pi}{2},$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x\operatorname{arctg}x\mp\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\operatorname{arctg}x\mp\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}=-1.$$

直线 $y=\frac{\pi}{2}x-1$ 与 $y=-\frac{\pi}{2}x-1$ 是曲线的两条斜渐近线.

$$y'=\operatorname{arctg}x+\frac{x}{1+x^2},\quad y''=\frac{2}{(1+x^2)^2}.$$

令 $y'=\operatorname{arctg}x+\frac{x}{1+x^2}=0$,解得唯一稳定点 0.

令 $y''=\frac{2}{(1+x^2)^2}=0$. 无解,即没有拐点.

作表:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	−	0	+
y''	+		+
y	↘凹	极小	↗凹

0 是极小点(易判定),极小值是 $y|_{x=0}=0$. 函数的图象如图 6.b.

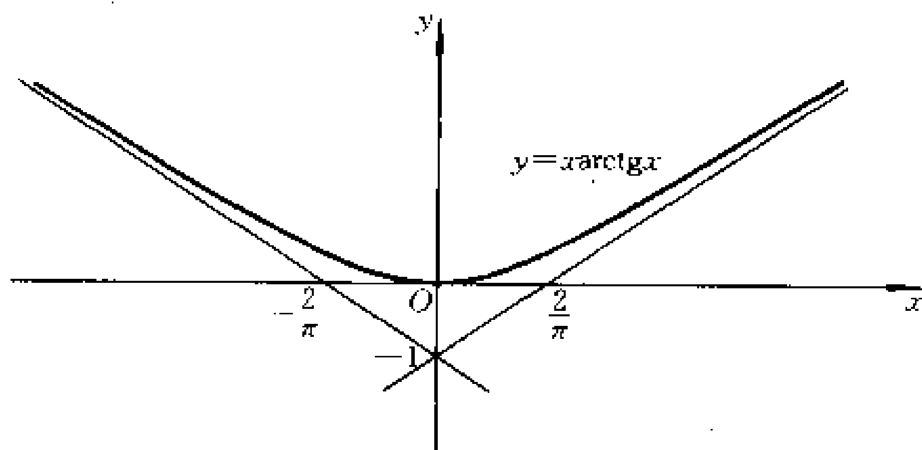


图 6.b

(4) $y=e^{-x}\sin x$.

解 函数 $y=e^{-x}\sin x$ 的定义域是 **R**.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}\sin x}{x}=0,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\sin x=0.$$

直线 $y=0$ 是曲线的一条水平渐近线.

函数 $y=e^{-x}\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 的严格单调区间和极值点，见第 1 题的第 6 小题，将其表抄录如下：

x	…	$\left(-\frac{7\pi}{4},-\frac{3\pi}{4}\right)$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\left(-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$	$\frac{5\pi}{4}$	$\left(\frac{5\pi}{4},\frac{9\pi}{4}\right)$	$\frac{9\pi}{4}$	…
y'	…	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	…
y	…	↘	极小	↗	极大	↘	极小	↗	极大	…

$\forall\ k\in\mathbf{Z}$，k 是奇数，$k\pi+\frac{\pi}{4}$ 是 y 的极小点，极小值

$$y\big|_{x=k\pi+\frac{\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

$\forall\ k\in\mathbf{Z}$，k 是偶数，$k\pi+\frac{\pi}{4}$ 是 y 的极大点，极大值

$$y\big|_{x=k\pi+\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

函数 $y=e^{-x}\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 的严凸、严凹区间和拐点，见第 11 题的第 4 小题，其表抄录如下：

x	…	$\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$	$\frac{3\pi}{2}$	…
y''	…	$+$	0	$-$	0	$+$	0	…
y	…	凸	拐点	凹	拐点	凸	拐点	…

$\forall\ k\in\mathbf{Z}$，$\left(k\pi+\frac{\pi}{2},(-1)^k e^{-\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)}\right)$ 都是拐点．

函数的图象如图 6.c(示意图)．

*　　*　　*　　*

17．证明下列不等式：

(1)　$\frac{x}{y}<\frac{\sin x}{\sin y}$，　$0<x<y<\frac{\pi}{2}$．

证　考虑函数 $F(t)=\frac{\sin t}{t}$，$\forall\ t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，有 $(t<\operatorname{tg}t)$

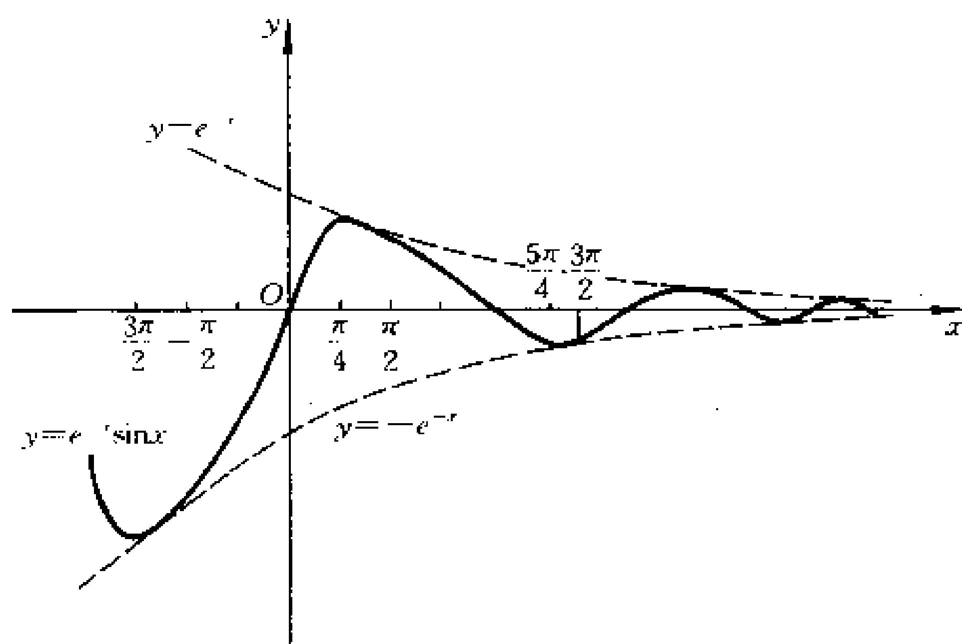


图 6.c(示意图)

$$F'(t)=\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}=\frac{\cos t(t-\mathrm{tg}t)}{t^2}<0,$$

即函数 $F(t)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$严格减少．从而，$\forall\ x,y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $x<y$，有

$$\frac{\sin x}{x}>\frac{\sin y}{y}$$

或

$$\frac{x}{y}<\frac{\sin x}{\sin y}.$$

(2)　$(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}<(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$，　$x>0$，　$y>0$，　$\beta>\alpha>0$.

证　当 $x=y$ 时，显然成立．不妨设 $x\neq y$，且 $y<x$.

令 $a=\frac{y}{x}$，$0<a<1$. 考虑函数

$$F(t)=(1+a^t)^{\frac{1}{t}},\quad t>0.$$

由对数求导法，　　$\ln F(t)=\frac{1}{t}\ln(1+a^t)$，

$$\frac{F'(t)}{F(t)}=-\frac{1}{t^2}\ln(1+a^t)+\frac{1}{t(1+a^t)}a^t\ln a$$

或 $$F'(t)=(1+a^t)^{\frac{1}{t}}\frac{1}{t^2}\left[\frac{ta^t\ln a}{1+a^t}-\ln(1+a^t)\right]$$

$$=\frac{(1+a^t)^{\frac{1}{t}}}{t^2(1+a^t)}\left[ta^t\ln a-(1+a^t)\ln(1+a^t)\right].$$

因为 $0<a<1$，所以 $\ln a<0$，$\ln(1+a^t)>0$. 从而，$\forall\ t>0$，有 $F'(t)<0$，即函数 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 严格减少．于是，$\forall\ \alpha,\beta\in(0,+\infty)$，且 $\alpha<\beta$，有

$$F(\beta)<F(\alpha)\quad 或\quad (1+a^\beta)^{\frac{1}{\beta}}<(1+a^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

即 $$\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}}<\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

或 $$(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}<(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

18. 数列：$1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\cdots,\sqrt[n]{n},\cdots$ 中哪一项最大？

解 考虑函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$，$x>0$.

由对数求导法， $$\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln x,$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}$$

或 $$f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}(1-\ln x).$$

令 $f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\frac{1-\ln x}{x^2}=0$，解得唯一稳定点 $x=e$. 列表：

x	$(0,e)$	e	$(e,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大	↘

e 是函数 $f(x)$ 的极大点．从表看到，函数 $f(x)$ 在 e 取最大值．已知 $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$. 于是，第 3 项 $\sqrt[3]{3}$ 是此数列的最大数．

19. 求函数 $f_n(x)=x^n e^{-n^2x}$(n 是自然数，且 $n\geqslant 2$)在$[0,+\infty)$的最大值与最小值，并求极限($\forall\ x\geqslant 0$) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$.

解 $f'_n(x)=nx^{n-1}e^{-n^2x}-n^2x^ne^{-n^2x}$

$=nx^{n-1}e^{-n^2x}(1-nx)$.

令 $f'_n(x)=nx^{n-1}e^{-n^2x}(1-nx)=0$，解得两个稳定点 $0,\dfrac{1}{n}$，其中 0 是区间$[0,+\infty)$的左端点．讨论函数 $f_n(x)$在稳定点$\dfrac{1}{n}$的情况，列表：

x	$\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$	$\dfrac{1}{n}$	$\left(\dfrac{1}{n},+\infty\right)$
$f'_n(x)$	+	0	−
$f_n(x)$	↗	极大	↘

$\dfrac{1}{n}$是函数 $f_n(x)$的极大点．$f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n^ne^n}$，$f_n(0)=0$．从表看到，函数 $f_n(x)$在$\dfrac{1}{n}$取最大值．

$\forall\ x\in[0,+\infty)$，有 $f_n(x)=x^ne^{-n^2x}\geqslant 0$，又 $f_n(0)=0$，即函数 $f_n(x)$在 0 取到最小值是 0．于是，$\forall\ x\in[0,+\infty)$，$\forall\ n\in\mathbf{N}$，有

$$0\leqslant f_n(x)\leqslant f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^ne^n}\to 0(n\to\infty).$$

于是，$\forall\ x\geqslant 0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$.

20. 求函数 $f_p(x)=p^2x^2(1-x)^p$(p 是正数)在$[0,1]$的最大值．设最大值是 $g(p)$，并求极限 $\lim\limits_{p\to+\infty}g(p)$．

解 $f'_p(x)=2p^2x(1-x)^p-p^3x^2(1-x)^{p-1}$

$=p^2x(1-x)^{p-1}[2-(2+p)x]$.

令 $f'_p(x)=p^2x(1-x)^{p-1}[2-(2+p)x]=0$，解得最多有三个稳定点：$0,1,\dfrac{2}{2+p}$(当 $p>1$ 时，1 是稳定点)．0 与 1 是区间$[0,1]$的端

点．有

$$f_p(0)=0,\quad f_p(1)=0,\quad f_p\left(\frac{2}{2+p}\right)=4\left(\frac{p}{2+p}\right)^{2+p}.$$

于是，函数 $f_p(x)$ 在 $x=\frac{2}{2+p}$ 取最大值，最大值 $g(p)=4\left(\frac{p}{2+p}\right)^{2+p}$．有

$$\lim_{p\to+\infty}g(p)=4\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{p}{2+p}\right)^{2+p}$$

$$=4\lim_{p\to+\infty}\left[\left(1-\frac{2}{2+p}\right)^{-\frac{2+p}{2}}\right]^{-2}=4e^{-2}=\frac{4}{e^2}.$$

21．证明：不存在三次或三次以上的奇次多项式 $P(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 是凸．

分析 假设 $P(x)$ 是奇次多项式，且在 $\mathbf{R}$ 是凸，则根据定理 6，曲线 $y=P(x)$ 必在其上任一点（这里取点 $(0,P(0))$）的切线上方，这是不可能的（或矛盾）．

证 为了书写简单，设 $P(x)$ 是三次多项式，

$$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\qquad a\neq 0$$

首先求曲线 $y=P(x)$ 在点 $(0,P(0))$，即在点 $(0,d)$ 的切线方程．

$$P'(x)=3ax^2+2bx+c.$$

$P(0)=d$，$P'(0)=c$．从而，曲线 $y=P(x)$ 在点 $(0,P(0))$ 的切线方程

$$Y-P(0)=P'(0)(x-0)\quad 或\quad Y=cx+d.$$

其次假设 $P(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 是凸，根据定理 6，$\forall x\in\mathbf{R}$，$\forall a\in\mathbf{R}$，且 $a\neq 0$，有

$$P(x)\geqslant cx+d\quad 或\quad ax^3+bx^2+cx+d\geqslant cx+d,$$

即
$$ax^3+bx^2=x^3\left(a+\frac{b}{x}\right)\geqslant 0. \qquad (1)$$

当 $a>0$ 时，$x\to-\infty$，有 $x^3\left(a+\frac{b}{x}\right)\to-\infty$，即 $\exists\ x_0<0$，有

$x_0^3\left(a+\frac{b}{x_0}\right)<0$,与不等式(1)矛盾;

当 $a<0$ 时,$x\to+\infty$,有 $x^3\left(a+\frac{b}{x}\right)\to-\infty$,即$\exists\ x_0>0$,有 $x_0^3\left(a+\frac{b}{x_0}\right)<0$,与不等式(1)也矛盾.

综上所证,不论 $a>0$ 或 $a<0$,$\forall\ x\in\mathbf{R}$,不等式 $x^3\left(a+\frac{b}{x}\right)\geqslant 0$ 是不能成立的.于是,不存在三次多项式 $P(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 是凸.

同法可证,不存在三次以上的奇次多项式 $P(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 是凸.

22. 证明:若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 是凸,且有界,则 $f(x)$ 是常数函数.

证 已知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 有界,即$\exists\ M>0$,$\forall\ x\in\mathbf{R}$,有 $|f(x)|\leqslant M$.

$\forall\ x,y\in\mathbf{R}$,且 $x<y$(将 x,y 暂时固定,往证 $f(x)=f(y)$).

任取 $x',y'\in\mathbf{R}$,且 $x'<x<y<y'$. 已知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 是凸,由§6.4第三段(4)式,有

$$\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}\leqslant\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leqslant\frac{f(y')-f(y)}{y'-y}$$

或 $$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|\leqslant\max\left\{\left|\frac{f(y')-f(y)}{y'-y}\right|,\left|\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}\right|\right\}.$$

有 $$\left|\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}\right|\leqslant\frac{|f(x)|+|f(x')|}{x-x'}\leqslant\frac{2M}{x-x'}\to 0\quad(x'\to-\infty),$$

$$\left|\frac{f(y')-f(y)}{y'-y}\right|\leqslant\frac{|f(y')|+|f(y)|}{y'-y}\leqslant\frac{2M}{y'-y}\to 0\quad(y'\to+\infty),$$

即 $$\lim_{x'\to-\infty}\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}=0\quad\text{与}\quad\lim_{y'\to+\infty}\frac{f(y')-f(y)}{y'-y}=0.$$

从而, $$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=0,\ \text{即}\ f(x)=f(y).$$

于是,$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 是常数函数.

23. 证明:若函数 $f(u)$ 是单调增加的凸函数,函数 $u=\varphi(x)$ 是凸函数,则函数 $f[\varphi(x)]$ 也是凸函数.

证 已知 $f(u)$ 是单调增加函数，即

$$\forall\ \alpha,\beta,\text{且}\ \alpha<\beta,\text{有}\ f(\alpha)\leqslant f(\beta).$$

又已知 $f(u)$ 与 $\varphi(x)$ 都是凸函数，即

$\forall\ u_1,u_2,\forall\ t\in(0,1)$，有

$$f[tu_1+(1-t)u_2]\leqslant tf(u_1)+(1-t)f(u_2).$$

$\forall\ x_1,x_2,\forall\ t\in(0,1)$，有

$$\varphi[tx_1+(1-t)x_2]\leqslant t\varphi(x_1)+(1-t)\varphi(x_2).$$

于是，$\forall\ x_1,x_2,\forall\ t\in(0,1)$，($f(u)$是单调增加的)有

$$\begin{aligned}f\{\varphi[tx_1+(1-t)x_2]\}&\leqslant f[t\varphi(x_1)+(1-t)\varphi(x_2)]\\&\leqslant tf[\varphi(x_1)]+(1-t)f[\varphi(x_2)],\end{aligned}$$

即函数 $f[\varphi(x)]$ 也是凸函数.

24. 证明下列不等式，并讨论等号成立的条件：

(1) $a^{\frac{x+y}{2}}\leqslant\dfrac{a^x+a^y}{2},\quad a>0,x,y\in\mathbf{R}.$

证 设 $f(x)=a^x$. $f'(x)=a^x\ln a$, $f''(x)=a^x(\ln a)^2$.

$\forall\ x\in\mathbf{R}$，有 $f''(x)=a^x(\ln a)^2>0$. 根据定理 7 的詹生不等式(5)，取$n=2,q_1=q_2=\dfrac{1}{2}$，有 $q_1+q_2=1$. 于是，$\forall\ x,y\in\mathbf{R}$，有

$$a^{\frac{x+y}{2}}\leqslant\frac{1}{2}a^x+\frac{1}{2}a^y=\frac{a^x+a^y}{2}.$$

若 $x=y$，则上式等号成立. 这个条件也是必要的.

(2) $(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}\leqslant x\ln x+y\ln y,\qquad x,y>0.$

证 设 $f(x)=x\ln x,x>0$.

$$f'(x)=\ln x+1,\quad f''(x)=\frac{1}{x}.$$

$\forall\ x>0$，有 $f''(x)=\dfrac{1}{x}>0$. 根据定理 7 的詹生不等式(5)，取 $n=2,q_1=q_2=\dfrac{1}{2}$，即 $q_1+q_2=1$. 于是，$\forall\ x,y\in\mathbf{R}$，有

$$\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}\leqslant\frac{1}{2}x\ln x+\frac{1}{2}y\ln y$$

或 $$(x+y)\ln\frac{x+y}{2}\leqslant x\ln x+y\ln y.$$

若 $x=y$，则上式等号成立．这个条件也是必要的(证明从略)．

(3) $$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^p\leqslant\frac{x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p}{n},$$

其中 $p\geqslant 1, x_1, x_2, \cdots, x_n>0$.

证 设 $f(x)=x^p$， $x>0$.

$$f'(x)=px^{p-1},\quad f''(x)=p(p-1)x^{p-2}.$$

$\forall x>0, \forall p\geqslant 1$，有 $f''(x)=p(p-1)x^{p-2}\geqslant 0$. 根据定理 7 的衍生不等式(5)，取 $q_1=q_2=\cdots=q_n=\frac{1}{n}$，有 $q_1+q_2+\cdots+q_n=1$. 于是，$\forall x_1, x_2, \cdots, x_n>0, \forall p\geqslant 1$，有

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^p\leqslant\frac{x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p}{n}.$$

若 $x_1=x_2=\cdots=x_n$，则上式等号成立．这个条件也是必要的(证明从略)．

(4) $$x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}\leqslant a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n,$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n>0$；$a_1, a_2, \cdots, a_n>0$，且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$.

证 设 $f(x)=-\ln x$， $x>0$.

$$f'(x)=-\frac{1}{x},\quad f''(x)=\frac{1}{x^2}.$$

$\forall x>0$，有 $f''(x)=\frac{1}{x^2}>0$. 根据定理 7 的衍生不等式(5)．取 $q_k=a_k, k=1, 2, \cdots, n$，且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$. 于是，$\forall x_1, x_2, \cdots, x_n>0$，有

$$\begin{aligned}&-\ln(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)\\&\quad\leqslant -a_1\ln x_1-a_2\ln x_2-\cdots-a_n\ln x_n,\\&\quad=-\ln(x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n})\end{aligned}$$

或 $$x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}\leqslant a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n.$$

若 $x_1=x_2=\cdots=x_n$，则上式等号成立，这个条件也是必要的(证明从略)．

第七章 不定积分

练习题 7.1

(《讲义》上册，第 280 页)

1. 求下列不定积分：

(1) $\int(\sqrt{x}+1)^2dx.$

解 $\int(\sqrt{x}+1)^2dx=\int(x+2\sqrt{x}+1)dx$

$=\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+x+C.$

(3) $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx.$

解 $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx=\int(x^{\frac{1}{6}}-x^{-\frac{1}{4}})dx$

$=\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C.$

(5) $\int(2^x+3^x)^2dx.$

解 $\int(2^x+3^x)^2dx=\int(4^x+2\cdot6^x+9^x)dx$

$=\frac{4^x}{\ln4}+\frac{2}{\ln6}6^x+\frac{9^x}{\ln9}+C.$

(7) $\int\frac{2\cdot3^x-5\cdot2^x}{3^x}dx.$

解 $\int\frac{2\cdot3^x-5\cdot2^x}{3^x}dx=\int\left[2-5\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]dx$

$$= 2x - \frac{5}{\ln 2 - \ln 3}\left(\frac{2}{3}\right)^x + C.$$

(9) $\int \frac{1 + x + x^2}{x(1 + x^2)}dx.$

解 $\int \frac{1 + x + x^2}{x(1 + x^2)}dx = \int \frac{1 + x^2 + x}{x(1 + x^2)}dx$

$$= \int \frac{1 + x^2}{x(1 + x^2)}dx + \int \frac{x}{x(1 + x^2)}dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{1 + x^2} = \ln|x| + \operatorname{arctg}x + C.$$

(11) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$

解 $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}dx$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg}x - x + C.$$

3. 求一条平面曲线方程，该曲线通过点 $A(1,0)$，并且曲线上每一点 $P(x,y)$ 的切线斜率是 $2x-2, x \in \mathbf{R}$.

解 设所求的曲线方程是 $y=f(x)$.

已知 $f'(x)=2x-2$，从而

$$f(x) = \int (2x - 2)dx = x^2 - 2x + C,$$

又已知曲线 $y=f(x)$ 通过点 $A(1,0)$，有

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + C = 0, \text{即 } C = 1.$$

于是，所求的曲线方程是

$$y = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2.$$

4. 若曲线 $y=f(x)$ 上点 (x,y) 的切线斜率与 x^3 成正比例，并且曲线通过点 $A(1,6)$ 与 $B(2,-9)$，求该曲线方程 .

解 已知 $\forall x \in \mathbf{R}$，有 $f'(x)=kx^3$（k 是比例系数），从而

$$f(x) = k\int x^3 dx = \frac{k}{4}x^4 + C,$$

又已知曲线 $y=f(x)$ 通过两点 $A(1,6)$ 与 $B(2,-9)$，有

$$\begin{cases} f(1) = \dfrac{k}{4} + C = 6, \\ f(2) = 4k + C = -9. \end{cases}$$

从这个联立方程组解得：$k=-4, C=7$. 于是，所求的曲线方程是

$$y = -x^4 + 7.$$

练习题 7.2

(《讲义》上册，第 295 页)

1. 应用分部积分法求下列不定积分：

(1) $\int x\cos x dx$.

解 $\int x\cos x dx = \int x d\sin x = x\sin x - \int \sin x dx$

$= x\sin x + \cos x + C$.

(3) $\int \ln(1-x)dx$.

解 $\int \ln(1-x)dx = x\ln(1-x) - \int x d\ln(1-x)$

$= x\ln(1-x) + \int \dfrac{x}{1-x}dx$

$= x\ln(1-x) - \int \dfrac{1-x-1}{1-x}dx$

$= x\ln(1-x) - \int\left(1 - \dfrac{1}{1-x}\right)dx$

$= x\ln(1-x) - x - \ln(1-x) + C$

$= (x-1)\ln(1-x) - x + C$.

(5) $\int x^n \ln x dx$.

解 $\int x^n \ln x dx = \int \ln x d\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)$

$= \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \dfrac{x^{n+1}}{n+1} d\ln x$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n dx$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C.$$

(7) $\int e^x \cos x dx$.

解 设 $I = \int e^x \cos x dx = \int \cos x de^x$

$$= e^x \cos x - \int e^x d\cos x = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$$

$$= e^x \cos x + \int \sin x de^x$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x d\sin x$$

$$= e^x(\cos x + \sin x) - \int e^x \cos x dx$$

$$= e^x(\cos x + \sin x) - I$$

或 $2I = e^x(\cos x + \sin x)$,即

$$I = \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C.$$

2. 应用换元积分法求下列不定积分:

(1) $\int e^{5x} dx$.

解 $\int e^{5x} dx = \frac{1}{5}\int e^{5x} d(5x) = \frac{1}{5}e^{5x} + C$.

(3) $\int \frac{dx}{4-3x}$.

解 $\int \frac{dx}{4-3x} = -\frac{1}{3}\int \frac{d(4-3x)}{4-3x}$

$$= -\frac{1}{3}\ln|4-3x| + C.$$

(5) $\int \frac{dx}{\cos^2 7x}$.

解 $\int \frac{dx}{\cos^2 7x} = \frac{1}{7}\int \frac{d(7x)}{\cos^2 7x}$

$= \frac{1}{7}\text{tg}7x + C.$

(7) $\int \cos^3 x \sin x dx.$

解 $\int \cos^3 x \sin x dx = -\int \cos^3 x d\cos x = -\frac{1}{4}\cos^4 x + C.$

(9) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}}.$

解 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{1}{3}\int (x^3+1)^{-\frac{1}{2}} d(x^3+1)$

$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C.$

(11) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx.$

解 $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos^3 x} = \frac{1}{2\cos^2 x} + C.$

(13) $\int \frac{dx}{\sqrt{\text{tg}x - 1}\cos^2 x}.$

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{\text{tg}x - 1}\cos^2 x} = \int \frac{d(\text{tg}x - 1)}{\sqrt{\text{tg}x - 1}}$

$= 2\sqrt{\text{tg}x - 1} + C.$

(15) $\int \frac{\sqrt{\text{tg}x + 1}}{\cos^2 x} dx.$

解 $\int \frac{\sqrt{\text{tg}x + 1}}{\cos^2 x} dx = \int \sqrt{\text{tg}x + 1}\, d(\text{tg}x + 1)$

$= \frac{2}{3}(\text{tg}x + 1)^{\frac{3}{2}} + C.$

(17) $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}} dx.$

解 $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}} dx = -\frac{1}{3}\int \frac{d\cos 3x}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}}$

$= \frac{1}{\sqrt[3]{\cos 3x}} + C.$

(19) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

解 $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \arcsin x d\arcsin x$

$= \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C$.

(21) $\int \frac{x}{1+x^2}dx$.

解 $\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$

$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$.

(23) $\int \frac{\cos x}{2\sin x + 3}dx$.

解 $\int \frac{\cos x}{2\sin x + 3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(2\sin x + 3)}{2\sin x + 3}$

$= \frac{1}{2}\ln|2\sin x + 3| + C$.

(25) $\int 2x(x^2+1)^4 dx$.

解 $\int 2x(x^2+1)^4 dx = \int (x^2+1)^4 d(x^2+1)$

$= \frac{1}{5}(x^2+1)^5 + C$.

(27) $\int e^{\sin x}\cos x dx$.

解 $\int e^{\sin x}\cos x dx = \int e^{\sin x} d\sin x = e^{\sin x} + C$.

(29) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}x)}{\sqrt{1-(\sqrt{3}x)^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(\sqrt{3}x) + C$.

(31) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

解 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1-(x^2)^2}}$

$= \frac{1}{2}\arcsin x^2 + C$.

(33) $\int \frac{\cos x dx}{a^2+\sin^2 x}$.

解 $\int \frac{\cos x dx}{a^2+\sin^2 x} = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{\sin x}{a}\right)^2}d\left(\frac{\sin x}{a}\right)$

$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{a} + C$.

(35) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$.

解 $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx = \int \sqrt{1+\ln x}\,d(1+\ln x)$

$= \frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}} + C$.

3. 应用分部积分法求下列不定积分：

(1) $\int \arcsin x dx$.

解 $\int \arcsin x dx = x\arcsin x - \int x d\arcsin x$

$= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$

$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

(3) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$.

解 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$- \int x d\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

(5) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

解 $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \arcsin\sqrt{x}\, d\sqrt{x}$

$$= 2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} - 2\int\sqrt{x}\, d\arcsin\sqrt{x}$$

$$= 2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} - \int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

$$= 2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + \int\frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}}$$

$$= 2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C.$$

(7) $\int x\operatorname{arctg}x\,dx$.

解 $\int x\operatorname{arctg}x\,dx = \frac{1}{2}\int\operatorname{arctg}x\,d(x^2)$

$$= \frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\int x^2 d\operatorname{arctg}x$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + C$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg}x - \frac{x}{2} + C.$$

*　　*　　*　　*

4. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{x|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1-\left|\frac{1}{x}\right|^2}}$

$= -\arcsin\frac{1}{|x|} + C.$

(3) $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$.

解 $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx = \frac{1}{2}\int \ln\frac{1+x}{1-x}d\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2 + C.$

(5) $\int \frac{dx}{1+e^x}$.

解 $\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx$

$= \int dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}dx$

$= \int dx - \int \frac{d(1+e^x)}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x) + C.$

(7) $\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}dx$.

解 $\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}dx = \int (1-\sin^2 x)^2\sqrt{\sin x}d\sin x$

$= \int (\sin^{\frac{1}{2}}x - 2\sin^{\frac{5}{2}}x + \sin^{\frac{9}{2}}x)d\sin x$

$= \frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x - \frac{4}{7}\sin^{\frac{7}{2}}x + \frac{2}{11}\sin^{\frac{11}{2}}x + C.$

(9) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+1}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\frac{15}{16}+\left(x-\frac{1}{4}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{15}{16}+\left(x-\frac{1}{4}\right)^2}\right|+C$$

（由 §7.2 例 18）

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+1}\right|+C.$$

(11) $\int(|1+x|-|1-x|)dx.$

解 $\int(|1+x|-|1-x|)dx$

$$= \int|1+x|d(1+x)+\int|1-x|d(1-x)$$

$$= \operatorname{sgn}(1+x)\int(1+x)d(1+x)$$

$$+\operatorname{sgn}(1-x)\int(1-x)d(1-x)$$

$$= \operatorname{sgn}(1+x)\cdot\frac{(1+x)^2}{2}+\operatorname{sgn}(1-x)\frac{(1-x)^2}{2}+C$$

$$= \frac{1}{2}[|1+x|(1+x)+|1-x|(1-x)]+C.$$

练习题 7.3

（《讲义》上册，第 305 页）

求下列有理函数的不定积分：

(2) $\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$

解 设 $\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}$,

有

$$1=A(x+2)(x+3)+B(x+1)(x+3)$$

$$+C(x+1)(x+2).$$

令 $x=-1$, 有 $1=2A$ 或 $A=\frac{1}{2}$,

$x=-2$, 有 $1=-B$ 或 $B=-1$,

$x=-3$, 有 $1=2C$ 或 $C=\frac{1}{2}$.

从而,
$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2(x+3)}.$$

于是,
$$\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+3}$$
$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\ln|x+2|+\frac{1}{2}\ln|x+3|+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}\right|+C.$$

(4) $\int\frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$.

解 $\frac{x^3-1}{4x^3-x}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{x-4}{4x^3-x}\right)$.

设 $\frac{x-4}{4x^3-x}=\frac{x-4}{x(2x-1)(2x+1)}$
$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{2x+1},$$有

$$x-4=A(2x-1)(2x+1)+Bx(2x+1)+Cx(2x-1).$$

令 $x=0$, 有 $-4=-A$, 或 $A=4$,

$x=\frac{1}{2}$, 有 $-\frac{7}{2}=B$, 或 $B=-\frac{7}{2}$,

$x=-\frac{1}{2}$, 有 $-\frac{9}{2}=C$, 或 $C=-\frac{9}{2}$.

从而,
$$\frac{x^3-1}{4x^3-x}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{4}{x}-\frac{7}{2(2x-1)}-\frac{9}{2(2x+1)}\right).$$

于是，
$$\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx = \frac{1}{4}\left[\int dx + 4\int \frac{dx}{x} - \frac{7}{2}\int \frac{dx}{2x-1} - \frac{9}{2}\int \frac{dx}{2x+1}\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[x + 4\ln|x| - \frac{7}{4}\ln|2x-1| - \frac{9}{4}\ln|2x+1|\right] + C$$
$$= \frac{x}{4} + \ln|x| - \frac{1}{16}\ln|2x-1|^7 - \frac{1}{16}\ln|2x+1|^9 + C$$
$$= \frac{x}{4} + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^{16}}{(2x-1)^7(2x+1)^9}\right| + C.$$

(6) $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

解法一

设
$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

有
$$1 = (Ax+B)(x^2-\sqrt{2}x+1) + (Cx+D)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$
$$= (A+C)x^3 + [(B+D)+\sqrt{2}(C-A)]x^2 + [(A+C)+\sqrt{2}(D-B)]x + B + D.$$

$$\begin{cases} A+C=0, \\ B+D+\sqrt{2}(C-A)=0, \\ A+C+\sqrt{2}(D-B)=0, \\ B+D=1. \end{cases}$$

解得：$A=\frac{1}{2\sqrt{2}}$，$B=\frac{1}{2}$，$C=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$，$D=\frac{1}{2}$.

从而，

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)$$

于是，

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx\right.$$

$$\left.-\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx\right)$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\int\frac{2x+\sqrt{2}+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx\right.$$

$$\left.-\int\frac{2x-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx\right)$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\int\frac{d(x^2+\sqrt{2}x+1)}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right.$$

$$+\sqrt{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$-\int\frac{d(x^2-\sqrt{2}x+1)}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

$$\left.+\sqrt{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}[\ln|x^2+\sqrt{2}x+1|+2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)$$

$$-\ln|x^2-\sqrt{2}x+1|+2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)]+C$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\Big(\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|$$

$$+ 2\text{arctg}\,\frac{2\sqrt{2}x}{1-(2x^2-1)}\Big) + C$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\Big(\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|$$

$$+ 2\text{arctg}\,\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\Big) + C.$$

解法二

解 有$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x^4+1}-\frac{x^2-1}{x^4+1}\right)$.

于是，

$$\int\frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\left(\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx - \int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx - \int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} - \int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Bigg(\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\,\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|\Bigg) + C$$

（见 §7.3.例 4）

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|$$

$$+ 2\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} + C.$$

注 上面两种解法所得到的结果，虽然形式上有所不同，但是 $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}$ 与 $\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}$ 仅相差一个常数.

(8) $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}dx$.

解 $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}dx = \int \frac{3x+3+2}{(x^2+2x+2)^2}dx$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{(2x+2)dx}{(x^2+2x+2)^2} + 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}.$$

下面分别计算每一个不定积分：

1) $\int \frac{(2x+2)dx}{(x^2+2x+2)^2} = \int \frac{d(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$

$$= -\frac{1}{x^2+2x+2} + C_1.$$

2) $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2} = \int \frac{dx}{[(x+1)^2+1]^2}$

(设 $x+1=y$, $dx=dy$)

$$= \int \frac{dy}{(1+y^2)^2} - \int \frac{1+y^2-y^2}{(1+y^2)^2}dy$$

$$= \int \frac{dy}{1+y^2} - \int \frac{y^2}{(1+y^2)^2}dy$$

$$= \int \frac{dy}{1+y^2} + \frac{1}{2}\int yd\left(\frac{1}{1+y^2}\right)$$

$$= \int \frac{dy}{1+y^2} + \frac{y}{2(1+y^2)} - \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1+y^2}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}y + \frac{y}{2(1+y^2)} + C_2$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1) + \frac{x+1}{2(x^2+2x+2)} + C_2.$$

于是，$\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}dx$

$$= -\frac{3}{2(x^2+2x+2)} + \operatorname{arctg}(x+1) + \frac{x+1}{x^2+2x+2} + C$$

$$= \frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)} + \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

(10) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$.

解 设 $\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}$，有

$$1 = A(x^2+x+1)^2 + (Bx+C)(x+1)(x^2+x+1) + (Dx+E)(x+1).$$

解得 $A=1, B=-1, C=0, D=-1, E=0$. 从而

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+x+1} - \frac{x}{(x^2+x+1)^2}.$$

于是，$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2} = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{xdx}{x^2+x+1} - \int \frac{xdx}{(x^2+x+1)^2}$.

下面分别计算每一个不定积分：

1) $\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + C_1$.

2) $\int \frac{xdx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{x^2+x+1}dx$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} - \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C_2.$$

3) $$\int\frac{xdx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{2}\int\frac{2x+1-1}{(x^2+x+1)^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\frac{d(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2} - \int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}\right),$$

其中 $$\int\frac{d(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{1}{x^2+x+1} + C'$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^2}$$

（由递推公式）

$$= \frac{x+\frac{1}{2}}{2\cdot\frac{3}{4}\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]}$$

$$+\frac{1}{2\cdot\frac{3}{4}}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\text{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C''.$$ 从而，

$$\int\frac{xdx}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{1}{2(x^2+x+1)} - \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)}$$

$$-\frac{2}{3\sqrt{3}}\text{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C_3$$

$$= -\frac{x+2}{3(x^2+x+1)} - \frac{2}{3\sqrt{3}}\text{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C_3.$$

于是，$$\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$$

$$= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$+ \frac{x+2}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\text{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{x+2}{3(x^2+x+1)}$$

$$+ \frac{5}{3\sqrt{3}}\text{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

练习题　7.4

（《讲义》上册，第 316 页）

1. 求下列不定积分：

(1)　$\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx.$

解　设　$t=\sqrt[6]{x}$　或　$x=t^6, dx=6t^5dt$. 有

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx = 6\int \frac{t^3-1}{t^2+1}\cdot t^5dt$$

$$= 6\int\left(t^6-t^4-t^3+t^2+t-1-\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt$$

$$= 6\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-t\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+\text{arctg}t\right)+C$$

$$= \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}}$$

$$- 6x^{\frac{1}{6}} - 3\ln|x^{\frac{1}{3}}+1| + 6\text{arctg}x^{\frac{1}{6}} + C.$$

(3)　$\int \frac{2+x}{\sqrt[3]{3-x}}dx.$

解　设 $t=\sqrt[3]{3-x}$　或　$x=3-t^3, dx=-3t^2dt$. 有

$$\int \frac{2+x}{\sqrt[3]{3-x}}dx = \int \frac{2+(3-t^3)}{t}\cdot(-3t^2)dt$$

$$= 3\int (t^4 - 5t)dt$$

$$= 3\left(\frac{1}{5}t^5 - \frac{5}{2}t^2\right) + C = 3t^2\left(\frac{1}{5}t^3 - \frac{5}{2}\right) + C$$

$$= 3(3-x)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{5}(3-x) - \frac{5}{2}\right) + C$$

$$= -\frac{3}{5}(3-x)^{\frac{2}{3}}\left(x + \frac{19}{2}\right) + C.$$

(5) $\int\sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}dx.$

解 设 $t=\sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}$ 或 $x=\frac{3t^2+2}{t^2-3}, dx=-\frac{22t}{(t^2-3)^2}dt.$ 有

$$\int\sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}dx = \int t\cdot\frac{-22t}{(t^2-3)^2}dt$$

$$= -22\int\frac{t^2}{(t^2-3)^2}dt$$

$$= 11\int t d\left(\frac{1}{t^2-3}\right) = 11\left(\frac{t}{t^2-3} - \int\frac{dt}{t^2-3}\right)$$

$$= 11\left(\frac{t}{t^2-3} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|\right) + C'$$

$$= \sqrt{3x^2-7x-6}$$

$$-\frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\frac{11}{6\left|x-\frac{7}{6}+\sqrt{x^2-\frac{7}{3}x-2}\right|} + C'$$

$$= \sqrt{3x^2-7x-6}$$

$$+\frac{11}{2\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{7}{6}+\sqrt{x^2-\frac{7}{3}x-2}\right| + C.$$

(7) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$

$= \arcsin(x-1) + C.$

(9) $\int \frac{x+3}{\sqrt{1-4x^2}}dx$.

解 $\int \frac{x+3}{\sqrt{1-4x^2}}dx = -\frac{1}{8}\int \frac{d(1-4x^2)}{\sqrt{1-4x^2}}$

$+ \frac{3}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{1-(2x)^2}}$

$= -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + \frac{3}{2}\arcsin 2x + C.$

(11) $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}}dx$.

解 $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}}dx = \int \frac{3x - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 5}{\sqrt{x(2x-1)}}dx$

$= \frac{3}{4}\int \frac{4x-1}{\sqrt{2x^2-x}}dx + \frac{23}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x}}$

$= \frac{3}{4}\int \frac{d(2x^2-x)}{\sqrt{2x^2-x}}$

$+ \frac{23}{4\sqrt{2}}\int \frac{d\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left[\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{4}\right)\right]^2 - \frac{1}{8}}}$

$= \frac{3}{2}\sqrt{2x^2-x}$

$+ \frac{23}{4\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{4}\right) + \sqrt{2x^2-x}\right| + C'$

$= \frac{3}{2}\sqrt{2x^2-x}$

$+ \frac{23}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}}{4}\left|4x-1+\sqrt{8x(2x-1)}\right| + C'$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{2x^2-x}$$

$$+\frac{23}{4\sqrt{2}}\ln|4x-1+\sqrt{8x(2x-1)}|+C.$$

(13) $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

解 $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}dx$

$$=\int(x+\sqrt{x^2-1})dx=\int xdx+\int\sqrt{x^2-1}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C.$$

(15) $\int\frac{x+1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}dx$.

解 $\int\frac{x+1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x+x^2)}{(2x+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}}+C.$$

2. 求下列不定积分：

(1) $\int\cos^4x\sin^3xdx$.

解 $\int\cos^4x\sin^3xdx=\int\cos^4x\sin^2x\sin xdx$

$$=-\int\cos^4x(1-\cos^2x)d\cos x=\int(\cos^6x-\cos^4x)d\cos x$$

$$=\frac{1}{7}\cos^7x-\frac{1}{5}\cos^5x+C.$$

(3) $\int\sin^4x\cos^4xdx$.

解 $\int\sin^4x\cos^4xdx=\int(\sin x\cos x)^4dx=\int\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^4dx$

$$=\frac{1}{16}\int(\sin^2 2x)^2dx=\frac{1}{16}\int\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2dx$$

$$=\frac{1}{64}\int(1-2\cos 4x+\cos^2 4x)dx$$

$$= \frac{1}{64}\int\left[1 - 2\cos 4x + \frac{1}{2}(1 + \cos 8x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{64}\int\left(\frac{3}{2} - 2\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 8x\right)dx$$

$$= \frac{1}{64}\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{16}\sin 8x\right) + C$$

$$= \frac{1}{128}\left(3x - \sin 4x + \frac{1}{8}\sin 8x\right) + C.$$

(5) $\int \mathrm{ctg}^3 x dx$.

解 $\int \mathrm{ctg}^3 x dx = \int \mathrm{ctg}^2 x \mathrm{ctg} x dx$

$$= \int (1 - \csc^2 x)\sin x d\csc x$$

$$= \int\left(\frac{1}{\csc x} - \csc x\right)d\csc x$$

$$= \ln|\csc x| - \frac{1}{2}\csc^2 x + C'$$

$$= -\ln|\sin x| - \frac{1}{2}\mathrm{ctg}^2 x + C.$$

(7) $\int \sec^8 x dx$.

解 设 $t = \mathrm{tg} x, dt = \sec^2 x dx$. 有

$$\int \sec^8 x dx = \int \sec^6 x \sec^2 x dx = \int (1 + \mathrm{tg}^2 x)^3 \sec^2 x dx$$

$$= \int (1 + t^2)^3 dt = \int (1 + 3t^2 + 3t^4 + t^6)dt$$

$$= t + t^3 + \frac{3}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7 + C$$

$$= \frac{1}{7}\mathrm{tg}^7 x + \frac{3}{5}\mathrm{tg}^5 x + \mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg} x + C.$$

(9) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx$.

解 $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}d\cos x$

$$= \int (\cos^{\frac{2}{3}} x - \cos^{-\frac{4}{3}} x) d\cos x$$

$$= \frac{3}{5}\cos^{\frac{5}{3}} x + 3\cos^{-\frac{1}{3}} x + C.$$

(11) $\int \cos 4x \cos 7x dx$.

解 $\int \cos 4x \cos 7x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 11x + \cos 3x) dx$

$$= \frac{1}{22}\sin 11x + \frac{1}{6}\sin 3x + C.$$

(13) $\int \frac{dx}{4 - 5\sin x}$.

解 设 $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$. 有

$$\int \frac{dx}{4 - 5\sin x} = \int \frac{1}{4 - \frac{10t}{1 + t^2}} \cdot \frac{2}{1 + t^2} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{5}{2}t + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t - \frac{5}{4}\right)}{\left(t - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{4}} \ln \left| \frac{\left(t - \frac{5}{4}\right) - \frac{3}{4}}{\left(t - \frac{5}{4}\right) + \frac{3}{4}} \right| + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln \left| \frac{t - 2}{t - \frac{1}{2}} \right| + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln \left| \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}} \right| + C.$$

(15) $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$.

解 $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx = \int \frac{1 + \sin x - 1}{1 + \sin x} dx$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{1 + \sin x}\right) dx$$

$$= \int dx - \int \frac{dx}{1 + \sin x}.$$

其中 $\int dx = x + C_1.$

设 $t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$ 有

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} = \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1 + t^2}} \cdot \frac{2}{1 + t^2}dt$$

$$= 2\int \frac{d(1 + t)}{(1 + t)^2} = -\frac{2}{1 + t} + C_2 = -\frac{2}{1 + \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}} + C_2.$$

于是， $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x}dx = x + \frac{2}{1 + \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}} + C.$

(17) $\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}.$

解 设 $t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$ 有

$$\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x} = \int \frac{\frac{2}{1 + t^2}}{8 - 4 \cdot \frac{2t}{1 + t^2} + 7 \cdot \frac{1 - t^2}{1 + t^2}}dt$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2 - 8t + 15} = 2\int \frac{d(t - 4)}{(t - 4)^2 - 1}$$

$$= \ln\left|\frac{(t - 4) - 1}{(t - 4) + 1}\right| + C = \ln\left|\frac{t - 5}{t - 3}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} - 5}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} - 3}\right| + C.$$

第八章　定　积　分

练习题　8.2

（《讲义》上册，第 335 页）

2. 证明：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 有界，$[a,b]$ 的分法 T 加上若干个新分点，得到分法 T'，分法 T 与 T' 的振幅和分别表为 $(T)\sum_a^b \omega_k\Delta x_k$ 与 $(T')\sum_a^b \omega_k\Delta x_k$，则

$$(T')\sum_a^b \omega_k\Delta x_k \leqslant (T)\sum_a^b \omega_k\Delta x_k.$$

证　设分法 T 的分点是：$x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$，且

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

设分法 T' 比分法 T 只多一个分点 x'，且 $x_{k-1}<x'<x_k$. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[x_{k-1},x']$，$[x',x_k]$ 与 $[x_{k-1},x_k]$ 的振幅分别是 ω_k'，ω_k'' 与 ω_k. 已知 $\omega_k'\leqslant\omega_k$，$\omega_k''\leqslant\omega_k$. 从而，在区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上，有

$$\begin{aligned}\omega_k'(x'-x_{k-1})+\omega_k''(x_k-x') &\leqslant \omega_k(x'-x_{k-1})+\omega_k(x_k-x')\\ &= \omega_k(x'-x_{k-1}+x_k-x') = \omega_k(x_k-x_{k-1}).\end{aligned}$$

除第 k 个小区间之外，其余的区间既是分法 T 的区间也是分法 T' 的区间. 函数 $f(x)$ 在这些区间上的振幅相等. 于是

$$(T')\sum_a^b \omega_k\Delta x_k \leqslant (T)\sum_a^b \omega_k\Delta x_k.$$

如果分法 T' 比方法 T 多若干个新分点，在分法 T 的基础上逐次增加一个新分法，增加若干次，则上述结论也成立.

3. 应用可积准则证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，函数 $g(x)$ 在

$[a,b]$上除一点 x_0 外，$f(x)=g(x)\ (x\neq x_0)$，则 $g(x)$在$[a,b]$可积，且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

证　已知函数 $f(x)$在$[a,b]$有界，从而函数 $g(x)$在$[a,b]$也有界．设 $\omega(f)$与 $\omega(g)$分别表示 $f(x)$与 $g(x)$在$[a,b]$的振幅．从而，$\omega(f)$与 $\omega(g)$也有界，即

$$\exists\ M>0, 有\ \omega(f)\leqslant M \quad 与 \quad \omega(g)\leqslant M.$$

任给$[a,b]$分法 T，设 $\omega_k(f)$与 $\omega_k(g)$分别表示 $f(x)$与 $g(x)$在第 k 个小区间$[x_{k-1},x_k]$的振幅．不妨设 $x_0\in[x_{k-1},x_k)$，包含点 x_0 的小区间至多有两个（当 $x_0=x_{k-1}$，$x_{k-1}\neq a$ 时，有两个小区间$[x_{k-2},x_{k-1}]$与$[x_{k-1},x_k]$；当 $x_0\in(x_{k-1},x_k)$或 $x_0=a$ 和 $x_0=b$ 时，只有一个小区间），有

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k(g)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\omega_k(g)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}[\omega_k(g)-\omega_k(f)]\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k$$

$$= [\omega_{k-1}(g)-\omega_{k-1}(f)]\Delta x_{k-1}$$

$$+ [\omega_k(g)-\omega_k(f)]\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k.$$

其中　$$|[\omega_{k-1}(g)-\omega_{k-1}(f)]\Delta x_{k-1} + [\omega_k(g)-\omega_k(f)]\Delta x_k|$$

$$\leqslant |\omega_{k-1}(g)-\omega_{k-1}(f)|\Delta x_{k-1} + |\omega_k(g)-\omega_k(f)|\Delta x_k$$

$$\leqslant 2M(\Delta x_{k-1}+\Delta x^k) \to 0\ (l(T)\to 0).$$

已知 $f(x)$在$[a,b]$可积，有

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k \to 0 \quad (l(T)\to 0).$$

从而，有　$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k(g)\Delta x_k \to 0 \quad (l(T)\to 0),$$

即函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积.

已知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积,任给 $[a,b]$ 分法 T,取特殊的 ξ_k,使 $\xi_k \neq x_0$ $(k=1,2,\cdots,n)$. 有

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k.$$

从而,
$$\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k \quad (\text{极限存在}),$$

即
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

注 此题说明,改变区间上可积函数一个点或有限个点的函数值,此函数仍是可积的,且其积分(值)也不变.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界,证明(振幅的等价形式)

$$\sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\} - \inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\} = \sup_{x,y\in[a,b]}\{|f(x)-f(y)|\}.$$

证 一方面,已知 $\forall\ x,y\in[a,b]$,有

$$f(x)-f(y) \leqslant |f(x)-f(y)|,$$

则
$$\sup_{x,y\in[a,b]}\{f(x)-f(y)\} \leqslant \sup_{x,y\in[a,b]}\{|f(x)-f(y)|\}.$$

再由练习题 4.1 的第 12 题和第 5 题,有

$$\sup_{x,y\in[a,b]}\{f(x)-f(y)\} = \sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\} + \sup_{y\in[a,b]}\{-f(y)\}$$

$$= \sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\} - \inf_{y\in[a,b]}\{f(y)\}.$$

从而,

$$\sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\} - \inf_{y\in[a,b]}\{f(y)\} \leqslant \sup_{x,y\in[a,b]}\{|f(x)-f(y)|\};$$

另一方面,$\forall\ x,y\in[a,b]$,有

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\} - \inf_{y\in[a,b]}\{f(y)\}.$$

从而,

$$\sup_{x,y\in[a,b]}\{|f(x)-f(y)|\}\leqslant\sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\}-\inf_{y\in[a,b]}\{f(y)\}.$$

于是，

$$\sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\}-\inf_{y\in[a,b]}\{f(y)\}=\sup_{x,y\in[a,b]}\{|f(x)-f(y)|\}$$

或 $$\sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\}-\inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\}=\sup_{x,y\in[a,b]}\{|f(x)-f(y)|\}.$$

6. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则函数 $[f(x)]^2$ 在 $[a,b]$ 也可积.

证　已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界，即

$$\exists\ M>0,\forall\ x\in[a,b],\text{有 }|f(x)|\leqslant M.$$

任给 $[a,b]$ 分法 T，设函数 $f(x)$ 与 $[f(x)]^2$ 在 $[x_{k-1},x_k]$ 的振幅分别是 ω_k 与 ω_k'，有

$$\begin{aligned}\omega_k'&=\sup_{x,y\in[x_{k-1},x_k]}\{|[f(x)]^2-[f(y)]^2|\}\\&=\sup_{x,y\in[x_{k-1},x_k]}\{|f(x)+f(y)||f(x)-f(y)|\}\\&\leqslant\sup_{x,y\in[x_{k-1},x_k]}\{(|f(x)|+|f(y)|)|f(x)-f(y)|\}\\&\leqslant 2M\sup_{x,y\in[x_{k-1},x_k]}\{|f(x)-f(y)|\}\leqslant 2M\omega_k.\end{aligned}$$

从而，$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k'\Delta x_k\leqslant 2M\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k.$$

已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，有 $\lim\limits_{l(T)\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k=0$. 于是

$$\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k'\Delta x_k=0.$$

即函数 $[f(x)]^2$ 在 $[a,b]$ 可积.

7. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，且存在 $c>0$，$\forall\ x\in[a,b]$，

有 $f(x)\geqslant c$，则函数 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 可积．

证 任给 $[a,b]$ 分法 T．设 $f(x)$ 与 $\frac{1}{f(x)}$ 在第 k 个小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 的振幅分别是 ω_k 与 ω_k'，有

$$\omega_k' = \sup_{x,y\in[x_{k-1},x_k]}\left\{\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(y)}\right|\right\} = \sup_{x,y\in[x_{k-1},x_k]}\left\{\left|\frac{f(x)-f(y)}{f(x)f(y)}\right|\right\}$$

$$\leqslant \frac{1}{c^2}\sup_{x,y\in[x_{k-1},x_k]}\{|f(x)-f(y)|\} = \frac{1}{c^2}\omega_k.$$

从而，
$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k'\Delta x_k \leqslant \frac{1}{c^2}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k.$$

已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，有 $\lim\limits_{l(T)\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k = 0$，于是

$$\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k'\Delta x_k = 0,$$

即函数 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 可积．

8. 证明：函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right], & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

与
$$\varphi(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 都可积．

证 (1) $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可积．

函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有无限多个间断点：$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$ 与 0．$\forall\ \varepsilon>0$，将 $[0,1]$ 分成两个区间：$[0,\varepsilon]$ 与 $[\varepsilon,1]$．显然，函数 $f(x)$ 在 $[\varepsilon,1]$ 上只有有限个间断点，根据定理 3，函数 $f(x)$ 在 $[\varepsilon,1]$ 可积，即对上述 $\varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$（要求 $\delta\leqslant\varepsilon$），$\forall\ T$：$l(T)<\delta$，有

$$\sum_{\varepsilon}^{1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon.$$

任给[0,1]分法 T,使 $l(T)<\delta$. 并且函数 $f(x)$在第 k 个小区间$[x_{k-1},x_k]$的振幅 $\omega_k \leqslant 1, k=1,2,\cdots,n$. $\exists\ i\in\mathbf{N}$,使

$$x_{i-1} < \varepsilon \leqslant x_i.$$

有

$$\sum_{0}^{1} \omega_k \Delta x_k = \sum_{0}^{x_{i-1}} \omega_k \Delta x_k + \omega_i (x_i - x_{i-1}) + \sum_{x_i}^{1} \omega_k \Delta x_k$$

$$< \sum_{0}^{x_{i-1}} \Delta x_k + \Delta x_i + \sum_{\varepsilon}^{1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,$$

即函数 $f(x)$在[0,1]可积.

(2) $\varphi(x)$在[0,1]可积.

函数 $\varphi(x)$在[0,1]有无限多个间断点:$1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$与 0. 与(1)的证法完全相同,可证 $\varphi(x)$在[0,1]可积,从略.

9. 证明:函数

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x\text{ 是有理数}, \\ -1, & x\text{ 是无理数}. \end{cases}$$

在[0,1]不可积,而$|f(x)|$在[0,1]可积,说明了什么?

证 任给[0,1]分法 T:

若 ξ_k 皆取$[x_{k-1},x_k]$上的有理数,有

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1;$$

若 ξ_k 皆取$[x_{k-1},x_k]$上的无理数,有

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = -\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = -1.$$

当 $l(T)\to 0$ 时,积分和 $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ 与 ξ_k 的取法有关,即当 $l(T)\to 0$ 时,积分和 $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ 不存在极限. 于是,函数 $f(x)$ 在[0,1]不可

积.

而$|f(x)|=1$，这是常数函数．显然，它在$[0,1]$可积．

这说明　当函数$|f(x)|$在$[a,b]$可积时，函数$f(x)$在$[a,b]$不一定可积．

*　　　*　　　*　　　*

10. 证明：若函数$f(x)$与$\varphi(x)$在$[a,b]$连续，则

$$\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\varphi(\theta_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx,$$

其中　$x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k, x_{k-1}\leqslant\theta_k\leqslant x_k, k=1,2,\cdots,n, \Delta x_k=x_k-x_{k-1}, x_0=a, x_n=b.$

证　已知函数$f(x),\varphi(x)$在$[a,b]$连续，从而$f(x)\varphi(x)$在$[a,b]$也连续，于是，$f(x)\varphi(x)$在$[a,b]$可积，且$f(x)$在$[a,b]$有界，即

$$\exists M>0, \forall x\in[a,b], 有 |f(x)|\leqslant M.$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\varphi(\theta_k)\Delta x_k\\&=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\varphi(\xi_k)\Delta x_k+\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\varphi(\theta_k)\Delta x_k\\&\qquad\qquad-\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\varphi(\xi_k)\Delta x_k\\&=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\varphi(\xi_k)\Delta x_k+\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[\varphi(\theta_k)-\varphi(\xi_k)]\Delta x_k.\end{aligned}$$

下面分别讨论上式最后两个和数．

已知函数$f(x)\varphi(x)$在$[a,b]$可积，有

$$\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\varphi(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)\varphi(x)dx.$$

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[\varphi(\theta_k)-\varphi(\xi_k)]\Delta x_k\right|\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(\xi_k)||\varphi(\theta_k)-\varphi(\xi_k)|\Delta x_k.\end{aligned}$$

$$\leqslant M\sum_{k=1}^{n}|\varphi(\theta_k)-\varphi(\xi_k)|\Delta x_k\leqslant M\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k,$$

其中 $\forall\ \theta_k,\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$，$\omega_k$ 是 $\varphi(x)$ 在 $[x_{k-1},x_k]$ 的振幅．

已知 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，有 $\lim\limits_{l(T)\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k=0$. 从而

$$\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)[\varphi(\theta_k)-\varphi(\xi_k)]\Delta x_k=0.$$

于是，
$$\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\varphi(\theta_k)\Delta x_k$$
$$=\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\varphi(\xi_k)\Delta x_k$$
$$+\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)[\varphi(\theta_k)-\varphi(\xi_k)]\Delta x_k$$
$$=\int_a^b f(x)\varphi(x)dx.$$

11. 证明：黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 是无理数和 } x=0,\\ \dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{m}{n},m\text{ 与 }n(n\geqslant 1)\text{ 是整数，且互质}.\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 可积，且

$$\int_0^1 R(x)dx=0.$$

证 $\forall\ \varepsilon>0(\varepsilon<1$，暂时固定$)$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，使 $\frac{1}{N}<\varepsilon\leqslant\frac{1}{N-1}$，则有理数 $\frac{m}{n}\in[0,1]$（n 与 m 互质，且 $n\leqslant N-1$）只有有限多个，设有 k_N 个．取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2k_N}>0$.

任给 $[0,1]$ 分法 T，使 $l(T)<\delta$，它将 $[0,1]$ 分成的小区间分为两类：

一类是包含有理数 $\frac{m}{n}(n\leqslant N-1)$ 的小区间，从而第一类小区

间至多是 $2k_N$ 个．在这些小区间上所作的"积分和"，表为 $\sum' R(\xi_k)\Delta x_k$，已知 $0\leqslant R(\xi_k)\leqslant 1$，有

$$\sum{}' R(\xi_k)\Delta x_k \leqslant \sum{}'\Delta x_k < \sum{}'\delta \leqslant 2k_N\delta = \varepsilon.$$

另一类是不包含有理数$\frac{m}{n}(n\leqslant N-1)$的小区间，即这样 的小区间上任意点 x，有 $0\leqslant R(x)\leqslant\frac{1}{N}(<\varepsilon)$．在这些小区间上所作的"积分和"，表为 $\sum'' R(\xi_k)\Delta x_k$，有

$$\sum{}'' R(\xi_k)\Delta x_k < \frac{1}{N}\sum{}''\Delta x_k < \frac{1}{N}(1-0) = \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

于是，$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta=\frac{\varepsilon}{2k_N}>0, \forall\ T: l(T)<\delta, \forall\ \xi=\{\xi_k\}$，有

$$\sum_{k=1}^{n} R(\xi_k)\Delta x_k = \sum{}' R(\xi_k)\Delta x_k + \sum{}'' R(\xi_k)\Delta x_k < 2\varepsilon$$

或
$$\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} R(\xi_k)\Delta x_k = 0,$$

即函数 $R(x)$在$[0,1]$可积，且

$$\int_0^1 R(x)dx = 0.$$

12．证明：若函数 $f(x)$在$[a,b]$有界，则

(1) $\lim\limits_{l(T)\to 0} s(T) = I_0$.　　　　(2) $\lim\limits_{l(T)\to 0} S(T) = I^0$.

证　首先证明　(1)　$\lim\limits_{l(T)\to 0} s(T) = I_0 = \sup\limits_T\{s(T)\}$.

已知　$\sup\limits_T\{s(T)\} = I_0$，由上确界的定义，$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ T'$，有

$$I_0 - \varepsilon < s(T') \leqslant I_0.$$

（往证，$\exists\ \delta>0, \forall\ T: l(T)<\delta$，有 $I_0-\varepsilon<s(T)\leqslant I_0$，即 $\lim\limits_{l(T)\to 0} s(T) = I_0$）

设分法 T'有 m 个分点，函数 $f(x)$在$[a,b]$上的振幅是 ω.

取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2m\omega}>0$.

$\forall\ T: l(T)<\delta$. 在分法 T 的基础上加上分法 T'的 m 个分点，得

新分法 T''. 由小和的性质，有 $s(T')\leqslant s(T'')$，从而

$$I_0-\varepsilon<s(T')\leqslant s(T'')(\leqslant I_0). \qquad (1)$$

分法 T''最多有 $2m$ 个小区间以分法 T'的 m 个分点为分点. 小和 $s(T'')$与 $s(T)$也最多在这 $2m$ 个小区间不同. 已知每个小区间之长小于 δ，有

$$s(T'')-s(T)<2m\omega\delta=2m\omega\frac{\varepsilon}{2m\omega}=\varepsilon$$

或

$$s(T'')-\varepsilon<s(T).$$

由(1)式，有

$$I_0-\varepsilon-\varepsilon<s(T)\leqslant I_0 \quad 或 \quad I_0-2\varepsilon<s(T)\leqslant I_0,$$

即

$$\lim_{l(T)\to 0}s(T)=I_0=\sup_T\{s(T)\}.$$

同法可证，$\lim\limits_{l(T)\to 0}S(T)=I^0=\inf\limits_T\{S(T)\}$.

13. 证明：函数 $f(x)$在$[a,b]$可积$\Longleftrightarrow\forall\ \varepsilon>0$ 与$\forall\ \eta>0$，$\exists\ \delta>0$，$\forall\ T$：$l(T)<\delta$，振幅 $\omega_{k'}\geqslant\eta$ 的那些小区间的总长 $\sum\limits_{k'}\Delta x_{k'}<\varepsilon$.

证 $\Rightarrow$已知 $f(x)$在$[a,b]$可积，则

$$\forall\ \eta\varepsilon>0,\exists\ \delta>0,\forall\ T:l(T)<\delta,有\sum_a^b\omega_k\Delta x_k<\eta\varepsilon.$$

设振幅 $\omega_{k'}\geqslant\eta$ 对应的小区间的长是 $\Delta x_{k'}$，有

$$\eta\varepsilon>\sum_a^b\omega_k\Delta x_k\geqslant\eta\sum_{k'}\Delta x_{k'},$$

即

$$\sum_{k'}\Delta x_{k'}<\varepsilon.$$

$\Leftarrow$设 $f(x)$在$[a,b]$的振幅是 ω，有

$$\sum_a^b\omega_k\Delta x_k=\sum_{k'}\omega_{k'}\Delta x_{k'}+\sum_{k''}\omega_{k''}\Delta x_{k''},$$

其中 $\omega_{k'}\geqslant\eta$，$\omega_{k''}<\eta$. 由已知条件，有

$$\sum_a^b\omega_k\Delta x_k=\sum_{k'}\omega_{k'}\Delta x_{k'}+\sum_{k''}\omega_{k''}\Delta x_{k''}$$

$$<\omega\sum_{k'}\Delta x_{k'}+\eta\sum_{k''}\Delta x_{k''}\leqslant\omega\varepsilon+\eta(b-a).$$

因为 ε 与 η 都是任意小的正数，所以 $\omega\varepsilon+\eta(b-a)$ 也是任意小的正数．于是，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积．

14. 证明：若函数 $\varphi(x)$ 在 $[A,B]$ 连续，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，且 $[A,B]=\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$，则 $\varphi[f(x)]$ 在 $[a,b]$ 可积．

证 已知 $\varphi(y)$ 在 $[A,B]$ 连续，从而一致连续，即

$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \eta>0$，将 $[A,B]$ 分成若干个小区间，使每个小区间的长 $\Delta y_k<\eta$，在每个小区间上的振幅 $\omega_k(\varphi)<\varepsilon$.

由第 13 题，已知 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则对上述的 $\varepsilon>0$ 与 $\eta>0,\exists\ \delta>0,\forall\ T:l(T)<\delta$，振幅 $\omega_{k'}(f)\geqslant\eta$ 的那些小区间的总长 $\sum\limits_{k'}\Delta x_{k'}<\varepsilon$，其余小区间上的振幅 $\omega_{k''}(f)<\eta$，即 $\Delta y_{k''}<\eta$，也有

$$\omega_{k''}[\varphi(f)]<\varepsilon.$$

已知 $\varphi(x)$ 在 $[A,B]$ 有界．设 $\varphi(x)$ 在 $[A,B]$ 的振幅是正常数 ω. 于是，

$$\begin{aligned}\sum_a^b\omega_k[\varphi(f)]\Delta x_k&=\sum_{k'}\omega_{k'}[\varphi(f)]\Delta x_{k'}+\sum_{k''}\omega_{k''}[\varphi(f)]\Delta x_{k''}\\&<\omega\sum_{k'}\Delta x_{k'}+\varepsilon\sum_{k''}\Delta x_{k''}\\&<\omega\cdot\varepsilon+\varepsilon(b-a)=[\omega+(b-a)]\varepsilon,\end{aligned}$$

即函数 $\varphi[f(x)]$ 在 $[a,b]$ 可积．

练习题 8.3

（《讲义》上册，第 346 页）

1. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，非负，且 $\exists\ x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)>0$，则 $\int_a^b f(x)dx>0$.

证 已知函数 $f(x)$ 在 x_0 连续，且 $f(x_0)>0$，根据连续函数的保号性，$\exists\ \delta>0,\forall\ x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\cap[a,b]$，有 $f(x)\geqslant\dfrac{f(x_0)}{2}$.

设$[\alpha,\beta]=[x_0-\delta,x_0+\delta]\cap[a,b]$，且$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，又已知$\forall x\in[a,b]$，有$f(x)\geqslant 0$. 于是

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_\alpha^\beta f(x)dx \geqslant \frac{f(x_0)}{2}(\beta-\alpha)>0.$$

2. 证明：若函数$f(x)$在$[a,b]$连续，且$\int_a^b f^2(x)dx=0$，则$f(x)\equiv 0$.

证 用反证法. 假设$f(x)\not\equiv 0$，即$\exists x_0\in[a,b]$，使$f(x_0)\neq 0$，从而，有$[f(x_0)]^2>0$. 已知函数$[f(x)]^2$在$[a,b]$连续，非负，由第1题，有$\int_a^b f^2(x)dx>0$. 与已知条件矛盾. 于是

$$f(x)\equiv 0.$$

3. 证明：若函数$f(x)$在$[a,b]$连续，且对$[a,b]$上任意可积函数$\varphi(x)$，有$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=0$，则$f(x)\equiv 0$.

证 特别是取$\varphi(x)=f(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\int_a^b [f(x)]^2dx=0.$$

由第2题，有$f(x)\equiv 0$.

4. 证明：

$$0<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}xdx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx.$$

证 已知函数$\sin^{n+1}x$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$连续、非负，且$\exists x_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，使$\sin^{n+1}x_0>0$. 由第1题，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}xdx>0.$$

又已知函数$\sin^n x-\sin^{n+1}x=\sin^n x(1-\sin x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$连续、非负，且$\exists x_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，使

$$\sin^n x_0-\sin^{n+1}x_0=\sin^n x_0(1-\sin x_0)>0.$$

由第1题，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^n x - \sin^{n+1}x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}xdx > 0.$$

于是，
$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}xdx < \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx.$$

5. 证明：若函数 $f(x)$ 在$[0,1]$满足利普希茨条件，即$\forall\ x,y\in[0,1]$，有

$$|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|,$$

其中 M 是常数，则

$$\left|\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{n}.$$

证 函数 $f(x)$ 在$[0,1]$满足利普希茨条件. 显然，函数 $f(x)$ 在$[0,1]$一致连续，从而函数 $f(x)$ 在$[0,1]$可积. 为此将$[0,1]$ n 等分，分点是：

$$0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},1.$$

由定积分的区间可加性，有

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx.$$

由积分中值定理和利普希茨条件，有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\
=&\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\
=&\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\
=&\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f(\xi_k) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\right| \\
\leqslant&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|f(\xi_k) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\xi_k - \frac{k}{n}\right|,
\end{aligned}$$

其中 $\frac{k-1}{n}\leqslant\xi_k\leqslant\frac{k}{n}$. 从而 $\left|\xi_k-\frac{k}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}$. 有 $\sum_{k=1}^{n}\left|\xi_i-\frac{k}{n}\right|\leqslant 1$，于是

$$\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{n}.$$

6. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调减少，则

$$\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\frac{f(0)-f(1)}{n}.$$

说明其几何意义.

证 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调减少，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可积. 将 $[0,1]$ n 等分，分点是：$0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},1$. 有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)&=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)dx-\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f\left(\frac{k}{n}\right)dx\\
&=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]dx\\
&\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[f\left(\frac{k-1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]dx\\
&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k-1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\\
&=\frac{1}{n}\left[f(0)-f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)\right.\\
&\qquad\left.-f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)-f(1)\right]\\
&=\frac{f(0)-f(1)}{n}.
\end{aligned}$$

几何意义：曲边梯形的面积 $\int_0^1 f(x)dx$ 用不超过它的 n 个矩形面积之和 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ 近似代替，其误差，即图 8.a 中(取 $n=5$)带有斜线部分的面积之和，不超过矩形面积 $\frac{1}{n}[f(0)-f(1)]$.

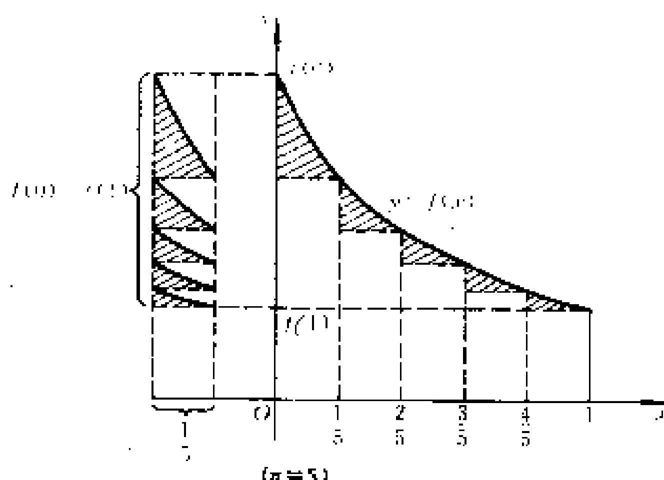


图 8.a

* * * *

8. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且为正，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b[f(x)]^n dx}=\max\{f(x)\mid x\in[a,b]\}.$$

证 已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 取到最大值，即 $\exists\ \xi\in[a,b]$，$\forall\ x\in[a,b]$，有

$$f(x)\leqslant f(\xi)=\max\{f(x)\mid x\in[a,b]\}.$$

设 $f(\xi)=M>0$. 有

$$I_n=\sqrt[n]{\int_a^b[f(x)]^n dx}\leqslant\sqrt[n]{\int_a^b M^n dx}=M(b-a)^{\frac{1}{n}}.$$

已知 $f(x)$ 在 ξ 连续，且 $f(\xi)=M>0$. 首先当 $\xi\in(a,b)$，则存在充分大的 $n\in\mathbf{N}$，使 $\left[\xi-\frac{1}{n},\xi+\frac{1}{n}\right]\subset(a,b)$，有

$$I_n=\sqrt[n]{\int_a^b[f(x)]^n dx}\geqslant\sqrt[n]{\int_{\xi-\frac{1}{n}}^{\xi+\frac{1}{n}}[f(x)]^n dx}=f(\xi_n)\sqrt[n]{\frac{2}{n}},$$

其中 $\xi_n\in\left[\xi-\frac{1}{n},\xi+\frac{1}{n}\right]$. 其次当 $\xi=a$ 或 $\xi=b$ 时，分别以 $\left[a,a+\frac{1}{n}\right]$ 或 $\left[b-\frac{1}{n},b\right]$ 代替 $\left[\xi-\frac{1}{n},\xi+\frac{1}{n}\right]$，有

$$I_n\geqslant f(\xi_n)\sqrt[n]{\frac{1}{n}},$$

其中 $\xi_n\in\left[a,a+\frac{1}{n}\right]$或$\xi_n\in\left[b-\frac{1}{n},b\right]$. 于是，$\forall\ n\in\mathbf{N}$，总有

$$f(\xi_n)\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\leqslant I_n=\sqrt[n]{\int_a^b[f(x)]^n dx}\leqslant M(b-a)^{\frac{1}{n}}.$$

已知

$$\lim_{n\to\infty}f(\xi_n)\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}M(b-a)^{\frac{1}{n}}=M.$$

根据两边夹定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b[f(x)]^n dx}=M=\max\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}.$$

9. 证明：若函数 $f(x)$在$[A,B]$可积，$(a,b)\subset[A,B]$，则

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx=0.$$

称为函数 $f(x)$积分的连续性.

证 已知 $f(x)$在$[A,B]$可积，则 $f(x)$在$[A,B]$有界，即 $\exists\ M>0,\forall\ x\in[A,B]$有$|f(x)|\leqslant M$.

已知 $A<a<b<B$. 将$[a,b]$ n 等分，分点：

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,\text{其中 } x_k=a+k\frac{b-a}{n},$$

$$k=0,1,2,\cdots,n.$$

取 $|h|=\min\left\{\frac{b-a}{n},B-b,a-A\right\}>0$. 首先设 $h>0$.

设 ω_k 是 $f(x)$在$[x_{k-1},x_k]$上的振幅，$k=1,2,\cdots,n$. ω_{n+1}是 $f(x)$在$[x_n,x_{n+1}]=[b,b+h]$的振幅$(b+h<B)$. 考虑积分

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(x+h)-f(x)|dx,\qquad x\in[x_{k-1},x_k].$$

若 $x,x+h\in[x_{k-1},x_k]$，则$|f(x+h)-f(x)|\leqslant\omega_k$；

若 $x\in[x_{k-1},x_k]$，$x+h\in[x_k,x_{k+1}]$，则

$$|f(x+h)-f(x)|=|f(x+h)-f(x_k)+f(x_k)-f(x)|$$
$$\leqslant|f(x+h)-f(x_k)|+|f(x_k)-f(x)|$$

$$\leqslant \omega_{k+1} + \omega_k, \qquad k = 0,1,2\cdots n.$$

上述两种情况，不论哪种情况，都有

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant \omega_{k+1} + \omega_k.$$

于是，

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)|dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x+h) - f(x)|dx$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^n (\omega_{k+1} + \omega_k)\Delta x_k \qquad (\Delta x_k = x_k - x_{k-1})$$

$$\leqslant 2\sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k + \omega_{n+1}\Delta x_{n+1}. \qquad (\Delta x_{n+1} = h)$$

已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k = 0.$

而 $\quad 0 \leqslant \omega_{n+1}\Delta x_{n+1} \leqslant 2M \cdot \dfrac{b-a}{n}, \quad$ 有 $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\omega_{n+1}\Delta x_{n+1} = 0.$

从而，当 $h \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty$，有

$$\lim_{h\to 0^+}\int_a^b |f(x+h) - f(x)|dx = 0.$$

其次当 $h<0$ 时，同法可证

$$\lim_{h\to 0^-}\int_a^b |f(x+h) - f(x)|dx = 0.$$

于是，

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h) - f(x)|dx = 0.$$

练习题 8.4

（《讲义》上册，第361页）

1. 用定积分定义求下列定积分：

(1) $\int_0^1 x dx.$

解 函数 $f(x)=x$ 在 $[0,1]$ 连续，从而可积.

将$[0,1]$ n 等分，分点：$0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},1$.

取第 k 个小区间$\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$的右端点$\frac{k}{n}$作为 ξ_k，即 $\xi_k=\frac{k}{n}$，$k=1,2,\cdots,n$. 作特殊的积分和

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

于是，

$$\int_0^1 xdx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

(3) $\int_2^3\frac{dx}{x^2}$.

解 函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$在$[2,3]$连续，从而可积.

将$[2,3]$ n 等分，分点：$2=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n=3$，其中 $x_k=2+\frac{k}{n}$，$k=0,1,2,\cdots,n$. 取第 k 个小区间$[x_{k-1},x_k]$的两个端点 x_{k-1}，x_k 的几何平均数$\sqrt{x_{k-1}x_k}$作为 ξ_k，即 $\xi_k=\sqrt{x_{k-1}x_k}$. 显然，

$$x_{k-1}\leqslant\sqrt{x_{k-1}x_k}\leqslant x_k,k=1,2,\cdots,n.$$

作特殊的积分和

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{x_{k-1}x_k}}\right)^2\cdot(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{k-1}}-\frac{1}{x_k}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_1}\right)+\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{x_n}\right)$$

$$=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

于是，$$\int_2^3\frac{dx}{x^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{x_{k-1}x_k}}\right)^2(x_k-x_{k-1})=\frac{1}{6}.$$

2. 求下列定积分：

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{8}}\frac{dx}{\cos^2 2x}$.

解 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x} = \frac{1}{2}\text{tg}2x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \text{tg}x dx.$

解 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \text{tg}x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln 2.$

(6) $\int_1^e \frac{2+\ln x}{x} dx.$

解 $$\int_1^e \frac{2+\ln x}{x} dx = \int_1^e \left(\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) dx$$

$$= \left(2\ln x + \frac{1}{2}\ln^2 x\right)\Big|_1^e = \frac{5}{2}.$$

(8) $\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{2+4x}} dx.$

解 $$\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{2+4x}} dx = \frac{1}{4}\int_1^4 \frac{2+4x-2}{\sqrt{2+4x}} dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^4 \sqrt{2+4x}\,dx - \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{2+4x}}$$

$$= \frac{1}{24}(2+4x)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 - \frac{1}{4}(2+4x)^{\frac{1}{2}}\Big|_1^4 = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

(10) $\int_0^{\ln 3} xe^{-x} dx.$

解 $$\int_0^{\ln 3} xe^{-x} dx = -\int_0^{\ln 3} x de^{-x} = -xe^{-x}\Big|_0^{\ln 3} + \int_0^{\ln 3} e^{-x} dx$$

$$= -xe^{-x}\Big|_0^{\ln 3} - e^{-x}\Big|_0^{\ln 3} = -\frac{\ln 3}{3} - \frac{1}{3} + 1$$

$$= \frac{1}{3}(2 - \ln 3).$$

(12) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2} dx.$

解 设 $x = a\cos t, dx = -a\sin t dt.$

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2} dx = a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t dt$$

$$= \frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{a^4}{8}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{16}a^4.$$

(14) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}dx, a \neq b, ab \neq 0.$

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{a^2(1 - \sin^2 x) + b^2\sin^2 x}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{a^2 + (b^2 - a^2)\sin^2 x}dx$$

$$= \frac{1}{2(b^2 - a^2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d[a^2 + (b^2 - a^2)\sin^2 x]}{a^2 + (b^2 - a^2)\sin^2 x}$$

$$= \frac{1}{2(b^2 - a^2)}\ln|a^2 + (b^2 - a^2)\sin^2 x| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{b^2 - a^2}\ln\left|\frac{b}{a}\right|.$$

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{x^n}{1 + x}dx.$

解 根据 § 8.3 定理 10，∃ $c \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$，有

$$\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{x^n}{1 + x}dx = \frac{1}{1 + c}\int_0^{\frac{2}{3}} x^n dx.$$

于是，
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{x^n}{1 + x}dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + c}\int_0^{\frac{2}{3}} x^n dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + c}\,\frac{1}{n + 1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n x dx.$

解 $\forall \varepsilon > 0\left(\varepsilon < \frac{\pi}{4}\right)$，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n x dx = \int_0^{\varepsilon} \cos^n x dx + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} \cos^n x dx.$$

其中 $\int_0^{\varepsilon}\cos^n x dx < \int_0^{\varepsilon} dx = \varepsilon.$

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}}\cos^n x dx < \cos^n\varepsilon \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon\right) < \frac{\pi}{4}\cos^n\varepsilon.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\varepsilon = 0(0 < \cos\varepsilon < 1)$，即 $\exists\ N \in \mathbf{N}, \forall\ n > N$，有

$$\cos^n\varepsilon < \varepsilon$$

于是，$\exists\ N\in\mathbf{N}, \forall\ n>N$，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^n x dx = \int_0^{\varepsilon}\cos^n x dx + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}}\cos^n x dx \leq \varepsilon + \frac{\pi}{4}\varepsilon$$

$$= \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^n x dx = 0.$$

4. 应用定积分求下列极限：

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2 + k^2}.$

解 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2 + k^2} = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}.$

此和是函数 $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ 在[0,1]上的特殊的积分和．它是将[0,1] n 等分，把 ξ_k 取为第 k 个小区间 $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$的右端点 $\frac{k}{n}$ 所作成的．因为函数 $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ 在[0,1]连续，从而可积，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2 + k^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1\frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg}x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots[n+(n-1)]}.$

解 考虑

$$\ln\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots[n+(n-1)]}$$

$$=\ln\left(\frac{n(n+1)\cdots[n+(n-1)]}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n+(n-1)}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

此和是函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 在$[0,1]$上的特殊的积分和．它是将$[0,1]$ n 等分，把 ξ_k 取为第 k 个小区间$\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$的左端点 $\frac{k-1}{n}$ 所作成的．因为函数 $f(x)=\ln(1+x)$在$[0,1]$连续，从而可积，所以

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots[n+(n-1)]}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_0^1\ln(1+x)dx=[(x+1)\ln(1+x)-x]\Big|_0^1=\ln 4-1.$$

于是，
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots[n+(n-1)]}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots[n+(n-1)]}}=e^{\ln 4-1}=\frac{4}{e}.$$

5. 证明：若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$是正值可积，令 $f_{in}=f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)$，则

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(f_{1n}+f_{2n}+\cdots+f_{nn})=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f_{1n}f_{2n}\cdots f_{nn}}=e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)dx}.$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{f_{1n}}+\frac{1}{f_{2n}}+\cdots+\frac{1}{f_{nn}}}=\frac{b-a}{\int_a^b\frac{dx}{f(x)}}.$$

并有
$$\frac{b-a}{\int_a^b\frac{dx}{f(x)}}\leqslant e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)dx}\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

证 将$[a,b]n$等分，分点是$a=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n=b$，其中$x_i=a+i\dfrac{b-a}{n}$. 取第$i$个小区间$[x_{i-1},x_i]$的右端点$x_i$作为$\xi_i$，即 $\xi_i=a+i\dfrac{b-a}{n}$. 分别作特殊的积分和：

$$\frac{1}{n}(f_{1n}+f_{2n}+\cdots+f_{nn})$$

$$=\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}.$$

$$\frac{1}{n}(\ln f_{1n}+\ln f_{2n}+\cdots+\ln f_{nn})$$

$$=\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\ln f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}.$$

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{f_{1n}}+\frac{1}{f_{2n}}+\cdots+\frac{1}{f_{nn}}\right)$$

$$=\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f\left(a+i\dfrac{b-a}{n}\right)}\cdot\frac{b-a}{n}.$$

因为$f(x)$在$[a,b]$是正值可积，从而$\ln f(x)$在$[a,b]$也可积. 所以

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(f_{1n}+f_{2n}+\cdots+f_{nn})$$

$$=\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f_{1n}f_{2n}\cdots f_{nn}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln(f_{1n}f_{2n}\cdots f_{nn})}$$

$$=e^{\frac{1}{b-a}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}}$$

$$=e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)dx}.$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\dfrac{1}{f_{1n}}+\dfrac{1}{f_{2n}}+\cdots+\dfrac{1}{f_{nn}}}$

$$=\frac{b-a}{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{f\left(a+i\dfrac{b-a}{n}\right)}\cdot\dfrac{b-a}{n}}=\frac{b-a}{\int_a^b\dfrac{dx}{f(x)}}.$$

已知$\forall\ n\in\mathbf{N}$,有

$$\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{f_{in}}}\leqslant\sqrt[n]{f_{1n}f_{2n}\cdots f_{nn}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_{in}.$$

当$n\to\infty$时,由上述结果,有

$$\frac{b-a}{\int_a^b\dfrac{dx}{f(x)}}\leqslant e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)dx}\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

6. 证明:若m与n是非负整数,则

(4) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]^2dx$

$$=\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right].$$

证 $\displaystyle\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]^2$

$$=\left(\frac{a_0}{2}\right)^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2\cos^2kx+b_k^2\sin^2kx)$$

$$+2\left[\frac{a_0}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]+2\sum_{i,j=1}^{n}a_ib_j\sin ix\cos jx$$

$$+2\sum_{\substack{i,j=1\\(i\neq j)}}^{n}a_ia_j\cos ix\cos jx+2\sum_{\substack{i,j=1\\(i\neq j)}}^{n}b_ib_j\sin ix\sin jx.$$

于是,由本题的(1),(2),(3),有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]^2dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\left(\frac{a_0}{2}\right)^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2\cos^2kx+b_k^2\sin^2kx)\right]dx$$

$$+a_0\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)dx$$

$$+2\sum_{i,j=1}^{n}a_ib_j\int_{-\pi}^{\pi}\sin ix\cos jxdx+2\sum_{\substack{i,j=1\\(i\neq j)}}^{n}a_ia_j\int_{-\pi}^{\pi}\cos ix\cos jxdx$$

$$+2\sum_{\substack{i,j=1\\(i\neq j)}}^{n}b_ib_j\int_{-\pi}^{\pi}\sin ix\sin jxdx$$

$$=\left(\frac{a_0}{2}\right)^2\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2kxdx+b_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2kxdx\right)$$

$$=\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right].$$

8. 证明：若函数 $f(x)$在$[a,b]$可积，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在$[a,b]$连续.

证　已知 $f(x)$ 在$[a,b]$ 可积，从而 $f(x)$ 在$[a,b]$ 有界，即 $\exists\ M>0,\forall\ x\in[a,b]$，有 $|f(x)|\leqslant M$.

$\forall\ x\in[a,b]$，使 $x+\Delta x\in[a,b]$，有

$$|F(x+\Delta x)-F(x)|=\left|\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right|$$

$$=\left|\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt\right|\leqslant\left|\int_x^{x+\Delta x}|f(t)|dt\right|\leqslant M|\Delta x|.$$

从而，$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta=\dfrac{\varepsilon}{M}>0,\forall\ \Delta x$：$|\Delta x|<\delta$，有

$$|F(x+\Delta x)-F(x)|\leqslant M|\Delta x|<M\delta=M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

即函数 $F(x)$在 $x\in[a,b]$连续. 于是函数 $F(x)$在$[a,b]$连续.

9. 证明：若函数 $f(x)$在 **R** 连续，且 $f(x)=\int_0^x f(t)dt$，则 $f(x)\equiv 0$.

证　根据定理1，函数 $f(x)$在 **R** 可导，且$\forall\ x\in\mathbf{R}$，有

$$f'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x) \quad 或 \quad f'(x) - f(x) = 0.$$

考虑函数 $P(x)=f(x)e^{-x}$. $\forall\ x\in \mathbf{R}$,有

$$P'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = [f'(x) - f(x)]e^{-x} = 0.$$

由§6.1例1,$P(x)=C$(常数),即

$$C = f(x)e^{-x} \quad 或 \quad f(x) = Ce^x.$$

已知 $f(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$. 令 $x = a$,有

$$f(a) = Ce^a = 0, 从而\ C = 0.$$

于是,$\forall\ x\in \mathbf{R}$,有 $f(x)=0$,即 $f(x)\equiv 0$.

10. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\int_0^x \cos t^2 dt$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2 dt = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1} = 1.$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-e^{x^2}}\int_0^x e^{t^2}dt$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{x^2}}\int_0^x e^{t^2}dt = \lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x e^{t^2}dt}{1-e^{x^2}} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt + xe^{x^2}}{-2xe^{x^2}} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}(1+x^2)}{-2e^{x^2}(1+2x^2)} = -1.$$

11. 证明:若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,$\forall\ x,x_0\in[a,b]$,则

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^x [f(t+h) - f(t)]dt = f(x) - f(x_0).$$

证 设 $\varphi(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$. 根据定理1,$\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 可导,且

$$\varphi'(x) = f(x). \qquad (\varphi(x_0) = 0)$$

设 $t+h=y, dt=dy$，有

$$\int_{x_0}^{x} f(t+h)dt = \int_{x_0+h}^{x+h} f(y)dy$$

$$= \int_{x_0+h}^{x_0} f(y)dy + \int_{x_0}^{x+h} f(y)dy$$

$$= \int_{x_0}^{x+h} f(y)dy - \int_{x_0}^{x_0+h} f(y)dy$$

$$= \varphi(x+h) - \varphi(x_0+h).$$

于是，$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x}[f(t+h)-f(t)]dt$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_{x_0}^{x} f(t+h)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\varphi(x+h) - \varphi(x_0+h) - \varphi(x) + \varphi(x_0)]$$

$$(\varphi(x_0) = 0)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} - \frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}\right]$$

$$= \varphi'(x) - \varphi'(x_0) = f(x) - f(x_0).$$

12. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则 $\exists\ x\in[a,b]$，有

$$\int_a^x f(t)dt = \int_x^b f(t)dt.$$

证　考虑函数　$F(y) = \int_a^y f(t)dt - \int_y^b f(t)dt.$

由第8题，函数 $F(y)$ 在 $[a,b]$ 连续，且

$$F(a) = -\int_a^b f(t)dt, \quad F(b) = \int_a^b f(t)dt.$$

若 $\int_a^b f(t)dt \neq 0$，则 $F(a)F(b) < 0$. 根据 §4.2 定理 3(零点定理)，$\exists\ x\in[a,b]$，使

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_x^b f(t)dt = 0 \quad 或 \quad \int_a^x f(t)dt = \int_x^b f(t)dt;$$

若 $\int_a^b f(t)dt = 0$，则取 $x = a$ 或 $x = b$，有

$$\int_a^x f(t)dt = \int_x^b f(t)dt.$$

13. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，则

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = A.$$

证　已知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，即 $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, B > 0, \forall\, x > B$，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

从而，$\forall\, x > B$（固定常数 B），有

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{x}\left(\int_0^B f(t)dt + \int_B^x f(t)dt\right)$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^B f(t)dt + \frac{1}{x}\int_B^x [f(t) - A]dt + \frac{1}{x}\int_B^x Adt,$$

其中

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^B f(t)dt = 0.$$

$$\left|\frac{1}{x}\int_B^x [f(t) - A]dt\right| \leqslant \frac{1}{x}\int_B^x |f(t) - A|dt$$

$$< \varepsilon\left(1 - \frac{B}{x}\right) < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_B^x [f(t) - A]dt = 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_B^x Adt = \lim_{x\to+\infty} A\left(1 - \frac{B}{x}\right) = A.$$

于是，

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^B f(t)dt$$

$$+ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_B^x [f(t) - A]dt + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_B^x Adt = A.$$

*　　　　*　　　　*　　　　*

14. 证明：若函数 $f(x)$ 连续，$u(x)$ 与 $v(x)$ 可导，则 $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ 可导，并求其导数．

证法一 任取 x 与 $x+\Delta x$ $(\Delta x\neq 0)$，有

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\int_{u(x+\Delta x)}^{v(x+\Delta x)}f(t)dt-\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)dt$$

$$=\int_{u(x+\Delta x)}^{u(x)}f(t)dt+\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)dt+\int_{v(x)}^{v(x+\Delta x)}f(t)dt-\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)dt$$

$$=\int_{v(x)}^{v(x+\Delta x)}f(t)dt-\int_{u(x)}^{u(x+\Delta x)}f(t)dt$$

$$=f[v(x+\theta_1\Delta x)][v(x+\Delta x)-v(x)]$$

$$-f[u(x+\theta_2\Delta x)][u(x+\Delta x)-u(x)],$$

其中 $0<\theta_1<1,0<\theta_2<1$，有

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f[v(x+\theta_1\Delta x)]\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

$$-f[u(x+\theta_2\Delta x)]\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}.$$

已知 $u(x)$ 与 $v(x)$ 可导，复合函数 $f[u(x)]$，$f[v(x)]$ 连续，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f[v(x+\theta_1\Delta x)]\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

$$-\lim_{\Delta x\to 0}f[u(x+\theta_2\Delta x)]\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$$

$$=f[v(x)]v'(x)-f[u(x)]u'(x).$$

即函数 $F(x)$ 可导，且

$$F'(x)=f[v(x)]v'(x)-f[u(x)]u'(x).$$

证法二 设 $G(y)=\int_0^y f(t)dt$. 根据定理 1，$G(y)$ 可导，且 $G'(y)=f(y)$. 由复合函数求导法则，有

$$\left(\int_0^{v(x)}f(t)dt\right)'=\{G[v(x)]\}'=G'[v(x)]v'(x)=f[v(x)]v'(x).$$

于是，

$$F'(x)=\left(\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)dt\right)'=\left(\int_0^{v(x)}f(t)dt-\int_0^{u(x)}f(t)dt\right)'$$

$$=f[v(x)]v'(x)-f[u(x)]u'(x).$$

15. 证明：若 $f^{(n+1)}(t)$ 在 $U(a)$ 连续，$\forall x\in \mathring{U}(a)$，有

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt,$$

则　1)　$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

2)　$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$，$\xi\in[a,x]$ 或 $[x,a]$.

证　1) 连续对 $R_n(x)$ 使用 n 次分部积分法.

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n df^{(n)}(t)$$

$$=\frac{1}{n!}\left[(x-t)^n f^{(n)}(t)\Big|_a^x-\int_a^x f^{(n)}(t)d(x-t)^n\right]$$

$$=-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)dt$$

$$=-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}df^{(n-1)}(t)$$

$$=-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n-\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

$$+\frac{1}{(n-2)!}\int_a^x (x-t)^{n-2}f^{(n-1)}(t)dt$$

$=\cdots\cdots$

$$=-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n-\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

$$-\cdots-\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{1}{0!}\int_a^x f'(t)dt$$

$$=-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n-\cdots-\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+f(x)-f(a)$$

$$=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

2)　根据 §8.3定理10（积分中值定理），$\exists\ \xi\in[a,x]$ 或 $[x,a]$，有

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_a^x(x-t)^n dt$$

$$=-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_a^x(x-t)^n d(x-t)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

注 1)是泰勒公式余项 $R_n(x)$的积分形式.

16. 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\sin t^2 dt=0.$$

证 设 $x>0$. $y=t^2$. $dt=\frac{dy}{2\sqrt{y}}$,有

$$\left|\int_x^{x+1}\sin t^2 dt\right|=\frac{1}{2}\left|\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{1}{\sqrt{y}}d\cos y\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{\cos y}{\sqrt{y}}\right|_{x^2}^{(x+1)^2}-\int_{x^2}^{(x+1)^2}\cos y\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)'dy\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\left|\frac{\cos(x+1)^2}{x+1}\right|+\left|\frac{\cos x^2}{x}\right|+\left|\int_{x^2}^{(x+1)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)'dy\right|\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}\right)<\frac{2}{x}\to 0(x\to+\infty).$$

于是,
$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\sin t^2 dt=0.$$

17. 设函数 $f(x)$连续. 证明

$$\int_0^x\left\{\int_0^t f(x)dx\right\}dt=\int_0^x f(t)(x-t)dt.$$

证 应用分部积分法

$$\int_0^x\left\{\int_0^t f(x)dx\right\}dt=t\cdot\int_0^t f(x)dx\Big|_0^x-\int_0^x td\int_0^t f(x)dx$$

$$=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=\int_0^x(x-t)f(t)dt.$$

18. 证明:若函数 $y=f(x)$在$[a,b]$严格单调、连续,其反函数是

$x=f^{-1}(y)$，且 $\alpha=f(a)$，$\beta=f(b)$，则

$$\int_\alpha^\beta f^{-1}(y)dy = b\beta - a\alpha - \int_a^b f(x)dx.$$

当函数 $f(x)$ 非负时，说明此等式的几何意义.

证 不妨设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 严格增加，从而其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 也严格增加，它们都可积.

将 $[a,b]$ n 等分，分点是 $x_k=a+kh$，其中 $h=\frac{b-a}{n}$，$k=0,1,\cdots,n$. $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}=h$. 设 $y_k=f(x_k)$，相应地有 $[\alpha,\beta]$ 的分点：

$$\alpha = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = \beta, \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1}.$$

于是，由定积分的定义，有

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^\beta f^{-1}(y)dy + \int_a^b f(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f^{-1}(y_k)\Delta y_k + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x_k \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n [f^{-1}(y_k)\Delta y_k + f(x_k)\Delta x_k] \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n [x_k(y_k - y_{k-1}) + y_k\Delta x_k] \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n [(a + kh)(y_k - y_{k-1}) + hy_k] \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n [(a + (k + 1)h)y_k - (a + kh)y_{k-1}] \\
&= \lim_{n\to\infty}[(a + (n + 1)h)y_n - (a + h)y_0] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left(a + \frac{n+1}{n}(b - a)\right)\beta - \left(a + \frac{b-a}{n}\right)\alpha\right] \\
&= b\beta - a\alpha,
\end{aligned}$$

即
$$\int_\alpha^\beta f^{-1}(y)dy = b\beta - a\alpha - \int_a^b f(x)dx.$$

当 $f(x)$ 非负时，此等式的几何意义如图8. b，即曲边梯形的面

积 $\int_a^b f(x)dx$，$\int_\alpha^\beta f^{-1}(y)dy$ 与小矩形面积 $a\alpha$ 之和恰是大的矩形面积 $b\beta$.

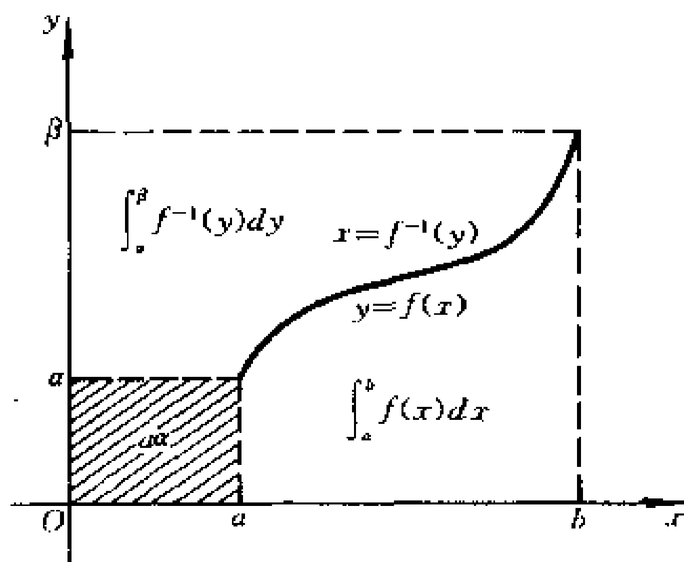


图 8.b

19. 证明：若函数 $y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，且严格增加，又 $f(0)=0$，$\forall\ a>0,b>0$，则

$$ab \leqslant \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy. \tag{1}$$

特别是，当 $p>1$ 时，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，有 $ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$.

证 由第18题($a=0,\alpha=0,b=a,\beta=f(a)$)，有

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^{f(a)} f^{-1}(y)dy = af(a).$$

若 $b=f(a)$，即 $ab=\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy$，则(1)式等号成立；

若 $b>f(a)$，由积分中值定理和 $x=f^{-1}(y)$ 的严格增加，有

$$\int_{f(a)}^b f^{-1}(y)dy = f^{-1}(\xi)[b-f(a)] \geqslant f^{-1}[f(a)][b-f(a)]$$
$$= a[b-f(a)].$$

其中 $\xi\in[f(a),b]$，再由第 18 题，有

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy = \int_0^a f(x)dx + \int_0^{f(a)} f^{-1}(y)dy + \int_{f(a)}^b f^{-1}(y)dy$$

$$= af(a) + \int_{f(a)}^b f^{-1}(y)dy \geqslant af(a) + a[b - f(a)] = ab.$$

即不等式(1)成立；

同法可证，若 $b<f(a)$，则不等式(1)也成立.

特别是，当 $p>1$时，取 $y=f(x)=x^{p-1}$，它满足第19题的条件.

$x=y^{\frac{1}{p-1}}=y^{q-1}$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Longleftrightarrow \frac{1}{p-1}=q-1\right)$，有

$$\int_0^a x^{p-1}dx + \int_0^b y^{q-1}dy = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab,$$

即
$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

20. 证明：若函数 $f(x)$在$[a,b]$有连续导函数，令

$$h = \frac{b-a}{n}, s_n = \sum_{k=1}^n hf(a+kh), I = \int_a^b f(x)dx,$$

则
$$\lim_{n\to+\infty} n(s_n - I) = \frac{b-a}{2}[f(b) - f(a)].$$

证　设 $x_k=a+kh$，由拉格朗日定理，有

$$s_n - I = \sum_{k=1}^n hf(x_k) - \int_a^b f(x)dx$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)dx - \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x_k) - f(x)]dx = \sum_{k=1}^n f'(\xi_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - x)dx$$

$$= \frac{1}{2}h^2 \sum_{k=1}^n f'(\xi_k). \qquad \xi_k \in (x, x_k) \subset [x_{k-1}, x_k].$$

已知 $f'(x)$在$[a,b]$连续，从而 $f'(x)$在$[a,b]$有界. 设

$$m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]}\{f'(x)\} \quad 与 \quad M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]}\{f'(x)\}.$$

从而，有
$$\frac{1}{2}h^2 \sum_{k=1}^n m_k \leqslant s_n - I \leqslant \frac{1}{2}h^2 \sum_{k=1}^n M_k$$

或 $$\frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k h \leqslant n(s_n - I) \leqslant \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} M_k h.$$

已知 $f'(x)$ 在$[a,b]$可积，则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} M_k h = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} m_k h = \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

于是，

$$\lim_{n\to\infty} n(s_n - I) = \frac{b-a}{2}[f(b) - f(a)].$$

21. 证明：若函数 $f(x)$在$[a,b]$连续，且$\forall x\in[a,b]$，有 $f(x) > 0$，则

$$\int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geqslant (b-a)^2.$$

证　已知 $f(x)$与$\dfrac{1}{f(x)}$在$[a,b]$都可积. 将$[a,b]$ n 等分，分点是 $a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b$. 在第 k 个小区间$[x_{k-1}, x_k]$上取 $\xi_k = x_k$，$x_k - x_{k-1} = \dfrac{b-a}{n}$. 由算术平均不小于几何平均，有

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(x_k)}\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$= (b-a)^2\cdot\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)}{n}\cdot\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{f(x_k)}}{n}$$

$$\geqslant (b-a)^2\cdot\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)}\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{f(x_1)}\,\frac{1}{f(x_2)}\cdots\frac{1}{f(x_n)}}$$

$$= (b-a)^2.$$

当 $n\to\infty$时，有

$$\int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geqslant (b-a)^2.$$

22. 证明：若函数 $f(x)$与 $g(x)$在$[a,b]$可积，则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2 dx \cdot \int_a^b [g(x)]^2 dx.$$

它称为施瓦兹不等式.

证 $\forall t\in\mathbf{R}$,考虑非负函数$[tf(x)+g(x)]^2$的积分,有

$$\int_a^b[tf(x)+g(x)]^2dx\geqslant 0$$

或

$$\left(\int_a^b[f(x)]^2dx\right)t^2+2\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)t+\left(\int_a^b[g(x)]^2dx\right)\geqslant 0.$$

这是关于 t 的二次三项式,它非负,则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\leqslant\int_a^b[f(x)]^2dx\cdot\int_a^b[g(x)]^2dx.$$

23. 应用施瓦兹不等式证明:

(1) $\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2\leqslant(b-a)\int_a^b[f(x)]^2dx.$

(2) 第21题.

(3) $\ln\frac{p}{q}\leqslant\frac{p-q}{\sqrt{pq}},\quad 0<q\leqslant p.$

证 (1)取 $g(x)\equiv1$,由施瓦兹不等式,有

$$\left(\int_a^b 1\cdot f(x)dx\right)^2\leqslant\int_a^b dx\cdot\int_a^b[f(x)]^2dx=(b-a)\int_a^b[f(x)]^2dx,$$

即
$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2\leqslant(b-a)\int_a^b[f(x)]^2dx.$$

(2)取 $p(x)=\sqrt{f(x)},g(x)=\sqrt{\frac{1}{f(x)}}$. 由施瓦兹不等式,有

$$\left[\int_a^b\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{\frac{1}{f(x)}}dx\right]^2\leqslant\int_a^b(\sqrt{f(x)})^2dx\cdot\int_a^b\left[\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\right]^2dx,$$

即
$$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\geqslant\left(\int_a^b dx\right)^2=(b-a)^2.$$

(3) 当 $p=q$ 时,显然不等式成立.

当$0<q<p$ 时,取 $f(x)=\frac{1}{x},g(x)\equiv1$. 由施瓦兹不等式,有

$$\left(\int_q^p\frac{1}{x}dx\right)^2\leqslant\int_q^p\left(\frac{1}{x}\right)^2dx\cdot\int_q^p dx,$$

即 $$\left(\ln\frac{p}{q}\right)^2\leqslant\frac{(p-q)^2}{pq}\quad 或\quad \ln\frac{p}{q}\leqslant\frac{p-q}{\sqrt{pq}}.$$

24. 证明：∃ $A<1$，∀ $n\in\mathbf{N}$，$n>1$，有不等式

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<An^{\frac{3}{2}}.$$

证 取函数 $f(x)=\sqrt{x}$，$x\in[0,1]$，$f(x)=\sqrt{x}$ 在$[0,1]$可积，且严格增加．将$[0,1]$ n 等分，分点是 $\frac{k}{n}$，取第 k 个小区间 $\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$的右端点$\frac{k}{n}$作为 ξ_k，即 $\xi_k=\frac{k}{n}$，由练习题8.3第6题，有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}-\int_0^1\sqrt{x}\,dx\leqslant\frac{1}{n}$$

或 $$\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\leqslant\int_0^1\sqrt{x}\,dx+\frac{1}{n}=\frac{2}{3}+\frac{1}{n},$$

即 $$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\leqslant\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{n}\right)n^{\frac{3}{2}}.$$

不难验证，使$\frac{2}{3}+\frac{1}{n}<1$的最小自然数 $n=4$．$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{11}{12}<1\right)$．取 $A=\frac{12}{13}>\frac{11}{12}$，且 $A<1$，从而，$n\geqslant4$，有

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}<An^{\frac{3}{2}}.$$

可直接验证，$n=2,3$上述不等式也成立．于是

∃ $A=\frac{12}{13}<1$，∀ $n\in\mathbf{N}$，$n>1$，有不等式

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}<An^{\frac{3}{2}}.$$

25. 证明：

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ \dfrac{2}{2n+1}, & n=m.\end{cases}$$

其中 $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$.

证 为了书写简便，令 $A=\frac{1}{2^n n!}$，$F(x)=(x^2-1)^n=(x-1)^n\cdot(x+1)^n$.

$P_n(x)=A\cdot F^{(n)}(x)=A[(x-1)^n(x+1)^n]^{(n)}$. 容易证明：

$F(1)=F'(1)=\cdots=F^{(n-1)}(1)=0$,

$F(-1)=F'(-1)=\cdots=F^{(n-1)}(-1)=0$.

设 $Q(x)$是不超过 $n-1$次的多项式，则 $Q^{(n)}(x)\equiv 0$. 有

$$\int_{-1}^{1}Q(x)P_n(x)dx=A\int_{-1}^{1}Q(x)F^{(n)}(x)dx=A\int_{-1}^{1}Q(x)dF^{(n-1)}(x)$$

$$=A\left[Q(x)F^{(n-1)}(x)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}Q'(x)F^{(n-1)}(x)dx\right]$$

$$=-A\int_{-1}^{1}Q'(x)F^{(n-1)}(x)dx=-A\int_{-1}^{1}Q'(x)dF^{(n-2)}(x)$$

$$=-A\left[Q'(x)F^{(n-2)}(x)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}Q''(x)F^{(n-2)}(x)dx\right]$$

$$=A\int_{-1}^{1}Q''(x)F^{(n-2)}(x)dx=\cdots$$

$$=(-1)^nA\int_{-1}^{1}Q^{(n)}(x)F(x)dx=0.\quad (\text{因为 } Q^{(n)}(x)\equiv 0)$$

当 $n\neq m$ 时，设 $m<n$. $P_m(x)$是 m 次多项式，由上式($P_m(x)$相当于 $Q(x)$，其次数小于 n)，有

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=0.$$

当 $n=m$ 时，已知 $F^{(2n)}(x)=(2n)!$，有

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2dx=A^2\int_{-1}^{1}F^{(n)}(x)F^{(n)}(x)dx=A^2\int_{-1}^{1}F^{(n)}(x)dF^{(n-1)}(x)$$

$$=A^2\left[F^{(n)}(x)F^{(n-1)}(x)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}F^{(n+1)}(x)F^{(n-1)}(x)dx\right]$$

$$=-A^2\int_{-1}^{1}F^{(n+1)}(x)F^{(n-1)}(x)dx$$

$$=-A^2\int_{-1}^{1}F^{(n+1)}(x)dF^{(n-2)}(x)$$

$$= -A^2\left[F^{(n+1)}(x)F^{(n-2)}(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}F^{(n+2)}(x)F^{(n-2)}(x)dx\right]$$

$$= A^2\int_{-1}^{1}F^{(n+2)}(x)F^{(n-2)}(x)dx$$

$$= A^2\int_{-1}^{1}F^{(n+2)}(x)dF^{(n-3)}(x)$$

$$= A^2\left[F^{(n+2)}(x)\cdot F^{(n-3)}(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}F^{(n+3)}(x)F^{(n-3)}(x)dx\right]$$

$$= -A^2\int_{-1}^{1}F^{(n+3)}(x)\cdot F^{(n-3)}(x)dx = \cdots$$

$$= (-1)^n A^2\int_{-1}^{1}F^{(2n)}(x)\cdot F(x)dx$$

$$= (-1)^n A^2(2n)!\int_{-1}^{1}F(x)dx$$

$$= (-1)^n A^2(2n)!\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx$$

$$= 2A^2(2n)!\int_{0}^{1}(1-x^2)^n dx.$$

设 $x=\cos t, dx=-\sin t dt$. 再由 §8.4例7，有

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2dx = 2A^2(2n)!\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}t dt$$

$$= 2A^2(2n)!\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2}{2^{2n}n!n!}\frac{(2n)!(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$= \frac{2}{2n+1}.$$

练习题　8.5

（《讲义》上册，第389页）

1. 求下列平面曲线所围成的区域的面积：

(2) $y=\sin x, y=\cos x, x=-\frac{\pi}{4}, x=\frac{\pi}{4}$.

解　区域的面积

$$A=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx=(\sin x+\cos x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}.$$

(4) $y(x^2+a^2)=a^3, x^2=2ay(a>0)$,

解　两曲线都关于 y 轴对称，它们围成的区域也关于 y 轴对称. 交点是 $\left(-a,\frac{a}{2}\right)$ 与 $\left(a,\frac{a}{2}\right)$. 区域的面积

$$A=\int_{-a}^{a}\left(\frac{a^3}{x^2+a^2}-\frac{x^2}{2a}\right)dx=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\right)a^2.$$

(6) $x=a\cos^3t, y=a\sin^3t(a>0)$,

解　$0\leqslant t\leqslant 2\pi$，这是星形线所围成的区域(见《讲义》上册，第378页，图8.18). 它关于 x 轴与 y 轴都对称. 因此它的面积是第一象限那部分区域面积的4倍.

$$x'=-3a\cos^2t\sin t.$$

区域的面积

$$A=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}|a\sin^3t(-3a\cos^2t\sin t)|dt$$

$$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t\cos^2tdt=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

(8)　$x=2t-t^2, y=2t^2-t^3$.

解　当参数 t 由0到2，动点 (x,y) 在第一象限描绘的闭曲线围成一区域.

$$x'=2-2t,$$

区域的面积

$$A=\int_0^2|(2t^2-t^3)(2-2t)|dt=\frac{8}{15}.$$

(10) $r=a\sin 2\theta\quad(a>0)$.

解　这是四叶玫瑰线. 这四个叶关于 x 轴与 y 轴都对称. 四叶玫瑰线围成区域的面积是第一象限一叶面积的4倍. 区域的面积

$$A=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\sin^2 2\theta d\theta=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\pi a^2.$$

2. 求由抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 与它在点 $A(0,-3)$ 与点 $B(3,0)$ 的切线所围成的区域的面积.

解 $y'=-2x+4, y'(0)=4, y'(3)=-2.$

过点 $A(0,-3)$ 与 $B(3,0)$ 的切线方程分别是

$$y=4x-3 \quad 与 \quad y=-2x+6.$$

两条切线的交点是 $\left(\frac{3}{2},3\right)$，围成的区域如图8.c. 计算区域的面积要将区域用直线 $x=\frac{3}{2}$ 分成两部分. 分别计算它们的面积，然后再作和. 区域的面积

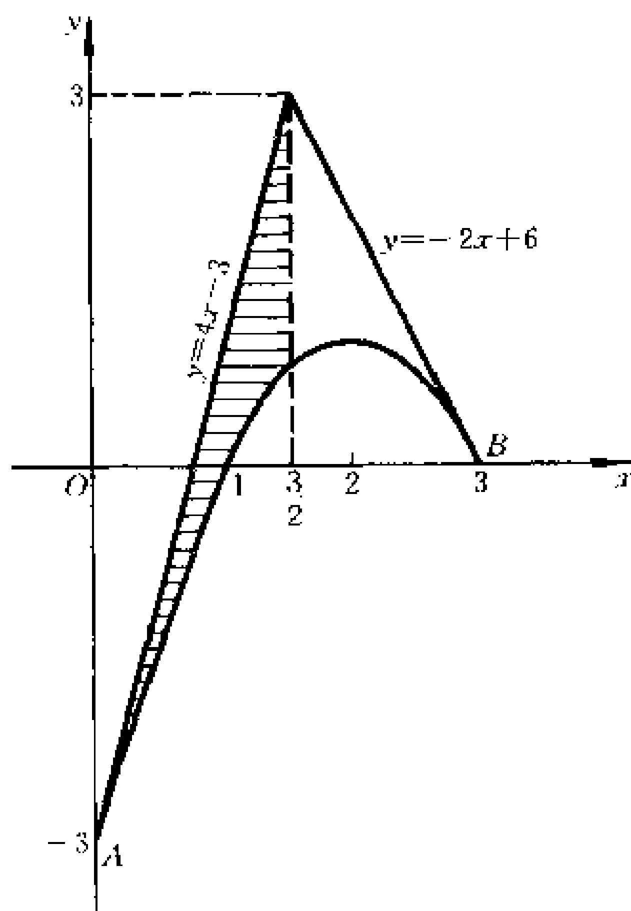


图 8.c

$$A=\int_0^{\frac{3}{2}}[(4x-3)-(-x^2+4x-3)]dx$$

$$+\int_{\frac{3}{2}}^{3}[(-2x+6)-(-x^2+4x-3)]dx=\frac{9}{4}.$$

3. 求下列曲线的弧长：

(2) $y=\ln x$，由 $x=\sqrt{3}$ 到 $x=\sqrt{8}$.

解 $y'=\frac{1}{x}$. 曲线的弧长

$$l=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$$

（设 $t=\sqrt{x^2+1}$）

$$=\int_2^3\frac{t^2}{t^2-1}dt=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

(4) $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

解 $x'=at\cos t$，$y'=at\sin t$. 曲线的弧长

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2t^2\cos^2t+a^2t^2\sin^2t}dt$$

$$=a\int_0^{2\pi}tdt=2\pi^2a.$$

(6) $r=a\sin^3\frac{\theta}{3}$ 的全长 $(a>0)$，$0\leqslant\theta\leqslant 3\pi$.

解 $r'=a\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}$. 曲线的弧长

$$l=\int_0^{3\pi}\sqrt{r^2+r'^2}d\theta$$

$$=\int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^6\frac{\theta}{3}+a^2\sin^4\frac{\theta}{3}\cos^2\frac{\theta}{3}}d\theta$$

$$=a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\theta}{3}d\theta=\frac{3}{2}\pi a.$$

4. 求截楔体的体积，其平行的上底与下底的边长分别是 A,B 与 a,b 的矩形，而高是 h.

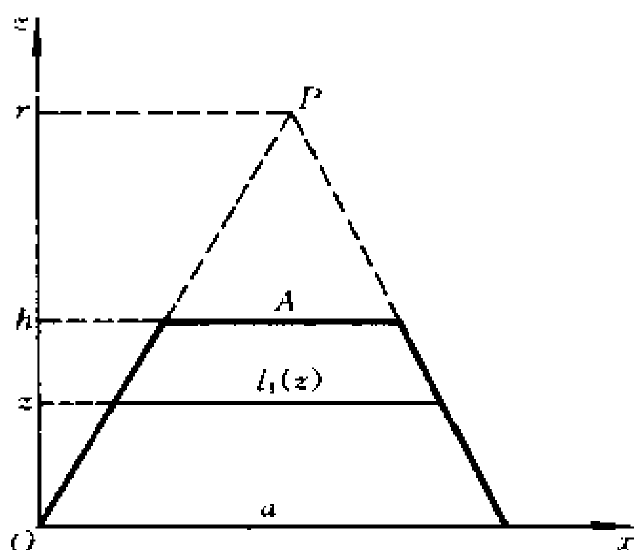


图 8.d

解 不妨设 $a>A$ 与 $b\geqslant B$. 将截楔体的下底放在三维直角坐标系的 xy 坐标面上,其上底位于 xy 坐标面的上方,其高为 h. 截楔体的两个相对的侧面在 xz 坐标面(或在 yz 坐标面)上的投影是相同的梯形. 图8.d 仅给出截楔体在 xz 坐标面上的投影. 设梯形的两个腰的延长线交于点 P,点 P 的高为 r. $\forall\ z\in[0,h]$,过 z 平行于 xy 坐标面的平面截截楔体的截口也是矩形,设它的长与宽分别是 $l_1(z)$ 与 $l_2(z)$,由图8.d,两个相似三角形,有

$$\frac{A}{r-h}=\frac{a}{r}\quad 或\quad r=\frac{ah}{a-A}.$$

又有 $\dfrac{l_1(z)}{r-z}=\dfrac{a}{r}$ 或 $l_1(z)=a-\dfrac{az}{r}=a-\dfrac{a-A}{h}z.$

同法可得 $$l_2(z)=b-\frac{b-B}{h}z.$$

截楔体的体积

$$V=\int_0^h l_1(z)l_2(z)dz=\int_0^h\left(a-\frac{a-A}{h}z\right)\left(b-\frac{b-B}{h}z\right)dz$$

$$=\int_0^h\left(ab-\frac{b(a-A)+a(b-B)}{h}z+\frac{(a-A)(b-B)}{h^2}z^2\right)dz$$

$$=\frac{h}{6}[(2A+a)B+(A+2a)b].$$

5. 求柱面 $x^2+z^2=a^2$ 与 $y^2+z^2=a^2$ 围成的体积.

解 两个柱面围成的体关于三个坐标面都对称. 它的体积是第一卦限那部分体的体积的8倍(见《讲义》上册，第390页，图8.29.) $\forall x\in[0,a]$，过 x 且垂直于 x 轴的平面截第一卦限那部分体的截口是正方形，其边长是 $\sqrt{a^2-x^2}$，于是，其体的体积

$$V=8\int_0^a(\sqrt{a^2-x^2})^2dx=8\int_0^a(a^2-x^2)dx=\frac{16}{3}a^3.$$

6. 求下列曲线围成的区域绕 x 轴旋转所成旋转体的体积：

(1) $y=x^3, x=2, y=0$.

解 旋转体的体积

$$V=\pi\int_0^2(x^3)^2dx=\frac{128}{7}\pi.$$

(3) $y=x^2, y=\sqrt{x}$.

解 两曲线的交点是(0,0)与(1,1). 旋转体的体积

$$V=\pi\int_0^1[(\sqrt{x})^2-(x^2)^2]dx=\pi\int_0^1(x-x^4)dx=\frac{3}{10}\pi.$$

7. 求下列曲线绕指定轴旋转所成旋转体的侧面积：

(1) $y^2=x, 0\leqslant x\leqslant 6$，绕 x 轴.

解 $y=\sqrt{x}, y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 旋转体的侧面积

$$A=2\pi\int_0^6\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx=\pi\int_0^6\sqrt{4x+1}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^6\sqrt{4x+1}d(4x+1)=\frac{62}{3}\pi.$$

(3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，绕 x 轴.

解 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, x\in[-a,a]$. $y'=\frac{-bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$.

分以下三种情况：

1） 当 $a=b>0$时，旋转体的侧面积，即半径为 a 的球的表面积

$$A=2\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=2\pi a\int_{-a}^{a}dx=4\pi a^2;$$

2） 当 $a>b>0$时，旋转体的侧面积，即椭球的表面积

$$A=2\pi\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}}{a\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=\frac{2\pi b}{a^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}dx$$

$$=\frac{4\pi b}{a^2\sqrt{a^2-b^2}}\int_0^a\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}d(\sqrt{a^2-b^2}x)$$

$$=\frac{4\pi b}{a^2\sqrt{a^2-b^2}}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}x}{2}\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\right.$$

$$\left.+\frac{a^4}{2}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}x}{a^2}\right)\Bigg|_0^a$$

$$=2\pi b^2+\frac{2\pi a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a};$$

3） 当 $b>a>0$时，旋转体的侧面积，即椭球的表面积，同法可得

$$A=2\pi\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{\sqrt{a^4+(b^2-a^2)x^2}}{a\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=\frac{2\pi b}{a^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^4+(b^2-a^2)x^2}dx$$

$$=\frac{4b\pi}{a^2\sqrt{b^2-a^2}}\int_0^a\sqrt{a^4+(b^2-a^2)x^2}d(\sqrt{b^2-a^2}x)$$

$$=\frac{4\pi b}{a^2\sqrt{b^2-a^2}}\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}x}{2}\sqrt{a^4+(b^2-a^2)x^2}\right.$$

$$\left.+\frac{a^4}{2}\ln\left|\sqrt{b^2-a^2}x+\sqrt{a^4+(b^2-a^2)x^2}\right|\right)\Bigg|_0^a$$

$$=2\pi b^2+\frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{\sqrt{b^2-a^2}+b}{a}.$$

8. 求曲线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$，绕 x 轴和 y 轴旋转所成曲面的面积.

解 $x'=a(1-\cos t)$，$y'=a\sin t$.

设 A_x 与 A_y 分别是曲线绕 x 轴与 y 轴旋转所成曲面的面积，有

$$A_x=2\pi\int_0^{2\pi}y\sqrt{x'^2+y'^2}dt=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt$$

$$=4a^2\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}dt=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

$$A_y=2\pi\int_0^{2\pi}x\sqrt{x'^2+y'^2}dt=2\pi\int_0^{2\pi}a(t-\sin t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt$$

$$=4a^2\pi\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}dt=16\pi^2a^2.$$

9. 若1牛顿的力能使弹簧伸长1厘米，现在要使弹簧伸长10厘米，问需要花费多大的功?

解 由胡克定律，在弹性限度内，弹簧弹性力 F_E 的大小与弹簧伸长量 x(以平衡位置为坐标原点)成正比，即

$$F_E=-kx,$$

k 是弹簧的倔强系数，负号表示弹性力 F_E 的方向是与弹簧延伸方向相反. 根据题意所施的外力 $F=-F_E$，即 $F=kx$.

已知当 $F=1(\mathrm{N})$ 时，$x=0.01(\mathrm{m})$，有

$$1=k\times 0.01\quad 或\quad k=100(\mathrm{kg/s^2})$$

从而，$F=100x$. 于是，花费的功

$$W=\int_0^{0.1}100x\,dx=0.5(\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}).$$

*　　　*　　　*　　　*

11. 证明：若立体垂直于 x 轴的横截面的面积

$$S(x)=Ax^2+Bx+C,\qquad a\leqslant x\leqslant b,$$

其中 A,B,C 是常数，则此立体的体积

$$V=\frac{b-a}{6}\left[S(a)+4S\left(\frac{a+b}{2}\right)+S(b)\right].$$

证 立体的体积

$$V=\int_a^b S(x)dx=\int_a^b (Ax^2+Bx+C)dx$$

$$=\frac{A}{3}(b^3-a^3)+\frac{B}{2}(b^2-a^2)+C(b-a)$$

$$=\frac{b-a}{6}\Big[(Aa^2+Ba+C)$$

$$+4\left\{A\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+B\frac{a+b}{2}+C\right\}+(Ab^2+Bb+C)\Big]$$

$$=\frac{b-a}{6}\left[S(a)+4S\left(\frac{a+b}{2}\right)+S(b)\right].$$

12. 证明:将区域 $a\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant y\leqslant y(x)$(其中 $y(x)$是连续函数)绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积

$$V_y=2\pi\int_a^b xy(x)dx.$$

证 $\forall\ x\in[a,b]$,旋转体的体积微元是以 y 轴为中心轴的宽为 dx,高为 $y(x)$的管状体的体积微元

$$dV_y=2\pi xy(x)dx.$$

于是,绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积

$$V_y=\int_a^b dV_y=2\pi\int_a^b xy(x)dx.$$

13. 证明:将区域$0\leqslant\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\leqslant\pi, 0\leqslant r\leqslant r(\varphi)$($r$ 与 φ 是极坐标)绕极轴旋转所成的旋转体的体积

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi.$$

证 区域如图8.e. 在区域内任取一点(r,φ)($\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta, 0\leqslant r\leqslant r(\varphi)$). 点$(r,\varphi)$的面积微元是有相同圆心角 $d\varphi$ 的两个扇形面积之差(如图8.e(Ⅰ)),即

$$\frac{1}{2}(r+dr)^2d\varphi-\frac{1}{2}r^2d\varphi=rdrd\varphi+\frac{1}{2}(dr)^2d\varphi,$$

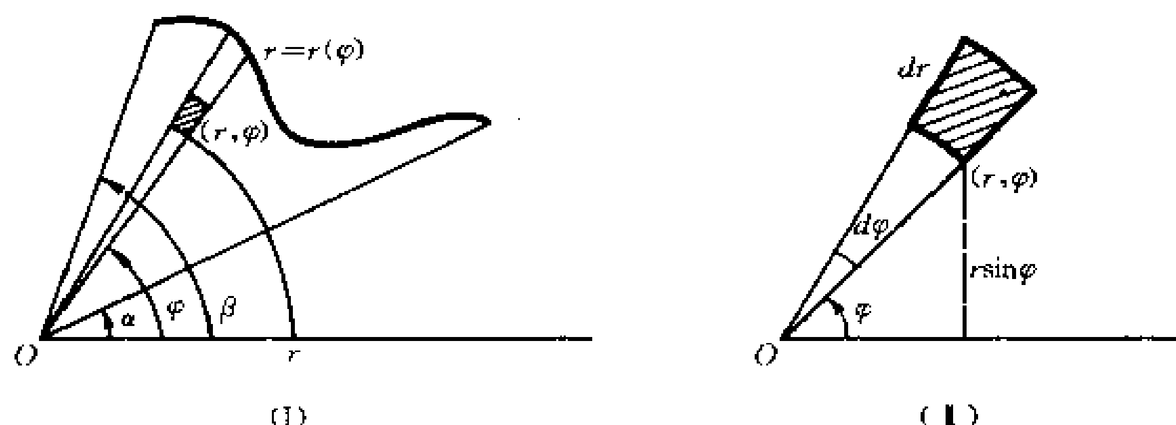


图 8.e

其中$\frac{1}{2}(dr)^2d\varphi$是关于$drd\varphi$的高阶无穷小.因此,点$(r,\varphi)$的面积微元是

$$dA = rd\varphi dr.$$

将点(r,φ)的面积微元$dA=rdrd\varphi$绕极轴旋转一周,如图8.e(Ⅱ).得到点(r,φ)的旋转体的体积微元$2\pi r\sin\varphi dA = 2\pi r^2\sin\varphi d\varphi dr$.将此体积微元中的$r$由0到$r(\varphi)$连续累加起来就是通过点$(r,\varphi)$且圆心角为$d\varphi$极径为$r(\varphi)$的小扇形绕极轴一周的体积微元$dV$,即$r$在$[0,r(\varphi)]$的定积分

$$dV = \int_0^{r(\varphi)}(2\pi r^2\sin\varphi d\varphi)dr = 2\pi\sin\varphi d\varphi\int_0^{r(\varphi)}r^2dr$$

$$= \frac{2\pi}{3}r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi.$$

于是,区域$\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta, 0\leqslant r\leqslant r(\varphi)$绕极轴旋转所成的旋转体的体积

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi.$$

14. 有内半径为10米的半球容器,其中盛满水,欲将水抽尽,求所作的功.

解 如图8.f.建立坐标系.将球心取为原点 O,过原点 O 的铅垂线取为 x 轴,过原点 O 与 x 轴垂直的直线取为 y 轴.显然,在 xy 坐标面上,半径为10的半圆方程是

$$y=\pm\sqrt{10^2-x^2},\quad 0\leqslant x\leqslant 10.$$

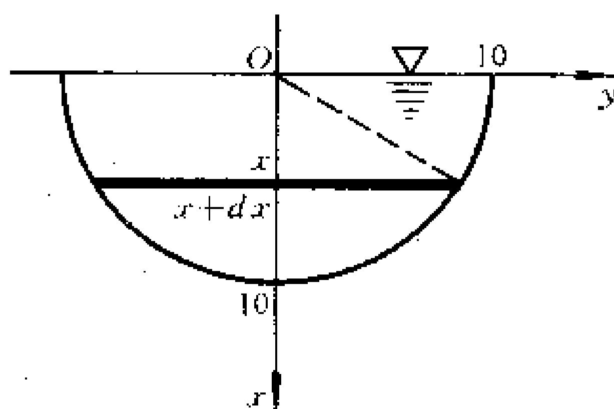


图 8.f

$\forall x\in[0,10]$,过点 x 平行水面的一层(薄圆盘)水的体积微元

$$dV=\pi(\sqrt{10^2-x^2})^2dx=\pi(10^2-x^2)dx(\mathrm{m}^3).$$

从而,质量微元(水密度 $\rho=1000(\mathrm{kg/m^3})$),

$$dm=\rho dV=1000\pi(10^2-x^2)dx(\mathrm{kg}).$$

从而,重力(重量)微元($g=9.8(\mathrm{m/s^2})$)

$$dF=g\cdot dm=9.8\times1000\pi(10^2-x^2)dx(\mathrm{N}).$$

将 dm 抽出半球,垂直向上抽出的位移是 x,功微元 $dW=xdF$.于是,将水抽尽,所作的功

$$W=\int_0^{10}dW=\int_0^{10}xdF=9800\pi\int_0^{10}x(10^2-x^2)dx$$

$$=245\times10^5\pi(\mathrm{N\cdot m}).$$

15. 一矩形板垂直水面浸在水中,其底8米,高12米,上沿与水面平行,并距水面5米,求矩形板的一侧所受的水压力.

解 建立坐标系,如图8.g.

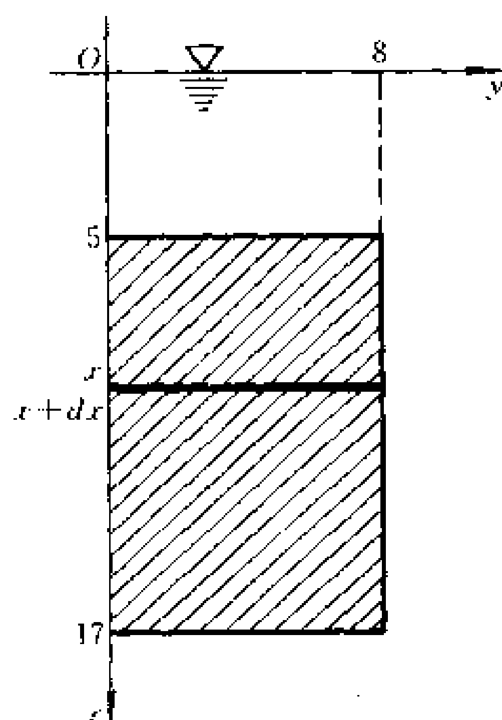


图 8.g

$\forall\, x \in [5,17]$，矩形板上平行 y 轴的一条面积微元

$$dA = 8dx(\mathrm{m}^2).$$

在水深 x 处，此面积微元所承受的水压力为

$$dP = \rho x \cdot 8dx,$$

其中 $\rho = 1000(\mathrm{kg/m}^3)$ 为水密度.

于是，矩形板一侧所受的水压力

$$P = \int_5^{17} dP = \int_5^{17} \rho x \cdot 8dx = \int_5^{17} 1000 \cdot 8xdx$$

$$= 8000\int_5^{17} xdx = 1056000(kg).$$

$$= 1056(T)$$

第九章　级　　数

练习题 9.1(一)

(《讲义》下册，第 9 页)

1. 求下列级数的和：

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

解　设 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)}$.

$$\frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{k+1-1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{1}{(k+2)(k+3)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+2)(k+3)}\right).$$

从而，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+2)(k+3)}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{n+3} + \frac{1}{2(n+2)(n+3)}.$$

于是，级数的和

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{2(n+2)(n+3)}\right)=\frac{1}{4}.$$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

解 设

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}.$$

$$\frac{1}{2}S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

上面二式等号两端分别相减,有

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

或

$$S_n=1+2\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}.$$

于是,级数的和

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[1+2\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}\right]=3.$$

2. 证明:m 是固定的自然数,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$$

证 设 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+m)}$. 讨论子数列 $\{S_{im}\}$. $\forall i\in\mathbf{N}$,有

$$S_{im}=\sum_{k=1}^{im}\frac{1}{k(k+m)}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{im}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+m}\right)$$

$$=\frac{1}{m}\left[\left(1-\frac{1}{m+1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2m}\right)\right.$$

$$+\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{2m+1}\right)+\left(\frac{1}{m+2}-\frac{1}{2m+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2m}-\frac{1}{3m}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{(i-1)m+1}-\frac{1}{im+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{im}-\frac{1}{im+m}\right)\Big]$$

$$=\frac{1}{m}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)-\left(\frac{1}{im+1}+\frac{1}{im+2}+\cdots+\frac{1}{im+m}\right)\right].$$

已知 m 是固定的自然数，有

$$\lim_{i\to\infty}S_{im}=\lim_{i\to\infty}\frac{1}{m}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{im+1}+\frac{1}{im+3}+\cdots+\frac{1}{im+m}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right).$$

已知部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调增加，且有一个子数列 $\{S_{im}\}$ 收敛于 $\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$，由练习题 2.2 第 17 题，有

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right),$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right).$$

3. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=a>0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散．

证 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=a>\frac{a}{2}>0$．由数列极限的保序性，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，有

$$na_n>\frac{a}{2}\quad 或\quad a_n>\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{n}.$$

根据定理 1 的推论 2，不妨设 $\forall n\in\mathbf{N}$，有 $a_n>\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{n}$．

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的部分和分别是 S_n 与 σ_n．从而 $\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k>\frac{a}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{a}{2}\sigma_n.$$

已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=+\infty$．于是，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$，即

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

4. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \geqslant 0)$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛. 反之是否成立？

证 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，即

$\exists \varepsilon_0 = 1$，$\exists N \in \mathbf{N}$，$\forall n > N$，有 $a_n < 1$，从而有 $a_n^2 < a_n$.

根据定理 1 的推论 2，不妨设 $\forall n \in \mathbf{N}$，有 $a_n^2 < a_n$.

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和分别是 A_n 与 B_n. 已知 $\forall n \in \mathbf{N}$，有

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 < \sum_{k=1}^{n} a_k = B_n.$$

已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} B_n = B$（常数）. 显然，数列 $\{A_n\}$ 是单调增加有上界（B 就是它的一个上界）. 于是，数列 $\{A_n\}$ 收敛，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

反之不成立. 例如：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 却发散.

5. 证明：若 $\{a_n\}$ 是整数数列，且 $0 \leqslant a_n \leqslant 9$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ 收敛，其和是 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ 的部分和是 S_n. $\forall \varepsilon > 0$，$\forall p \in \mathbf{N}$，要使不等式

$$S_{n+p} - S_n = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{10^{n+2}} + \cdots + \frac{a_{n+p}}{10^{n+p}}$$

$$< \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{10^{n+p-1}}$$

$$=\frac{\frac{1}{10^n}-\frac{1}{10^{n+p}}}{1-\frac{1}{10}}<\frac{10}{9}\frac{1}{10^n}<\frac{2}{10^n}<\varepsilon$$

成立，从不等式$\frac{2}{10^n}<\varepsilon$解得$n>\lg\frac{2}{\varepsilon}$. 取$N=\left[\lg\frac{2}{\varepsilon}\right]$，于是

$$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\lg\frac{2}{\varepsilon}\right]\in\mathbf{N},\forall n>N,\forall p\in\mathbf{N},\text{有}$$

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon,$$

由柯西收敛准则，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n10^{-n}$收敛. 设它的和是$S=\lim S_n$. 因

$$|S_n-0.a_1a_2\cdots a_n\cdots|=\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{10^k}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{10^k}\right|$$

$$=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{a_k}{10^k}=r_n\to 0(\text{当}\ n\to\infty),$$

所以
$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots.$$

6. 证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，且

$$a_n\leqslant c_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots),$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$也收敛.

证　已知$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，根据柯西收敛准则，

$$\forall\varepsilon>0,\begin{cases}\exists N_1\in\mathbf{N},\forall n>N_1,\forall p\in\mathbf{N},\text{有}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon,\\ \exists N_2\in\mathbf{N},\forall n>N_2,\forall p\in\mathbf{N},\text{有}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}b_k\right|<\varepsilon.\end{cases}$$

$\exists N=\max\{N_1,N_2\}\in\mathbf{N},\forall n>N,\forall p\in\mathbf{N}$，有

$$-\varepsilon<\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k<\varepsilon\quad\text{与}\quad-\varepsilon<\sum_{k=n+1}^{n+p}b_k<\varepsilon.$$

于是，有

$$-\varepsilon < \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k < \varepsilon$$

或

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \right| < \varepsilon,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛.

8. 证明:若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ 都收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

证 设级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的 n 项部分和分别是 A_n, B_n 与 S_n. 已知 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ 收敛,设

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A \quad 与 \quad \lim_{n\to\infty} B_n = B.$$

有

$$\begin{aligned} S_{2m} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2m-1} + a_{2m} \\ &= (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2m-1}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m}) \\ &= A_m + B_m. \end{aligned}$$

从而,

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = \lim_{m\to\infty} A_m + \lim_{m\to\infty} B_m = A + B.$$

$$\begin{aligned} S_{2m-1} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2m-2} + a_{2m-1} \\ &= (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2m-1}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m-2}) \\ &= A_m + B_{m-1}. \end{aligned}$$

从而,

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m-1} = \lim_{m\to\infty} A_m + \lim_{m\to\infty} B_{m-1} = A + B.$$

根据 §2.2 定理 10,有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = A + B,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

* * * *

9. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛．

证　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和分别是 A_n 与 B_n. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛，设 $\lim_{n\to\infty}A_n=A$. 有

$$B_{2n}=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}$$
$$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})=A_n.$$

从而，$\lim_{n\to\infty}B_{2n}=\lim_{n\to\infty}A_n=A.$

$$B_{2n-1}=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2n-3}+a_{2n-2}+a_{2n-1}$$
$$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-3}+a_{2n-2})+a_{2n-1}$$
$$=A_{n-1}+a_{2n-1},$$

从而，$\lim_{n\to\infty}B_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}A_{n-1}+\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=A.$（已知 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$）

根据§2.2定理10，有

$$\lim_{n\to\infty}B_n=A,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛．

10. 证明：若数列 $\{na_n\}$ 收敛，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛．

证　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和分别是 σ_n 与 S_n.

已知 $\{na_n\}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛，设

$$\lim_{n\to\infty}na_n=A \quad 与 \quad \lim_{n\to\infty}\sigma_n=B.$$

有

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k-1})$$

$$=a_1-a_0+2a_2-2a_1+3a_3-3a_2+\cdots+na_n-na_{n-1}$$

$$=na_n-(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})=na_n-\sum_{k=0}^{n-1}a_k$$

$$=na_n-a_0-\sum_{k=1}^{n-1}a_k=na_n-a_0-S_{n-1}$$

或
$$S_{n-1}=na_n-a_0-\sigma_n.$$

从而，$\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}na_n-a_0-\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=A-a_0-B$，

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛．

11．证明：若 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant\cdots\geqslant 0$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

证　已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，根据柯西收敛准则，

$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N$，取 $p=n$，有

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}<\varepsilon.$$

由已知条件：$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant\cdots$，有

$$na_{2n}<\varepsilon\quad 或\quad 2na_{2n}<2\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}2na_{2n}=0.$$

又已知 $\forall n\in\mathbf{N},a_{2n}\geqslant a_{2n+1}$，有

$$0\leqslant(2n+1)a_{2n+1}\leqslant(2n+1)a_{2n}=2na_{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}.$$

由上述结果，有 $\lim\limits_{n\to\infty}2na_{2n}\dfrac{2n+1}{2n}=0$，从而（根据两边夹定理）

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1}=0.$$

根据§2.2定理10，有

$$\lim_{n\to\infty}na_n=0.$$

12．证明：若将级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 依次若干项结合得新级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 收

敛，其中 $A_k=a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k}$，且 A_k 的项有相同的符号，则原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且两个收敛级数的和相等．

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty}A_k$ 的部分和分别是 S_n 与 σ_k．已知 $\sum_{k=1}^{\infty}A_k$ 收敛，设 $\lim_{k\to\infty}\sigma_k=S$，有

$$\sigma_k=A_1+A_2+\cdots+A_{k-1}+A_k=\sigma_{k-1}+a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k}.$$

$\forall n\in\mathbf{N}$，$\exists\ k\in\mathbf{N}$，使 $n_{k-1}+1\leqslant n\leqslant n_k(n_0=0)$．因为 A_k 中的项有相同的符号，所以当 n 从 $n_{k-1}+1$ 增加到 n_k 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和 S_n 总是介于 σ_{k-1} 与 σ_k 之间，即

$$\sigma_{k-1}\leqslant S_n\leqslant\sigma_k\quad 或\quad \sigma_{k-1}\geqslant S_n\geqslant\sigma_k.$$

$n\to\infty\Leftrightarrow k\to+\infty$．已知 $\lim_{k\to\infty}\sigma_k=\lim_{k\to\infty}\sigma_{k-1}=S$，于是

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且两个收敛级数有相同的和 S．

练习题 9.1(二)

（《讲义》下册，第 33 页）

1．判别下列正项级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$．

解 $\forall n\in\mathbf{N}$，有 $\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{n^2}$．

已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ 收敛．

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$．

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{2}\neq 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$ 发散．

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{2}(2n-1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$，

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$ 收敛．

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n+1}{3n-1}}=\sqrt{\frac{2}{3}}<1$，

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^{\frac{n}{2}}$ 收敛．

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}\Big/\frac{2^n n!}{n^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{2}{e}<1,$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ 收敛．

(11) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$.

解 $\forall n\in\mathbf{N}$，有 $\ln n<n$. $\forall n\geqslant 2$，有 $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$.

已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，则 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散．

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$.

解 $\forall n\in\mathbf{N}$，有 $1\leqslant\sqrt[n]{2+(-1)^n}\leqslant\sqrt[n]{3}$.

已知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(-1)^n}=1$.

有
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2}=\frac{1}{2}<1,$$
则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 收敛.

(15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$.

解 有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\cos\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}=\dfrac{1}{2}>0$ （见 § 2.4 例 8），

已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ 收敛.

2. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，下列级数是否收敛，为什么？

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$.

答 不一定收敛. 例如：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2$ $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 却发散.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$.

答 收敛. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$ 也收敛. 根据 § 9.1 定理 2 和定理 4，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$. $(a_n>0)$

答 不一定收敛. 例如，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^2}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 却

发散.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$. $(a_n>0)$

答 收敛. 因为$\forall n\in\mathbf{N}$, 有$\sqrt{a_na_{n+1}}\leqslant\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$, 由(2)知, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$收敛, 所以$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$收敛.

3. 证明:若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$收敛,则下列级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|,\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$$

也收敛.

证 $\forall n\in\mathbf{N}$, 有$|a_nb_n|\leqslant\frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)$.

已知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$收敛.

$\forall n\in\mathbf{N}$. 有$(a_n+b_n)^2\leqslant a_n^2+2|a_nb_n|+b_n^2$.

由已知条件和上述结果, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+2|a_nb_n|+b_n^2)$收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$收敛.

已知$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$都收敛, 取$b_n=\frac{1}{n}$, 由上述结果, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$收敛.

4. 证明:若$\{a_n\}$是等差数列,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$发散.

证 设$a_n=b+(n-1)d$, 其中d是公差.

若$d=0$, 此时$b\neq 0$. 显然, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b}$发散;

若$d\neq 0$(当$b=0$时, 要求$n\geqslant 2$), 分两种情况:

$d>0$, 当n充分大时, $a_n>0$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{b+(n-1)d}=\frac{1}{d}>0.$$

已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$发散；

$d<0$，当 n 充分大时，$a_n<0$，即$\exists\ N\in\mathbf{N},\forall n\geqslant N$，有 $a_n<0$. 已知正项级数 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}\frac{-1}{a_n}$发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$也发散.

5. 证明：若 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant\cdots\geqslant 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n a_{2^n}$ 同时收敛，同时发散.

证　设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n a_{2^n}$ 的 n 项部分和分别是 S_n 与 σ_n.

$\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$\begin{aligned}0\leqslant S_{2^n}&=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2^n}\\&\leqslant a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6+a_7)\\&\quad+\cdots+(a_{2^n}+a_{2^n+1}+\cdots+a_{2^{n+1}-1})\\&\leqslant a_1+2a_2+4a_4+\cdots+2^n a_{2^n}=\sigma_n.\end{aligned}$$

从而，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散（数列$\{S_n\}$无上界），则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n a_{2^n}$也发散.

又有

$$\begin{aligned}S_{2^n}&=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2^n}\\&=a_1+a_2+(a_3+a_4)+\cdots+\underbrace{(a_{2^{n-1}+1}+a_{2^{n-1}+2}+\cdots+a_{2^n})}_{2^{n-1}\text{个}}\\&\geqslant\frac{1}{2}a_1+a_2+2a_4+\cdots+2^{n-1}a_{2^n}\\&=\frac{1}{2}(a_1+2a_2+4a_4+\cdots+2^n a_{2^n})=\frac{1}{2}\sigma_n.\end{aligned}$$

从而，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛（数列$\{S_n\}$ 有上界），则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n a_{2^n}$ 也收敛.

于是，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}2^n a_{2^n}$ 同时收敛，同时发散．

6．设 $P(n)$ 与 $Q(n)$ 分别是关于 n 的 p 次与 q 次多项式，且 $Q(n)\neq 0$．证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}$ 收敛 $\Longleftrightarrow q-p\geqslant 2$．

证　设　$P(n)=a_p n^p+a_{p-1}n^{p-1}+\cdots+a_0$，

$Q(n)=b_q n^q+b_{q-1}n^{q-1}+\cdots+b_0$，

其中 a_i 与 b_j 都是常数，且 $a_p\neq 0, b_q\neq 0$．

$$u_n=\frac{P(n)}{Q(n)}=\frac{1}{n^{q-p}}\cdot\frac{a_p+\frac{a_{p-1}}{n}+\cdots+\frac{a_0}{n^p}}{b_q+\frac{b_{q-1}}{n}+\cdots+\frac{b_0}{n^q}}.$$

因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_p+\frac{a_{p-1}}{n}+\cdots+\frac{a_0}{n^p}}{b_q+\frac{b_{q-1}}{n}+\cdots+\frac{b_0}{n^q}}=\frac{a_p}{b_q},$$

所以当 n 充分大时，$u_n=\frac{P(n)}{Q(n)}$ 与 $\frac{a_p}{b_q}$ 同号．不妨设 $\frac{a_p}{b_q}>0$．从而，可将 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}$ 看作是正项级数，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^{q-p}}}=\frac{a_p}{b_q}>0.$$

根据定理 6 的推论，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{q-p}}$ 收敛 $\Longleftrightarrow q-p\geqslant 2$．于是，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}$ 收敛 $\Longleftrightarrow q-p\geqslant 2$．

7．判别下列级数的收敛性，并指出是绝对收敛还是条件收敛：

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}$．

解　已知数列 $\left\{\frac{1}{\ln n}\right\}$ 单调减少；且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0$．

$\forall n \in \mathbf{N}$，$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{12}$的部分和 S_n 的绝对值

$$|S_n| = \left| \sum_{k=2}^{n} \sin \frac{k\pi}{12} \right| = \left| \frac{\cos \frac{3\pi}{24} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{12}}{2\sin \frac{\pi}{24}} \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\sin \frac{\pi}{24}}\text{（常数），（见《讲义》上册，第 348 页）}$$

即 S_n 有界．根据狄利克莱判别法，$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n}$ 收敛．

而
$$\left| \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n} \right| \geqslant \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{12}}{\ln n} = \frac{1 - \cos \frac{n\pi}{6}}{2\ln n}$$

$$= \frac{1}{2\ln n} - \frac{\cos \frac{n\pi}{6}}{2\ln n},$$

已知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2\ln n}$ 发散，而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{6}}{2\ln n}$ 收敛（证法同上），则 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n} \right|$ 发散．于是，$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n}$ 条件收敛．

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$.

解 这是交错级数，$\forall n \in \mathbf{N}$，有 $\sin \frac{1}{n} > \sin \frac{1}{n+1}$，$\lim\limits_{n\to\infty} \sin \frac{1}{n} = 0$. 根据莱布尼兹判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$ 收敛．

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \sin \frac{1}{n} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ 发散．（见第 1 题的(14)）

于是，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$ 条件收敛．

8. 参数 s 取何值，下列级数是绝对收敛和条件收敛：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^s}$.

解 当 $s\leqslant 0$ 时，有 $\left|\frac{(-1)^n}{n^s}\right|\geqslant 1$，一般项 $\frac{(-1)^n}{n^s}$ 不趋于 0，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^s}$ 发散．

当 $s>0$ 时，这是交错级数，$\forall n\in\mathbf{N}$，$\frac{1}{n^s}>\frac{1}{(n+1)^s}$，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^s}=0$. 根据莱布尼兹判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^s}$ 收敛．

而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^s}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 是广义调和级数，已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 当 $s>1$ 时收敛；当 $s\leqslant 1$ 时发散．于是，

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^s}$ 当 $0<s\leqslant 1$ 时条件收敛，当 $s>1$ 时绝对收敛．

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^s$.

解 当 $s\leqslant 0$ 时，有 $\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^s\geqslant 1$，一般项不趋于 0，故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^s$ 发散．

当 $s>0$ 时，这是交错级数，$\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$\left[\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right]^s<\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^s.$$

事实上，

$$\frac{\left[\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right]^s}{\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^s}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^s<1.$$

又有 $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^s=0$,

事实上，设 $A_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$. $\forall k\in\mathbf{N}$，有$\frac{2k-1}{2k}<\frac{2k}{2k+1}$，从而

$$A_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}<\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}}=\frac{1}{A_n(2n+1)}$$

即 $$A_n^2<\frac{1}{2n+1}\quad 或 \quad 0<A_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

已知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=0$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^s=0.$$

根据莱布尼兹法则，当 $s>0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^s$ 收敛.

而正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^s\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^s.$$

应用上面证明 $A_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$的同样方法，可证$\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}<A_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

或 $$\frac{1}{2^s n^{\frac{s}{2}}}<\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^s<\frac{1}{(2n+1)^{\frac{s}{2}}}\left(<\frac{1}{2^{\frac{s}{2}}n^{\frac{s}{2}}}\right).$$

从而，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^s$ 当$\frac{s}{2}>1$，即 $s>2$ 时收敛；当$\frac{s}{2}\leqslant 1$，即 $s\leqslant 2$ 时发散. 于是，

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^s$ 当 $0<s\leqslant 2$ 时条件收敛；当 $s>2$ 时绝对收敛.

10. 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛，

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 也收敛.

证 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n-1}|$ 收敛,由柯西收敛准则,有

$\forall \varepsilon>0, \exists N_1 \in \mathbf{N}, \forall n>N_1, \forall p \in \mathbf{N}$,有

$$|a_{n+2}-a_{n+1}|+|a_{n+3}-a_{n+2}|+\cdots+|a_{n+p}-a_{n+p-1}|<\varepsilon. \quad (1)$$

从而,$|a_{n+p}-a_{n+1}| \leqslant |a_{n+p}-a_{n+p-1}|+\cdots+|a_{n+2}-a_{n+1}|<\varepsilon. \quad (2)$

已知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,则它的部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n} b_k$ 数列 $\{S_n\}$ 收敛,由柯西收敛准则,

对上述 $\varepsilon>0, \exists N_2 \in \mathbf{N}, \forall n>N_2, \forall p \in \mathbf{N}$,有

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon. \quad (3)$$

显然,$\forall k \in \mathbf{N}$,有 $b_k=S_k-S_{k-1}(S_0=0)$.

由(2)与(3)知,数列 $\{a_n\}$ 与 $\{S_n\}$ 都收敛,从而都有界,即

$$\exists M>0, \forall n \in \mathbf{N}, 有 |a_n| \leqslant M 与 |S_n| \leqslant M. \quad (4)$$

于是,由(1),(2),(3),(4),

$\forall \varepsilon>0, \exists N=\max\{N_1, N_2\} \in \mathbf{N}, \forall n>N, \forall p \in \mathbf{N}$,有

$$\begin{aligned}
&|a_{n+1}b_{n+1}+a_{n+2}b_{n+2}+\cdots+a_{n+p}b_{n+p}| \\
=&|a_{n+1}(S_{n+1}-S_n)+a_{n+2}(S_{n+2}-S_{n+1})+\cdots+a_{n+p}(S_{n+p}-S_{n+p-1})| \\
=&|S_{n+1}(a_{n+1}-a_{n+2})+S_{n+2}(a_{n+2}-a_{n+3})+\cdots \\
&\quad+S_{n+p-1}(a_{n+p-1}-a_{n+p})+a_{n+p}S_{n+p}-a_{n+1}S_n| \\
\leqslant&|S_{n+1}||a_{n+1}-a_{n+2}|+|S_{n+2}||a_{n+2}-a_{n+3}|+\cdots \\
&\quad+|S_{n+p-1}||a_{n+p-1}-a_{n+p}|+|a_{n+p}S_{n+p}-a_{n+p}S_n+a_{n+p}S_n-a_{n+1}S_n| \\
\leqslant&M(|a_{n+2}-a_{n+1}|+|a_{n+3}-a_{n+2}|+\cdots+|a_{n+p}-a_{n+p-1}|) \\
&\quad+M|S_{n+p}-S_n|+M|a_{n+p}-a_{n+1}| \\
<&M\varepsilon+M\varepsilon+M\varepsilon=3M\varepsilon,
\end{aligned}$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

11. 有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,设 $a_n^+=\frac{|a_n|+a_n}{2}, a_n^-=\frac{|a_n|-a_n}{2}$.

证明:级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛 $\Longleftrightarrow$ 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 都收敛;当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛时,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+-\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-.$$

证 $\Rightarrow$已知$\forall n\in\mathbf{N}$,有

$$a_n^+\leqslant|a_n|\quad 与\quad a_n^-\leqslant|a_n|.$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,即 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛,则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 都收敛.

$\Leftarrow$已知$\forall n\in\mathbf{N}$,有$|a_n|=a_n^++a_n^-$.

若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 都收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 也收敛,即 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

又$\forall n\in\mathbf{N}$,有 $a_n=a_n^+-a_n^-$. 已知当 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛时,$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 都收敛. 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+-\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-.$$

12. 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 都发散到正无穷大.

证 用反证法 假设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$ 收敛. $\forall n\in\mathbf{N}$,有

$$|a_n|=a_n^++a_n^-=2a_n^+-(a_n^+-a_n^-)=2a_n^+-a_n.$$

已知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 都收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛,即 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,与已知条件矛盾. 于是,$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$ 发散.

同法可证,$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 也发散.

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都是正项级数，所以它们都发散到正无穷大.

*　　*　　*　　*

13. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$ 发散，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 也发散.

证　已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$ 发散，则它的部分和数列 $\{S_n\}$ 单调增加无上界. 从而 $\forall n \in \mathbf{N}, \exists p \in \mathbf{N}$，使

$$S_{n+p} \geqslant 2S_n \quad \text{或} \quad \frac{S_n}{S_{n+p}} \leqslant \frac{1}{2}.$$

有

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{S_{n+2}} + \cdots + \frac{a_{n+p}}{S_{n+p}} > \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}}{S_{n+p}}$$

$$= \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}} \geqslant 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

即　$\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0, \forall N \in \mathbf{N}, \exists n > N, \exists p \in \mathbf{N}$（使 $S_{n+p} \geqslant 2S_n$），有

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{S_{n+2}} + \cdots + \frac{a_{n+p}}{S_{n+p}} \geqslant \frac{1}{2},$$

于是，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 发散.

14. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$ 收敛，$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n}$ 发散.

证　显然，$\forall n \in \mathbf{N}, r_n > 0$，且 $\{r_n\}$ 是严格减少数列. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n \to \infty} r_n = 0$. 从而，$\forall n \in \mathbf{N}, \exists p \in \mathbf{N}$，使

$$2r_{n+p} < r_{n+1} \quad \text{或} \quad \frac{r_{n+p}}{r_{n+1}} < \frac{1}{2}.$$

$\forall n \in \mathbf{N}, r_n = a_n + r_{n+1}$ 或 $r_{n+1} = r_n - a_n$，有

$$\frac{a_{n+1}}{r_{n+1}}+\frac{a_{n+2}}{r_{n+2}}+\cdots+\frac{a_{n+p}}{r_{n+p}}>\frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}}{r_{n+1}}$$

$$=\frac{r_{n+1}-r_{n+p+1}}{r_{n+1}}=\frac{r_{n+1}-r_{n+p}+a_{n+p}}{r_{n+1}}=1-\frac{r_{n+p}}{r_{n+1}}+\frac{a_{n+p}}{r_{n+1}}$$

$$>1-\frac{r_{n+p}}{r_{n+1}}>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

即 $\exists\ \varepsilon_0=\frac{1}{2}>0,\forall N\in\mathbf{N},\exists\ n>N,\exists\ p\in\mathbf{N}$(使 $2r_{n+p}<r_{n+1}$),有

$$\frac{a_{n+1}}{r_{n+1}}+\frac{a_{n+2}}{r_{n+2}}+\cdots+\frac{a_{n+p}}{r_{n+p}}>\frac{1}{2},$$

于是,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{r_n}$ 发散.

15. 证明:若在调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 中去掉分母 n 含有数字 0 的项,则剩余项组成的新级数收敛,其和不超过 90.

证　将新级数表为 $\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{1}{n}$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\cdots+\frac{1}{29}$$
$$+\cdots+\frac{1}{99}+\frac{1}{111}+\cdots.$$

新级数的每一项的分子都是 1. 而分母 n 不含有 0 的数字.

分母是 1 位数的共有 9 项,其和 不超过 9,

分母是 2 位数的共有 9^2 项,其和不超过$\frac{9^2}{10}$,

分母是 3 位数的共有 9^3 项,其和不超过$\frac{9^3}{10^2}$,

…

分母是 n 位数的共有 9^n 项,其和不超过$\frac{9^n}{10^{n-1}}$,

…

于是,$\forall m\in\mathbf{N},\exists\ n\in\mathbf{N}$,且 $n\geqslant m$,使

$$\sum_{k=1}^{m}{}'\frac{1}{k}\leqslant 9+\frac{9^2}{10}+\frac{9^3}{10^2}+\cdots+\frac{9^n}{10^{n-1}}$$

$$=9\left[1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\cdots+\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\right]$$

$$<9\left(1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\cdots+\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}+\cdots\right)$$

$$=\frac{9}{1-\frac{9}{10}}=90,$$

即新级数 $\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n}$ 的部分和有上界．于是，新级数 $\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n}$ 收敛，其和不超过 90.

16. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}$ 收敛，则 $\forall \beta>\alpha$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\beta}$ 也收敛.

证 设 $\beta=\alpha+\lambda,\lambda>0$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\beta}=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\alpha+\lambda}}=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}\cdot\frac{1}{n^\lambda}.$$

数列 $\left\{\frac{1}{n^\lambda}\right\}$ 单调减少．有下界（0 就是它的一个下界），而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}$ 收敛．根据阿贝耳判别法（定理 12），则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\beta}$ 收敛．

17. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\sigma}(\sigma>0)$ 收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n^\sigma}=0.$$

证 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\sigma}$ 收敛，根据柯西收敛准则，

$\forall \varepsilon>0,\exists\ m\in\mathbf{N},\forall p\in\mathbf{N}$，有

$$\left|\frac{a_{m+1}}{(m+1)^\sigma}+\frac{a_{m+2}}{(m+2)^\sigma}+\cdots+\frac{a_{m+p}}{(m+p)^\sigma}\right|<\varepsilon.$$

又已知，$0<\left(\frac{m+1}{m+p}\right)^\sigma<\left(\frac{m+2}{m+p}\right)^\sigma<\cdots<\left(\frac{m+p}{m+p}\right)^\sigma=1.$

根据阿贝尔变换（引理），有

$$\left|\frac{a_{m+1}}{(m+1)^\sigma}\left(\frac{m+1}{m+p}\right)^\sigma+\frac{a_{m+2}}{(m+2)^\sigma}\left(\frac{m+2}{m+p}\right)^\sigma+\cdots\right.$$

$$+\frac{a_{m+p}}{(m+p)^{\sigma}}\left(\frac{m+p}{m+p}\right)^{\sigma}\Bigg| < \varepsilon,$$

即 $$\left|\sum_{k=m+1}^{m+p}\frac{a_k}{(m+p)^{\sigma}}\right| = \left|\frac{a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+p}}{(m+p)^{\sigma}}\right| < \varepsilon.$$

对固定的 m，有

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{(m+p)^{\sigma}}\right| = \left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{(m+p)^{\sigma}}\right| \to 0(p\to+\infty),$$

即对上述的 $\varepsilon>0$，$\exists\ L\in\mathbf{N}$，$\forall p>L$，有

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{(m+p)^{\sigma}}\right| = \left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{(m+p)^{\sigma}}\right| < \varepsilon.$$

于是，$\forall\varepsilon>0(\exists\ m\in\mathbf{N})$，$\exists\ L\in\mathbf{N}$，$\forall p>L$，有

$$\left|\sum_{k=1}^{m+p}\frac{a_k}{(m+p)^{\sigma}}\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{(m+p)^{\sigma}}\right| + \left|\sum_{k=m+1}^{m+p}\frac{a_k}{(m+p)^{\sigma}}\right| < 2\varepsilon,$$

因为 p 是大于 L 的任意整数，所以可以任意大，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n^{\sigma}} = 0.$$

注 第 18 题的证法与第 10 题证法相同，从略.

练习题 9.1(三)

(《讲义》下册，第 43 页)

1. 证明：将收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 相邻的奇偶项交换位置得到的新级数也收敛，且有相同的和数.

证 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，设它的部分和是 A_n，其和是 S，即 $\lim_{n\to\infty}A_n=S$，又 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. 设奇偶项交换位置的新级数的部分和是 B_n.

当 $n=2k(k\in\mathbf{N})$ 是偶数时，有 $B_{2k}=A_{2k}$；

当 $n=2k+1(k\in\mathbf{N})$ 是奇数时，有 $B_{2k+1}=A_{2k}+a_{2k+2}$.

有
$$\lim_{k\to\infty} B_{2k} = \lim_{k\to\infty} A_{2k} = S,$$
$$\lim_{k\to\infty} B_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} A_{2k} + \lim_{k\to\infty} a_{2k+2} = S.$$
于是，$\lim_{n\to\infty} B_n = S$，即新级数收敛，其和也是 S.

2. 交换条件收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 的各项，使交换项之后的新级数发散到正无穷大($+\infty$).

证 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 是条件收敛. 由练习题 9.1(二)的第 12 题知，两个正项级数：
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)^{+} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1} \qquad (A)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)^{-} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n} \qquad (B)$$
都发散到正无穷大，下面构造新级数：

先设新级数的部分和是 S_n，取(A)的第 1 项“1”作为新级数的第 1 项，接着取(B)的第 1 项“$\frac{1}{2}$”添上负号作为新级数的第 2 项，部分和
$$S_{n_0} = 1 - \frac{1}{2}, \quad n_0 = 2.$$
接着依次取(A)的若干项直至$\frac{1}{2k_1-1}$，其中 $k_1\in\mathbf{N}, k_1>1$，使部分和
$$S_{n_1} = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2k_1-1}\right) \geqslant 2.$$
这是可能的，因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1} = +\infty$(下同). 接着取$(B)$的第 2 项“$\frac{1}{4}$”，添上负号，即
$$S_{n_1+1} = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2k_1-1}\right) - \frac{1}{4}.$$
再接着依次取(A)的若干项，直至$\frac{1}{2k_2-1}$，其中 $k_2\in\mathbf{N}, k_2>k_1+1$，使

部分和

$$S_{n_2}=1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k_1-1}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2k_1+1}+\cdots+\frac{1}{2k_2-1}\right)\geqslant 3,$$

接着取(B)的第 3 项“$\frac{1}{6}$”,添上负号,即

$$S_{n_2+1}=1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k_1-1}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2k_1+1}+\cdots+\frac{1}{2k_2-1}\right)-\frac{1}{6},$$

再接着依次取(A)的若干项直至$\frac{1}{2k_3-1}$,其中 $k_3\in\mathbf{N},k_3>k_2+1$,使部分和

$$S_{n_3}=1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k_1-1}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2k_1+1}+\cdots+\frac{1}{2k_2-1}\right)-\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{2k_2+1}+\cdots+\frac{1}{2k_3-1}\right)\geqslant 4,$$

按此规律逐项取下去,构造了新级数,显然,新级数包含了原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 的所有项,且仅是这些项,有

$$S_{n_1}\geqslant 2,S_{n_2}\geqslant 3,\cdots,S_{n_k}\geqslant k+1,\cdots.$$

$\forall n\in\mathbf{N}$,且 $n\geqslant n_1$,$\exists\ k\in\mathbf{N}$,使 $S_{n_{k-1}}<S_n\leqslant S_{n_{k+1}}$. 已知

$$\lim_{k\to\infty}S_{n_{k-1}}=\lim_{k\to\infty}S_{n_{k+1}}=+\infty.\ (n\to\infty\Longleftrightarrow k\to\infty)$$

于是,$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$,即新级数发散到正无穷大($+\infty$).

4. 证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 自乘的柯西乘积收敛.

证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$的自乘的柯西乘积是

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot\frac{(-1)^{n-k}}{n-k+1}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(-1)^{n-2}}{n-1}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot 1\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2\cdot(n-1)}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 1}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n,$$

其中 $c_n=\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2\cdot(n-1)}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 1}$. 根据练习题 9.1(一)的第 12 题，只须证明 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$ 收敛即可. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$ 是交错级数.

1) $\forall n\in\mathbf{N}$，有 $c_n\geqslant c_{n+1}$. 事实上

$$c_n-c_{n+1}=\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2\cdot(n-1)}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 1}$$

$$-\left(\frac{1}{1\cdot(n+1)}+\frac{1}{2\cdot n}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 2}+\frac{1}{(n+1)\cdot 1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{n+1}$$

$$\geqslant\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\cdots+1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{n+1}=0.$$

即数列$\{c_n\}$是单调减少.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$. 事实上

$$c_{2k}=\frac{1}{1\cdot(2k)}+\frac{1}{2\cdot(2k-1)}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}$$

$$+\frac{1}{(k+1)k}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot 2}+\frac{1}{(2k)\cdot 1}$$

$$=2\left(\frac{1}{1\cdot(2k)}+\frac{1}{2\cdot(2k-1)}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right)$$

$$\leqslant 2\left(\frac{1}{1\cdot(k+1)}+\frac{1}{2\cdot(k+1)}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right)$$

$$=\frac{2}{k+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)$$

$$=\frac{2}{k+1}(\ln k+c+r_k)\text{①},$$

其中 c 是尤拉常数，而 $\lim\limits_{k\to\infty} r_k=0$. 于是，

$$\lim_{k\to\infty} c_{2k} = \lim_{k\to\infty}\frac{2}{k+1}(\ln k + c + r_k) = 0.$$

已知单调减少的数列 $\{c_n\}$ 中有一个偶子列 $\{c_{2k}\}$ 极限为 0，则 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=0$.

根据莱布尼兹判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$ 收敛．于是，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 的柯西乘积收敛．

5. 证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2.$

证　设收敛的交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 的部分和是 S_n，其和是 S，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$. 求和数 S 只须求 $\{S_n\}$ 的偶子列 $\{S_{2n}\}$ 的极限即可．由练习题 2.2 第 19 题，有

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\\
&\qquad -2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\
&= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\
&\qquad -\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\
&= (\ln 2n + c + r_{2n}) - (\ln n + c + r_n)\\
&= \ln 2 + r_{2n} - r_n,
\end{aligned}$$

---

① 见《讲义》上册，练习题 2.2 第 19 题．

其中 c 是尤拉常数，$\lim\limits_{n\to\infty} r_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} r_n=0$. 于是，和数

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}(\ln 2+r_{2n}-r_n)$$

$$=\ln 2.$$

*　　*　　*　　*

6. 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，将其重排，使新级数中的每一项的序号与该项在原级数中的序号之差的绝对值不超过 m（m 是固定的自然数），则新级数收敛，且其和与原级数的和相等.

证　已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，设它的部分和是 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，其和是 S，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，又有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，即

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，有

$$|S_n-S|<\varepsilon\quad 与\quad |a_n|<\varepsilon.$$

设新级数的部分和是 A_n. $\forall n>N$，部分和 A_{n+m} 必包含有原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前 n 项：$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 以及 $a_{n+1},a_{n+2},\cdots,a_{n+2m}$ 中的 m 个项，设它们是：$a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_m}$. 从而，有

$$|A_{n+m}-S|=|S_n+a_{n_1}+a_{n_2}+\cdots+a_{n_m}-S|$$

$$\leqslant|S_n-S|+|a_{n_1}|+|a_{n_2}|+\cdots+|a_{n_m}|<\varepsilon+m\varepsilon=(1+m)\varepsilon,$$

m 是固定的自然数，于是，

$$\lim_{n\to\infty}A_{n+m}=S\quad 或\quad \lim_{n\to\infty}A_n=S,$$

即新级数收敛，其和也是 S.

7. 证明：将级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 重排，首先依次有 p 个正项，其次依次有 q 个负项，以下如此循环，则新级数的和是

$$\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

证　设重排的新级数的部分和是 S_n. 由练习题 2.2 第 19 题，

$\forall k \in \mathbf{N}$,有

$$S_{(p+q)k}=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2q}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2p+1}+\cdots+\frac{1}{4p-1}\right)-\left(\frac{1}{2q+2}+\cdots+\frac{1}{4q}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{2p(k-1)+1}+\cdots+\frac{1}{2pk-1}\right)$$
$$-\left(\frac{1}{2q(k-1)+2}+\cdots+\frac{1}{2qk}\right)$$
$$=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2pk-1}\right)$$
$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2qk}\right)$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2pk-1}+\frac{1}{2pk}$$
$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{pk}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{qk}\right)$$
$$=\ln 2pk+c+r_{2pk}-\frac{1}{2}(\ln pk+c+r_{pk})$$
$$-\frac{1}{2}(\ln qk+c+r_{qk})$$
$$=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}+r_{2pk}-\frac{1}{2}(r_{pk}+r_{qk}),$$

其中 c 是尤拉常数,$\lim\limits_{k\to\infty}r_{2pk}=\lim\limits_{k\to\infty}r_{pk}=\lim\limits_{k\to\infty}r_{qk}=0$. 有

$$\lim_{k\to\infty}S_{(p+q)k}=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=0$,所以

$$\lim_{k\to\infty}S_{(p+q)k+j}=\lim_{k\to\infty}S_{(p+q)k}=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

再根据练习题 9.1(一)第 12 题,有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q},$$

于是,新级数的和是 $\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

练习题 9.2(一)

(《讲义》下册,第 62 页)

1. 判别下列函数级数在指定区间的一致收敛或非一致收敛:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$,①在$[0,1]$;②在$[0,\delta]$(其中 $0<\delta<1$).

解 设 $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(1-x)x^k=1-x^n(x\neq 1)$,有

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}0, & x=1,\\ 1, & 0\leqslant x<1.\end{cases}$$

①$\exists\ \varepsilon_0=\frac{1}{3}>0,\forall N\in\mathbf{N},\exists\ n_0>N,\exists\ x_0=1-\frac{1}{n_0}\in[0,1)$,有

$$|S(x_0)-S_{n_0}(x_0)|=\left(1-\frac{1}{n_0}\right)^{n_0}>\frac{1}{3},$$

(因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}>\frac{1}{3}$,所以当 n_0 充分大时,有$\left(1-\frac{1}{n_0}\right)^{n_0}>\frac{1}{3}$)即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ 在$[0,1]$非一致收敛;

②$\forall\varepsilon>0(\varepsilon<1),\forall x\in[0,\delta](0<\delta<1)$,要使不等式

$$|S(x)-S_n(x)|=|1-(1-x^n)|=|x|^n\leqslant\delta^n<\varepsilon$$

成立,从不等式 $\delta^n<\varepsilon$ 解得 $n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln\delta}$. 取 $N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln\delta}\right]$,于是

$$\forall\varepsilon>0,\exists\ N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln\delta}\right]\in\mathbf{N},\forall n>N,\forall x\in[0,\delta],有$$

$$|S(x)-S_n(x)|\leqslant\delta^n<\varepsilon,$$

即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ 在$[0,\delta](0<\delta<1)$一致收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$，　在$(0,+\infty)$.

解　设　$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{[(k-1)x+1](kx+1)}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)x+1}-\frac{1}{kx+1}\right)=1-\frac{1}{nx+1}.$$

$\forall x\in(0,+\infty)$，有

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{nx+1}\right)=1.$$

$\exists\ \varepsilon_0=\frac{1}{3}>0,\forall N\in\mathbf{N},\exists\ n_0>N,\exists\ x_0=\frac{1}{n_0}\in(0,+\infty)$，有

$$|S(x_0)-S_{n_0}(x_0)|=\frac{1}{n_0\cdot\frac{1}{n_0}+1}=\frac{1}{2}>\frac{1}{3},$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$在$(0,+\infty)$非一致收敛.

2. 判别下列函数级数在指定区间的一致收敛或非一致收敛.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$，在 $\mathbf{R}$ 上.

解　$\forall x\in\mathbf{R}$，有$\frac{1}{x^2+n^2}\leqslant\frac{1}{n^2}$.

已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$在 $\mathbf{R}$ 一致收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$，在 $\mathbf{R}$ 上.

解　已知 $a^2+b^2\geqslant2|ab|$，有 $1+n^5x^2\geqslant2|n^{\frac{5}{2}}x|$.

$\forall x\in\mathbf{R},x\neq0$，有

$$\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right|\leqslant\frac{n|x|}{2n^{\frac{5}{2}}|x|}=\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

当 $x=0$ 时，上述不等式也成立. 于是，$\forall x\in\mathbf{R}$，有

$$\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right|\leqslant\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$在 $\mathbf{R}$ 一致收敛．

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^nx}$，在$(0,+\infty)$.

解　应用柯西一致收敛准则的否定叙述，$\exists\ \varepsilon_0=1,\forall N\in\mathbf{N}$，$\exists\ n_0>N,\exists\ p=1,\exists\ x_0=\frac{2}{3^{n_0+1}\pi}\in(0,+\infty)$，有

$$|S_{n_0+1}(x_0)-S_{n_0}(x_0)|=\left|2^{n_0+1}\sin\frac{1}{3^{n_0+1}\cdot\frac{2}{3^{n_0+1}\pi}}\right|=2^{n_0+1}\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=2^{n_0+1}>1,$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^nx}$在$(0,+\infty)$非一致收敛．

3. 证明：若函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ 在区间 I 一致收敛，则函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在区间 I 也一致收敛，反之是否成立？考虑函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n, x\in[0,1]$.

证　已知$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ 在 I 一致收敛，由柯西一致收敛准则，$\forall\varepsilon>0,\exists\ N\in\mathbf{N},\forall n>N,\forall p\in\mathbf{N},\forall x\in I$，有

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}|f_k(x)|<\varepsilon.$$

从而，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}f_k(x)\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}|f_k(x)|<\varepsilon,$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在 I 一致收敛．

反之不成立．例如，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在$[0,1]$一致收敛．事实上，设

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(1-x)x^k=(1-x)\sum_{k=1}^{n}(-x)^k$$
$$=-\frac{x(1-x)[1-(-x)^n]}{1+x}.$$

$\forall x\in[0,1)$，有

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=-\frac{x(1-x)}{1+x}.$$

当 $x=1$ 时，上式也成立，即$\forall x\in[0,1]$，有 $S(x)=-\frac{x(1-x)}{1+x}$.

$$|S(x)-S_n(x)|=\left|\frac{(1-x)(-x)^{n+1}}{1+x}\right|\leqslant(1-x)x^{n+1}.$$

$\forall\varepsilon>0$，

$\forall x\in[1-\varepsilon,1](1-\varepsilon\leqslant x\leqslant 1)$，$\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$|S(x)-S_n(x)|\leqslant(1-x)x^{n+1}\leqslant 1-x\leqslant\varepsilon.$$

$\forall x\in[0,1-\varepsilon](0\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon)$，要使不等式

$$|S(x)-S_n(x)|\leqslant(1-x)x^{n+1}\leqslant x^{n+1}\leqslant(1-\varepsilon)^{n+1}<\varepsilon$$

成立，从不等式 $(1-\varepsilon)^{n+1}<\varepsilon$ 解得 $n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln(1-\varepsilon)}-1$. 取 $N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln(1-\varepsilon)}-1\right]$，于是

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln(1-\varepsilon)}-1\right]\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，$\forall x\in[0,1-\varepsilon]$，有

$$|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon,$$

从而，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在$[0,1-\varepsilon]$与$[1-\varepsilon,1]$都一致收敛．于是，它在$[0,1]$一致收敛．

而$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n(1-x)x^n|=\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$ 在$[0,1]$非一致收敛（见第 1 题的(1)）.

4. 证明：若函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$[a,b]$一致收敛，且函数 $\varphi(x)$ 在$[a,b]$有界，则函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(x)f_n(x)$ 在$[a,b]$ 也一致收敛．

证　已知$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在$[a,b]$一致收敛，由柯西一致收敛准则，

$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}, \forall n>N, \forall p\in\mathbf{N}, \forall x\in[a,b]$，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right|<\varepsilon.$$

又已知$\varphi(x)$在$[a,b]$有界，即

$\exists M>0, \forall x\in[a,b]$，有$|\varphi(x)|\leqslant M$.

于是，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \varphi(x)f_k(x)\right| = \left|\varphi(x)\cdot\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right|$$

$$\leqslant |\varphi(x)|\cdot\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right|<M\varepsilon,$$

即$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(x)f_n(x)$在$[a,b]$一致收敛.

5. 证明：若函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$与$\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$在区间$I$都一致收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}[af_n(x)+bg_n(x)]$在区间$I$也一致收敛，其中$a$与$b$是常数.

证　已知$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$与$\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$在$I$一致收敛，即

$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}, \forall n>N, \forall p\in\mathbf{N}, \forall x\in I$，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right|<\varepsilon \quad 与 \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(x)\right|<\varepsilon.$$

于是，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}[af_k(x)+bg_k(x)]\right| = \left|a\sum_{k=n+1}^{n+p}f_k(x)+b\sum_{k=n+1}^{n+p}g_k(x)\right|$$

$$\leqslant|a|\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}f_k(x)\right|+|b|\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}g_k(x)\right|$$

$$<|a|\varepsilon+|b|\varepsilon=(|a|+|b|)\varepsilon,$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}[af_n(x)+bg_n(x)]$在 I 一致收敛．

6. 证明：若函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ 在区间 I 一致收敛（亦称 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在区间 I 绝对一致收敛），函数列$\{g_n(x)\}$ 在区间 I 一致有界，则函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)g_n(x)$ 在区间 I 一致收敛．

证 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$在 I 一致收敛，即

$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N,\forall p\in\mathbf{N},\forall x\in I$，有

$$|f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\cdots+|f_{n+p}(x)|<\varepsilon.$$

又已知$\{g_n(x)\}$在 I 一致有界，即

$\exists M>0,\forall n\in\mathbf{N},\forall x\in I$，有$|g_n(x)|\leqslant M$.

于是，

$$\begin{aligned}&|f_{n+1}(x)g_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)g_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)g_{n+p}(x)|\\ \leqslant&|f_{n+1}(x)||g_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)||g_{n+2}(x)|+\cdots\\ &+|f_{n+p}(x)||g_{n+p}(x)|\\ \leqslant&M(|f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\cdots+|f_{n+p}(x)|)<M\varepsilon,\end{aligned}$$

即函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)g_n(x)$在区间 I 一致收敛．

注 《讲义》原题抄写有误，如是改正．

7. 证明：函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$在 $\mathbf{R}$ 一致收敛，但是$\forall x\in\mathbf{R}$ 非绝对收敛．函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$，$\forall x\in\mathbf{R}$ 都绝对收敛，但是在 $\mathbf{R}$ 非一致收敛．它们说明了什么？

证 显然，$\forall x\in\mathbf{R}$，数列$\left\{\frac{1}{n+x^2}\right\}$单调减少，并且在 $\mathbf{R}$ 是一致收敛于 0. 事实上，

$\forall \varepsilon>0, \exists\ N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\in\mathbf{N}, \forall n>N, \forall x\in\mathbf{R}$，有

$$\left|\frac{1}{n+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$的部分和 S_n(在 $\mathbf{R}$ 一致)有界，

根据狄利克莱判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$在 $\mathbf{R}$ 一致收敛．

显然，对$\forall x\in\mathbf{R}$，正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+x^2}$ 都发散，即 $\forall\ x\in\mathbf{R}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$ 都条件收敛，而非绝对收敛．

$\forall x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$是公比等于$\frac{1}{1+x^2}<1$ 的正项等比级数，它是收敛的．显然，当 $x=0$ 时，它也收敛，即$\forall x\in\mathbf{R}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 绝对收敛．但是，它在 $\mathbf{R}$ 却非一致收敛．事实上，设

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^2}{(1+x^2)^k}=1-\frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

$\forall x\in\mathbf{R}$，有

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(1+x^2)^n}\right)=\begin{cases}1, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$$|S(x)-S_n(x)|=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+x^2)^n}, & x\neq0,\\[2mm] 1-\dfrac{1}{(1+x^2)^n}, & x=0.\end{cases}$$

$\exists\ \varepsilon_0=\frac{1}{3}>0, \forall N\in\mathbf{N}, \exists\ n_0>N, \exists\ x_0=\frac{1}{\sqrt{n_0}}\in(0,+\infty)$，有

$$|S(x_0)-S_{n_0}(x_0)|=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n_0}\right)^{n_0}}>\frac{1}{3}.$$

(因为$\lim\limits_{n_0\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_0}\right)^{n_0}=e<3$，所以当 n_0 充分大，有$\left(1+\frac{1}{n_0}\right)^{n_0}<3$)

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$在$(0,+\infty)$非一致收敛，从而在$\mathbf{R}$也非一致收敛.

上述二例说明：函数级数在某区间上的绝对收敛与一致收敛没有任何联系，即函数级数一致收敛，而它可能在该区间上处处都是非绝对收敛，反之函数级数在某区间上绝对收敛，而它也可能在该区间上非一致收敛.

9. 证明：若函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间 I 一致收敛，则函数列$\{u_n(x)\}$在区间 I 一致收敛于 0. 反之是否成立？考虑函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 在区间$(0,1)$的情况.

证 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 一致收敛，由柯西一致收敛准则，

$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N,\forall p\in\mathbf{N},\forall x\in I$，有

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon.$$

特别是，取 $p=1$ 时，有

$$|u_{n+1}(x)|<\varepsilon,$$

即$\{u_n(x)\}$在 I 一致收敛于 0.

反之不成立，即$\{u_n(x)\}$在 I 一致收敛于 0，而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在 I 却不一定一致收敛. 例如，

函数列$\left\{\frac{x^n}{n}\right\}$在$(0,1)$一致收敛于 0. 事实上，

$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\in\mathbf{N},\forall n>N,\forall x\in(0,1)$，有

$$\left|\frac{x^n}{n}-0\right|=\frac{|x|^n}{n}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

即$\left\{\frac{x^n}{n}\right\}$在$(0,1)$一致收敛于 0. 但是，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$在$(0,1)$却非一致收敛. 事实上，(应用柯西一致收敛准则的否定叙述)

$$\exists\varepsilon_0=\frac{1}{5}>0,\forall N\in\mathbf{N},\exists m>N,\exists p_0=m\in\mathbf{N},\exists x_0=\frac{1}{\sqrt[2m]{2}}\in$$

$(0,1)$，有

$$\left|\frac{x_0^{m+1}}{m+1}+\frac{x_0^{m+2}}{m+2}+\cdots+\frac{x_0^{2m}}{2m}\right|\geqslant m\cdot\frac{x_0^{2m}}{2m}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}>\frac{1}{5}=\varepsilon_0.$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 在 $(0,1)$ 非一致收敛.

注 此题说明函数列 $\{u_n(x)\}$ 在区间 I 一致收敛于 0 是函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 一致收敛的必要条件，而非充分条件。

10. 证明：若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 有连续导数 $f'(x)$，且

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right],$$

则函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ 一致收敛于函数 $f'(x)$.

证 $\exists r\in(\beta,b)$，$\forall x\in[\alpha,\beta]$，$\exists N_1\in\mathbf{N}$，$\forall n>N_1$，有

$$x+\frac{1}{n}\in[\alpha,r].$$

$\forall n>N_1$，根据拉格朗日定理，有

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'\left(x+\frac{\theta}{n}\right),$$

其中 $0<\theta<1$. 又有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}=f'(x),$$

即函数列 $\{f_n(x)\}$ 的极限函数是 $f'(x)$. 已知 $f'(x)$ 在 $[\alpha,r]$ 连续，从而一致连续，即

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x,x+\frac{1}{n}\in[\alpha,r]$ $(n>N_1)$，当满足

$$\left|\left(x+\frac{1}{n}\right)-x\right|=\frac{1}{n}<\delta\text{，即 }n>\frac{1}{\delta}\text{ 时，}$$

有 $$|f_n(x)-f'(x)|=\left|f'\left(x+\frac{\theta}{n}\right)-f'(x)\right|<\varepsilon.$$

于是，$\forall \varepsilon>0(\exists \delta>0)$，$\exists N=\max\left\{\left[\frac{1}{\delta}\right],N_1\right\}\in \mathbf{N}$，$\forall n>N$，$\forall x\in[\alpha,\beta]$，有

$$|f_n(x)-f'(x)|<\varepsilon.$$

即$\{f_n(x)\}$在$[\alpha,\beta]$一致收敛于函数$f'(x)$.

11. 证明：若函数列$\{f_n(x)\}$在区间$I_i(i=1,2,\cdots,m)$都一致收敛，则函数列$\{f_n(x)\}$在$\bigcup_{i=1}^{m}I_i$也一致收敛.

证 设$\{f_n(x)\}$在$I_i(i=1,2,\cdots,m)$一致收敛于$F_i(x)$，令

$$f(x)=\begin{cases}F_1(x), & x\in I_1,\\ F_2(x), & x\in I_2,\\ \cdots & \cdots\\ F_m(x), & x\in I_m.\end{cases}$$

即

$\forall \varepsilon>0$，$\exists N_i\in\mathbf{N}$，$\forall n>N_i$，$\forall x\in I_i$，有

$$|f_n(x)-F_i(x)|<\varepsilon, i=1,2,\cdots,m.$$

$\exists N=\max\{N_1,N_2,\cdots,N_m\}\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，$\forall x\in\bigcup_{i=1}^{m}I_i$，有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

即$\{f_n(x)\}$在$\bigcup_{i=1}^{m}I_i$一致收敛.

12. 证明：若$\forall n\in\mathbf{N}$，$\exists a_n>0$，$\forall x\in I$(区间)，有

$$|f_{n+1}(x)-f_n(x)|<a_n,$$

且$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则函数列$\{f_n(x)\}$在区间I一致收敛.

证 已知$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，由柯西收敛准则，

$\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，$\forall p\in\mathbf{N}$，有

$$a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+p-1}<\varepsilon.$$

又由已知条件，$\forall x\in I$，则有

$$
\begin{aligned}
&|f_n(x)-f_{n+p}(x)| \\
\leqslant &|f_n(x)-f_{n+1}(x)|+|f_{n+1}(x)-f_{n+2}(x)|+\cdots \\
&\quad +|f_{n+p-1}(x)-f_{n+p}(x)| \\
\leqslant &a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+p-1}<\varepsilon,
\end{aligned}
$$

即$\{f_n(x)\}$在I一致收敛．

13．判别下列函数列在指定区间的一致收敛或非一致收敛：

(1) $f_n(x)=\dfrac{1}{x+n}$，在$(0,+\infty)$上，

解 $\forall x\in(0,+\infty)$，有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x+n}=0.$$

$$|f_n(x)-0|=\frac{1}{x+n}\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon\left(\text{取 }N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right).$$

$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]\in\mathbf{N},\forall n>N,\forall x\in(0,+\infty)$，有

$$\left|\frac{1}{x+n}-0\right|<\varepsilon,$$

即$\left\{\dfrac{1}{x+n}\right\}$在$(0,+\infty)$一致收敛．

(2) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}$，在$\mathbf{R}$上．

解 $\forall x\in\mathbf{R}$，有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}=|x|.$$

$$|f_n(x)-|x||=\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-|x|\right|=\frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|}$$

$$\leqslant\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}<\varepsilon\left(\text{取 }N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right).$$

$\forall \varepsilon>0(\varepsilon<1), \exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\in \mathbf{N}, \forall n>N, \forall x\in \mathbf{R}$，有

$$\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-|x|\right|<\varepsilon,$$

即$\left\{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right\}$在 $\mathbf{R}$ 一致收敛.

(4) $f_n(x)=\sin\frac{x}{n}$，在 $\mathbf{R}$ 上.

解 $\forall x\in \mathbf{R}$，有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{x}{n}=0.$$

$\exists \varepsilon_0=\frac{1}{2}>0, \forall N\in \mathbf{N}, \exists n_0>N, \exists x_0=n_0\frac{\pi}{2}\in \mathbf{R}$，有

$$|f_{n_0}(x)-f(x_0)|=\left|\sin\frac{n_0\frac{\pi}{2}}{n_0}\right|=\sin\frac{\pi}{2}=1>\frac{1}{2},$$

即$\left\{\sin\frac{1}{n}\right\}$在 $\mathbf{R}$ 非一致收敛.

(5) $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$，①在$[0,1-\delta]$；②在$[1-\delta,1+\delta]$；③在$[1+\delta,+\infty)$，其中 $0<\delta<1$.

解 $\forall x\in[0,+\infty)$，有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=\begin{cases}0, & x\in[0,1),\\ \frac{1}{2}, & x=1,\\ 1, & x\in(1,+\infty).\end{cases}$$

①$\forall x\in[0,1-\delta]$，有

$$\sup\{|f_n(x)-f(x)|\}=\sup\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}\leqslant(1-\delta)^n\to 0(n\to\infty).$$

根据定理 5，$\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$在$[0,1-\delta]$一致收敛；

②$\forall x\in(1,1+\delta)$，有

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{x^n}{1+x^n}-1\right|=\frac{1}{1+x^n}.$$

$\exists\, \varepsilon_0=\frac{1}{4}>0, \forall N\in\mathbf{N}, \exists\, m>N, \exists\, x_0=\sqrt[m]{2}\in(1,1+\delta)$，有

$$|f_m(x_0)-f(x_0)|=\frac{1}{1+x_0^m}=\frac{1}{3}>\frac{1}{4},$$

即$\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$在$(1,1+\delta)$，从而在$[1-\delta,1+\delta]$非一致收敛；

③ $\forall x\in[1+\delta,+\infty)$，有

$$\sup\{|f_n(x)-f(x)|\}=\sup\left\{\frac{1}{1+x^n}\right\}$$

$$\leqslant\frac{1}{1+(1+\delta)^n}\to 0(n\to\infty).$$

根据定理5，$\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$在$[1+\delta,+\infty)$一致收敛．

14. 描绘下列函数列$\{f_n(x)\}$的图象，并求其极限函数．证明函数列$\{f_n(x)\}$在$\mathbf{R}$非一致收敛：

$$f_n(x)=\begin{cases}-1, & x\leqslant-\frac{1}{n},\\ nx, & -\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n},\\ 1, & \frac{1}{n}\leqslant x.\end{cases}$$

解

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

函数$y=f_n(x)$与极限函数$y=f(x)$的图象分别是图9.a的(Ⅰ)与(Ⅱ)．

$\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\{|f_n(x)-f(x)|\}=\begin{bmatrix}\sup\limits_{0<x<\frac{1}{n}}\{|nx-1|\}\\ \sup\limits_{-\frac{1}{n}<x<0}\{|nx-(-1)|\}\end{bmatrix}=1\not\to 0(n\to\infty).$$

于是，由定理5，$\{f_n(x)\}$在$\mathbf{R}$非一致收敛．

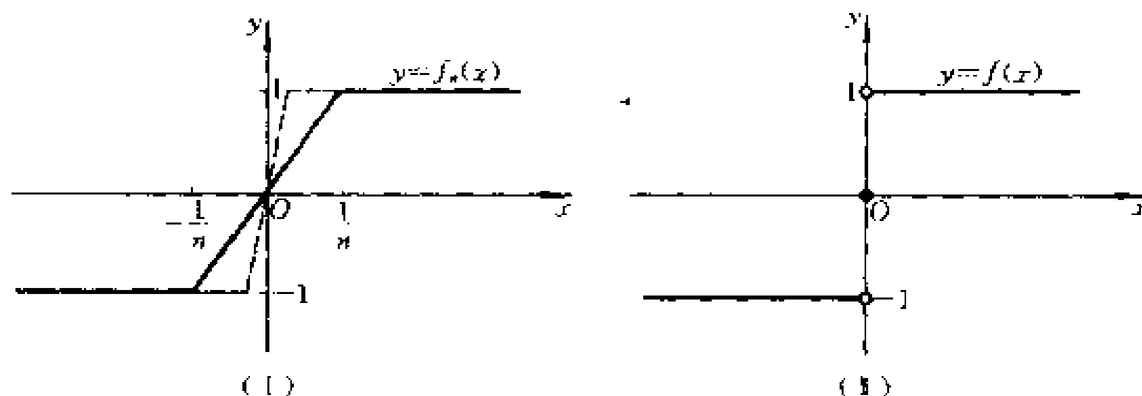


图 9.a

15. 证明：若函数 $f_0(x)$ 在 $[0,a]$ 连续，$\forall n\in\mathbf{N}$，有 $f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt$，$0\leqslant x\leqslant a$，则函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,a]$ 一致收敛于 0.

证 已知 $f_0(x)$ 在 $[0,a]$ 连续．则有界，即

$\exists M>0,\forall x\in[0,a]$，有 $|f_0(x)|\leqslant M$.

从而，
$$|f_1(x)|=\left|\int_0^x f_0(t)dt\right|\leqslant\int_0^x|f_0(t)|dt\leqslant M\frac{x}{1!},$$
$$|f_2(x)|=\left|\int_0^x f_1(t)dt\right|\leqslant\int_0^x|f_1(t)|dt\leqslant M\frac{x^2}{2!},$$
$$\cdots\qquad\cdots$$
$$|f_n(x)|=\left|\int_0^x f_{n-1}(t)dt\right|\leqslant\int_0^x|f_{n-1}(t)|dt\leqslant M\frac{x^n}{n!},$$
$$\cdots\qquad\cdots$$

$\forall x\in[0,a]$，有 $\quad |f_n(x)-0|\leqslant M\dfrac{a^n}{n!}$.

已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n!}$ 收敛，则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,a]$ 一致收敛于 0.

* * * *

16. 证明：函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{x}{n}\right)$ 在区间 $[-a,a]\ (a>0)$ ··

致收敛，在 **R** 非一致收敛．

证 $\forall x\in[-a,a]$，有

$$\left|1-\cos\frac{x}{n}\right|=2\sin^2\frac{x}{2n}\leqslant 2\frac{|x|^2}{4n^2}\leqslant\frac{a^2}{2n^2}.$$

已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^2}{2n^2}$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$ 在 $[-a,a]$ 一致收敛．

证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$ 在 **R** 非一致收敛，由第 9 题，只须证明函数列 $\left\{\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)\right\}$ 在 **R** 非一致收敛于 0（$\forall x\in\mathbf{R}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)=0$）．

$\exists\varepsilon_0=1>0$，$\forall N\in\mathbf{N}$，$\exists n_0>N$，$\exists x_0=n_0\pi\in\mathbf{R}$，有

$$\left|1-\cos\frac{x_0}{n_0}\right|=|1-\cos\pi|=2>1.$$

即 $\left\{\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)\right\}$ 在 **R** 非一致收敛于 0．于是，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$ 在 **R** 非一致收敛．

17．证明：若 $f_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{k}{n}\right)$，其中函数 $f(x)$ 在 **R** 连续，则函数列 $\{f_n(x)\}$ 在任意区间 $[a,b]$ 都一致收敛．

证 已知 $f(x)$ 在 $[a,b+1]$ 连续，从而可积，且有界，即

$$\exists M>0,\forall x\in[a,b+1],\text{有 }|f(x)|\leqslant M.$$

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{k}{n}\right)=\frac{f(x)}{n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{k}{n}\right).$$

其中 $\forall x\in[a,b]$，有 $\left|\frac{f(x)}{n}\right|\leqslant\frac{M}{n}\to 0(n\to\infty)$，即

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbf{N}$，$\forall n>N_1$，$\forall x\in[a,b]$，有

$$\left|\frac{f(x)}{n}\right|<\varepsilon.$$

和数 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{k}{n}\right)$ 是 $f(t)$ 在 $[x,x+1]$ 上，将 $[x,x+1]$ 作 n 等

分，取 ξ_k 是 $\left[x+\frac{k-1}{n},x+\frac{k}{n}\right]$ 的右端点，即 $\xi_k=x+\frac{k}{n}$ 的特殊积分和，因为 $f(t)$ 在 $[x,x+1]$ 可积，所以极限函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(x)}{n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{k}{n}\right)\right]$$

$$=\int_x^{x+1}f(t)dt.$$

已知 $f(t)$ 在 $[a,b+1]$ 一致连续，即

对上述的 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall t_1,t_2\in[a,b+1]$：$|t_1-t_2|<\delta$，有

$$|f(t_1)-f(t_2)|<\varepsilon.$$

$\exists N_2=\left[\frac{1}{\delta}\right]\in\mathbf{N}$，$\forall n>N_2$，$\forall x\in[a,b]$，$t\in\left[x+\frac{k-1}{n},x+\frac{k}{n}\right]$，有 $\left|t-\left(x+\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{1}{n}<\delta$，从而

$$\left|f(t)-f\left(x+\frac{k}{n}\right)\right|<\varepsilon,\qquad k=1,2,\cdots,n.$$

$\exists N=\max\{N_1,N_2\}\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，$\forall x\in[a,b]$，有

$$|f(x)-f_n(x)|=\left|\int_x^{x+1}f(t)dt-\frac{f(x)}{n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{k}{n}\right)\right|$$

$$\leqslant\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x+\frac{k-1}{n}}^{x+\frac{k}{n}}f(t)dt-\sum_{k=1}^{n}\int_{x+\frac{k-1}{n}}^{x+\frac{k}{n}}f\left(x+\frac{k}{n}\right)dt\right|+\left|\frac{f(x)}{n}\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{x+\frac{k-1}{n}}^{x+\frac{k}{n}}\left|f(t)-f\left(x+\frac{k}{n}\right)\right|dt+\left|\frac{f(x)}{n}\right|$$

$$<\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}+\varepsilon=\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,$$

即 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛.

18. 证明：若函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 一致收敛于 $f(x)$，而每个函数 $f_n(x)$ 在区间 I 有界，则函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 一致有界.

证 已知 $\{f_n(x)\}$ 在 I 一致收敛于 $f(x)$，则

$\exists 1>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，$\forall x\in I$，有

$$|f_n(x)-f(x)|<1\quad 或\quad |f_n(x)|<|f(x)|+1.$$

取定某个 $n_0>N$，有
$$|f_{n_0}(x)-f(x)|<1 \quad 或 \quad |f(x)|<|f_{n_0}(x)|+1.$$
已知 $f_{n_0}(x)$ 在 I 有界，即 $\exists L>0, \forall x\in I$，有 $|f_{n_0}(x)|<L$. 从而，$\forall x\in I$，有 $|f(x)|\leqslant|f_{n_0}(x)|+1<L+1$，于是

$\forall n>N, \forall x\in I$，有
$$|f_n(x)|<|f(x)|+1<L+2.$$
又已知 $f_k(x)$ 在 I 有界 $(k=1,2,\cdots,N)$，即
$$\exists M_k>0, \forall x\in I, 有 |f_k(x)|\leqslant M_k, k=1,2,\cdots,N.$$
于是，$\exists M=\max\{M_1,M_2,\cdots,M_N,L+2\}, \forall n\in\mathbf{N}, \forall x\in I$，有
$$|f_n(x)|\leqslant M,$$
即 $\{f_n(x)\}$ 在 I 一致有界.

19. 证明：若 $\forall n\in\mathbf{N}$，函数 $\varphi_n(x)$ 在 $[a,b]$ 单调，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(a)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(b)$ 都绝对收敛，则函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛.

证 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(a)|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(b)|$ 都收敛，从而
$$\sum_{n=1}^{\infty}(|\varphi_n(a)|+|\varphi_n(b)|)$$
也收敛. 已知 $\forall n\in\mathbf{N}$，$\varphi_n(x)$ 在 $[a,b]$ 单调，则 $\forall n\in\mathbf{N}, \forall x\in[a,b]$，有
$$|\varphi_n(x)|\leqslant\max\{|\varphi_n(a)|,|\varphi_n(b)|\}\leqslant|\varphi_n(a)|+|\varphi_n(b)|.$$
根据 M-判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛.

20. 证明：若连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛于 $f(x)$，$\forall n\in\mathbf{N}$，$x_n\in[a,b]$，且 $x_n\to x(n\to\infty)$，则
$$\lim_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x).$$

证 $\forall n\in\mathbf{N}, x_n\in[a,b]$，当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to x\in[a,b]$.

已知 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛于 $f(x)$，即

$\forall\varepsilon>0, \exists N_1\in\mathbf{N}, \forall n>N_1, x_n\in[a,b]$，有

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| < \varepsilon.$$

根据定理 6′，极限函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，从而 $f(x)$ 在点 $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\in[a,b]$ 也连续，即

对上述 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，从而 $\exists N_2\in\mathbf{N}$，$\forall n>N_2$，$|x_n-x|<\delta$，有

$$|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon.$$

于是，$\exists N=\max\{N_1,N_2\}\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，有

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| < 2\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x).$$

21. 证明：若 $f_1(x)=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$\forall n\in\mathbf{N}$，$f_{n+1}(x)=f[f_n(x)]$，则函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $\mathbf{R}$ 一致收敛于 0.

证 由练习题 1.3 第 10 题，

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}},$$

$\forall x\in\mathbf{R}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}} = 0.$

$$|f_n(x) - 0| = \left|\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon\left(\text{取 } N = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]\right).$$

于是，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right]\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，$\forall x\in\mathbf{R}$，有

$$|f_n(x) - 0| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon,$$

即 $\{f_n(x)\}$ 在 $\mathbf{R}$ 一致收敛于 0.

练习题 9.2(二)

（《讲义》下册，第 72 页）

1. 证明：函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}e^{-\frac{x^2}{n^2}}$ 在 $[0,+\infty)$ 连续.

证 $\forall x\in[0,+\infty)$，有

$$0 < e^{-\frac{x^2}{n^2}} \leqslant 1，从而\ 0 < \frac{1}{n^2}e^{-\frac{x^2}{n^2}} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}e^{-\frac{x^2}{n^2}}$ 在$[0,+\infty)$一致收敛，且函数级数的每一项在$[0,+\infty)$连续．根据定理 6，和函数 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$连续．

3. 设函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2$，求$\lim_{x\to 1} f(x)$．

解 限定在点 1 的邻域内．设 $x\in(0,2)$．

$\forall n\in \mathbf{N}, \forall x\in(0,2)$，从而$|x|<2$，有

$$\left|\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2\right| \leqslant \frac{|x|^n}{3^n} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

当 $n=0$ 时，上式也成立．已知 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛，则 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2$ 在$(0,2)$一致收敛．而函数级数的每一项在$(0,2)$都连续．根据定理 6，和函数 $f(x)$ 在$(0,2)$连续，从而 $f(x)$ 在点 1 连续，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to 1} \frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

5. 证明：函数列 $f_n(x)=\frac{nx}{nx+1}$ 在$[0,1]$非一致收敛，却有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

这说明了什么？

证 $\forall x\in[0,1]$，有

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{nx+1} = \begin{cases} 0, & x=0, \\ 1, & x\in(0,1]. \end{cases}$$

$\exists \varepsilon_0=\frac{1}{3}>0, \forall N\in\mathbf{N}, \exists n_0>N, \exists x_0=\frac{1}{n_0}\in(0,1]$，有

$$|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)| = \frac{1}{n_0x_0+1} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \varepsilon_0,$$

即$\left\{\frac{nx}{nx+1}\right\}$在$(0,1]$非一致收敛，从而在$[0,1]$也非一致收敛.

却有
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{nx+1}dx$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n}\ln(n+1)\right]=1,$$
$$\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx=\int_0^1\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{nx+1}dx$$
$$=\int_0^1 dx=1,$$
即
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx.$$

说明：函数列$\{f_n(x)\}$的一致收敛仅是积分号下取极限的充分条件，不是必要条件.

7. 设 $h(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n^4x^2}$，求 $h'(x)$.

解 显然，$\forall x\in\mathbf{R}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n^4x^2}$都收敛.

$\forall n\in\mathbf{N}$，$\left(\frac{1}{n^3+n^4x^2}\right)'=\frac{-2x}{n^2(1+nx^2)^2}$在$\mathbf{R}$连续.

$\forall x\in\mathbf{R}$，且$x\neq 0$，有
$$\left|\left(\frac{1}{n^3+n^4x^2}\right)'\right|=\left|\frac{-2x}{n^2(1+nx^2)^2}\right|\leqslant\frac{2|x|}{n^2(1+nx^2)}$$
$$\leqslant\frac{2|x|}{n^2\cdot 2\sqrt{n}\,|x|}=\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}.$$
(因为$1-2\sqrt{n}\,|x|+nx^2=(1-\sqrt{n}\,|x|)^2\geqslant 0$或$1+nx^2\geqslant 2\sqrt{n}\,|x|$)

当$x=0$时，上述不等式也成立. 已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3+n^4x^2}\right)'$在$\mathbf{R}$一致收敛.

根据定理8，有

$$h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3+n^4x^2}\right)' = -2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(1+nx^2)^2}.$$

8. 证明：$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}$在 **R** 有连续的二阶导数，并求 $f''(x)$.

证 $\forall x\in\mathbf{R}$,有

$$\left|\frac{\sin nx}{n^4}\right|\leqslant\frac{1}{n^4},$$

$$\left|\left(\frac{\sin nx}{n^4}\right)'\right| = \left|\frac{\cos nx}{n^3}\right|\leqslant\frac{1}{n^3},$$

$$\left|\left(\frac{\sin nx}{n^4}\right)''\right| = \left|\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)'\right| = \left|\frac{-\sin nx}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}.$$

已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 都收敛．从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}\text{ 与 }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\sin nx}{n^2}$$

在 **R** 都一致收敛，且

$$\left(\frac{\sin nx}{n^4}\right)' = \frac{\cos nx}{n^3}\quad\text{与}\quad\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)' = \frac{-\sin nx}{n^2}$$

在 **R** 都连续。根据定理 8，有

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nx}{n^4}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3},$$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nx}{n^4}\right)'' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}.$$

9. 证明：若函数列$\{f_n(x)\}$在 **R** 一致收敛于极限函数 $f(x)$，且 $\forall n\in\mathbf{N}$，函数 $f_n(x)$在 **R** 一致连续，则函数 $f(x)$在 **R** 也一致连续．

证 已知$\{f_n(x)\}$在 **R** 一致收敛于 $f(x)$，即

$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N,\forall x\in\mathbf{R}$，有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

取定 $m>N$，$\forall x\in\mathbf{R}$，有 $|f_m(x)-f(x)|<\varepsilon$.

又已知 $f_m(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 一致连续，即

对上述的 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$：$|x_1-x_2|<\delta$，有

$$|f_m(x_1)-f_m(x_2)|<\varepsilon.$$

同时也有 $\quad |f_m(x_1)-f(x_1)|<\varepsilon$ 与 $|f_m(x_2)-f(x_2)|<\varepsilon.$

于是

$$|f(x_1)-f(x_2)|$$
$$\leqslant|f(x_1)-f_m(x_1)|+|f_m(x_1)-f_m(x_2)|+|f_m(x_2)-f(x_2)|<3\varepsilon,$$

即极限函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 一致连续．

10. 证明：若函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在开区间 (a,b) 一致收敛于和函数 $S(x)$，且 $\forall n\in\mathbf{N}$，函数 $u_n(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，则和函数 $S(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续．

证 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的部分和 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 (a,b) 一致收敛，由柯西一致收敛准则，

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，$\forall p\in\mathbf{N}$，$\forall x\in(a,b)$，有

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon.$$

已知 $\forall n>N$，$S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$\forall p\in\mathbf{N}$，有

$$\lim_{x\to a^+}|S_{n+p}(x)-S_n(x)|=|S_{n+p}(a)-S_n(a)|\leqslant\varepsilon$$

与

$$\lim_{x\to b^-}|S_{n+p}(x)-S_n(x)|=|S_{n+p}(b)-S_n(b)|\leqslant\varepsilon.$$

令 $S(a)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(a)$ 与 $S(b)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(b)$，于是

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，$\forall p\in\mathbf{N}$，$\forall x\in[a,b]$，有

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|\leqslant\varepsilon,$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛于和函数 $S(x)$. 根据定理 6，和函数 $S(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续．

*　　*　　*　　*

11. 证明：若函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛于和函数

$S(x)$，且$\forall n\in\mathbf{N}$，函数$u_n(x)$在$[a,b]$可积，则和函数$S(x)$在$[a,b]$也可积．

证 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的部分和$S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$．已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$一致收敛于$S(x)$，即

$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N,\forall x\in[a,b]$，有

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon.$$

取定某个$m>N$，$\forall x\in[a,b]$，有

$$|S_m(x)-S(x)|<\varepsilon\quad\text{或}\quad S_m(x)-\varepsilon<S(x)<S_m(x)+\varepsilon.$$

任给$[a,b]$分法T：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b.$$

设m_k与M_k分别是$S_m(x)$在$[x_{k-1},x_k]$的下确界与上确界$\forall x\in[x_{k-1},x_k]$，有

$$m_k-\varepsilon<S(x)<M_k+\varepsilon,\quad k=1,2,\cdots,n.$$

设σ_k与ω_k分别是$S(x)$与$S_m(x)$在$[x_{k-1},x_k]$的振幅，有

$$\sigma_k\leqslant M_k-m_k+2\varepsilon=\omega_k+2\varepsilon,\quad k=1,2,\cdots,n,$$

其中$\omega_k=M_k-m_k$是$S_m(x)$在$[x_{k-1},x_k]$的振幅．于是

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma_k\Delta x_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k+2\varepsilon(b-a).$$

已知$S_m(x)$在$[a,b]$可积，有$\lim\limits_{l(T)\to0}\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k=0$，即

对上述$\varepsilon>0$，$\exists\delta>0,\forall T:l(T)<\delta$，有$\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon$．从而

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma_k\Delta x_k<\varepsilon+2\varepsilon(b-a)=[1+2(b-a)]\varepsilon,$$

即和函数$S(x)$在$[a,b]$可积．

12．证明：若函数列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$满足定理$8'$的条件，则函数列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$一致收敛．

注 定理$8'$的条件：1）$\forall x\in[a,b]$，有$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$；2）$\forall n\in\mathbf{N}$，$f_n'(x)$有连续导函数；3）$\{f_n'(x)\}$在$[a,b]$一致收敛．

证 任意取定一点 $x_0\in[a,b]$，已知数列 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛于 $f(x_0)$，函数列 $\{f_n'(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛，即

$\forall\varepsilon>0,\exists N$(公共的)$\in\mathbf{N},\forall n>N,\forall p\in\mathbf{N},\forall x\in[a,b]$，同时有

与
$$|f_{n+p}'(x)-f_n'(x)|<\varepsilon,$$
$$|f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)|<\varepsilon.$$

根据拉格朗日定理，$\forall x\in[a,b]$，由上述不等式，有

$$|[f_{n+p}(x)-f_n(x)]-[f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)]|$$
$$=|f_{n+p}'(\xi)-f_n'(\xi)|\,|x-x_0|<\varepsilon(b-a),\quad \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}.$$

于是，$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N,\forall p\in\mathbf{N},\forall x\in[a,b]$，有

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|$$
$$=|[f_{n+p}(x)-f_n(x)]-[f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)]+[f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)]|$$
$$\leqslant|[f_{n+p}(x)-f_n(x)]-[f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)]|+|f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)|$$
$$<\varepsilon(b-a)+\varepsilon=(1+b-a)\varepsilon,$$

即 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛．

13．证明：若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 有任意阶导函数，且函数列 $\{f^{(n)}(x)\}$ 在 $\mathbf{R}$ 一致收敛于函数 $\varphi(x)$，则

$$\varphi(x)=ce^x,$$

其中 c 是常数．

证 已知 $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $\varphi(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f^{(n)}(x)$.

又函数列 $\{f^{(n)}(x)\}$ 在 $\mathbf{R}$ 满足定理 8′ 的条件，$\forall x\in\mathbf{R}$，有

$$\varphi'(x)=\lim_{n\to\infty}f^{(n+1)}(x)=\varphi(x),$$

即 $\forall x\in\mathbf{R},\varphi'(x)=\varphi(x)$. 设 $F(x)=\varphi(x)e^{-x},\forall x\in\mathbf{R}$，有

$$F'(x)=\varphi'(x)e^{-x}-\varphi(x)e^{-x}=[\varphi'(x)-\varphi(x)]e^{-x}=0.$$

从而，$\forall x\in\mathbf{R},F(x)=c$(常数)，即

$$\varphi(x)e^{-x}=c\quad \text{或}\quad \varphi(x)=ce^x.$$

14．验证：

(1) $$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos m!\,\pi x)^{2n}=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}.\end{cases}$$

(2) $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin^2 m!\,\pi x\cos^{2n}m!\,\pi x=\begin{cases}0, & x\in\mathbf{Q},\\ 1, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}.\end{cases}$

证 (1) 当 x 是有理数时，即 $x\in\mathbf{Q}$，设 $x=\dfrac{p}{q}$，其中 $q\in\mathbf{N}$，$p\in\mathbf{Z}$. 当 $m\geqslant q$ 时，则 $m!\dfrac{p}{q}$ 是整数，设 $m!\dfrac{p}{q}=k$(整数)，有

$$(\cos m!\,x\pi)^{2n}=(\cos k\pi)^{2n}=1.$$

于是，
$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos m!\,\pi x)^{2n}=1.$$

当 x 是无理数时，即 $x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$，则 $m!\,x$ 总是无理数(而不是整数)，有

$$|\cos m!\,x\pi|<1.$$

于是，
$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos m!\,\pi x)^{2n}=0.$$

(2) 当 x 是有理数时，即 $x\in\mathbf{Q}$，设 $x=\dfrac{p}{q}$，其中 $q\in\mathbf{N}$，$p\in\mathbf{Z}$. 当 $m\geqslant q$ 时，则 $m!\dfrac{p}{q}$ 是整数，设 $m!\dfrac{p}{q}=k$(整数). $\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$\sin^2 m!\,x\pi\cos^{2n}m!\,x\pi=\sin^2 k\pi\cos^{2n}k\pi=0.$$

于是，
$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sin^2 m!\,\pi x\cos^{2n}m!\,\pi x=0.$$

当 x 是无理数时，即 $x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$，则 $m!\,x$ 总是无理数(而不是整数)，有

$$|\cos m!\,x\pi|<1.$$

从而，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos^{2n}m!\,\pi x$ 收敛，且

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos^{2n}m!\,\pi x=\frac{1}{1-\cos^2 m!\,\pi x}=\frac{1}{\sin^2 m!\,\pi x}.$$

于是，
$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sin^2 m!\,\pi x\cos^{2n}m!\,\pi x$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sin^2 m!\,\pi x\sum_{n=0}^{\infty}\cos^{2n}m!\,\pi x=1.$$

注 (1) 表明：狄利克莱函数 $D(x)$ 也可用带有极限运算的解析式表示出来.

练习题 9.3

（《讲义》下册，第 103 页）

1. 求下列幂级数的收敛半径和收敛区间：

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

解 讨论正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right|$. 根据§9.1 定理 8（达朗贝尔判别法）.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big/\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right|=|x|^2<1,$$

即 $|x|<1$ 时幂级数收敛. 收敛半径 $r=1$，当 $x=\pm1$ 时，级数 $\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 发散. 于是，收敛区间是 $(-1,1)$.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$.

解 $a_n=\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{n+1}}\Big/\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}\right|=\frac{1}{2}.$$

收敛半径 $r=2$，$|x-2|<2$ 或 $0<x<4$. 当 $x=0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ 收敛，当 $x=4$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 发散. 于是收敛区间是 $[0,4)$.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$.

解 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(n+1)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}\right)=1.$$

收敛半径 $r=1$，当 $x=\pm 1$ 时，级数的一般项 $\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(\pm 1)^n$ 不趋于 0. 于是收敛区间是 $(-1,1)$.

2. 求下列函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 与定积分 $\int_0^x f(t)dt$，并给出收敛区间：

(1) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}x^{2n}$.

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+2}{3^{n+1}}x^{2n+2}\Big/\frac{n+1}{3^n}x^{2n}\right|=\frac{|x|^2}{3}<1$,

即 $|x|<\sqrt{3}$. 收敛半径 $r=\sqrt{3}$，收敛区间是 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

$\forall x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$，有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3^n}x^{2n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(n+1)}{3^n}x^{2n-1}.$$

$$\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{n+1}{3^n}t^{2n}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(2n+1)\cdot 3^n}x^{2n+1}.$$

它们的收敛区间都是 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

(3) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n^2}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n$, $a>0,b>0$.

解 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n}{n^2}+\frac{b^n}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2}\sqrt[n]{a^n+b^n}$,

已知 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，由练习题 2.2 第 12 题，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\max\{a,b\}.$$

从而，
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n}{n^2}+\frac{b^n}{n^2}}=\max\{a,b\}.$$

于是，收敛半径 $r=\min\left\{\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right\}$. 当 $x=\pm\frac{1}{a}(a\geqslant b)$ 或 $x=\pm\frac{1}{b}(b\geqslant$

a)时，不难证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n^2}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n$ 都收敛．于是，收敛区间是 $[-r,r]$.

$\forall x\in[-r,r]$，有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n}\right)x^{n-1}.$$

$$\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n+b^n}{n^2(n+1)}x^{n+1}.$$

不难证明，前者的收敛区间是 $[-r,r)$，后者的收敛区间是 $[-r,r]$.

3. 求下列级数的和：

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

解 它的收敛区间是 $(-1,1)$. $\forall x\in(-1,1)$，设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},$$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2}.$$

已知 $f(0)=0$. 于是，$\forall x\in(-1,1)$，有

$$f(x)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

解 它的收敛区间是 $[-1,1]$. $\forall x\in[-1,1]$，设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}.$$

首先讨论 $x\in(-1,1)$. 用 x 乘等式两端各项，有

$$xf(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

$$[xf(x)]' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

$$[xf(x)]'' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

已知 $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n+1}$，又已知 $f(0)=0$. $\forall x\in(-1,1)$，有

$$\int_0^x [tf(t)]''dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t}$$

或 $[tf(t)]'\Big|_0^x = -\ln(1-x)$，即 $[xf(x)]' = -\ln(1-x)$.

$\forall x\in(-1,1)$，又有

$$\int_0^x [tf(t)]'dt = -\int_0^x \ln(1-t)dt$$

或 $$tf(t)\Big|_0^x = (1-x)\ln(1-x)+x,$$

即 $$xf(x) = (1-x)\ln(1-x)+x.$$

从而，当 $x\neq 0$ 时， $f(x)=1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x)$；

当 $x=1$ 时，直接得 $f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$（见练习题 9.1（一）第 1 题的（1））；

当 $x=-1$ 时，根据定理 5 的推论，有

$$f(-1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)} = \lim_{x\to -1^+} f(x)$$

$$= \lim_{x\to -1^+}\left[1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x)\right] = 1-2\ln 2.$$

于是，

$$f(x) = \begin{cases} 1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x), & \text{当 } x\in[-1,1)\text{，且 } x\neq 0, \\ 1, & \text{当 } x=1, \\ 0, & \text{当 } x=0. \end{cases}$$

4. 将下列函数展成马克劳林级数（可用已知的展开公式）：

(1) $a^x(a>0)$.

解 $$a^x=e^{x\ln a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n.$$

(3) $\sqrt[3]{1-x}$.

解 $$\sqrt[3]{1-x}=(1-x)^{\frac{1}{3}}$$

$$=1-\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2-\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3+\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}x^n+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{3}x-\frac{1\cdot 2}{2!\ 3^2}x^2-\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3!\ 3^3}x^3-\cdots$$

$$-\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdots(3n-4)}{n!\ 3^n}x^n-\cdots,\quad (n\geqslant 2)\ |x|<1.$$

(5) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

解 $$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-x)^n}{n}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

(7) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$.

解 函数$\dfrac{e^x-1}{x}$在 0 没有意义，却有极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1.$$

将函数$\dfrac{e^x-1}{x}$在 0 连续开拓．令$\left.\dfrac{e^x-1}{x}\right|_{x=0}=1$.

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}.$$

于是，$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{d}{dx}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n-1}}{n!}\right)'$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)x^{n-2}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!},\ x\in\mathbf{R}.$$

5. 应用级数乘积，将下列函数展成马克劳林级数：

(1) $(1+x)e^{-x}$.

解 $(1+x)e^{-x}=(1+x)\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n!}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{(n-1)!}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n-1)!}\right)x^n$$

$$=1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n!}x^n.\quad x\in\mathbf{R}.$$

(3) $e^x\sin x$.

解 设 $f(x)=\sin x$. 已知 $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$, $f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}$.

从而，
$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n!}x^n.$$

已知 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. 于是，由柯西乘积，有

$$e^x\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n!}x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{0!n!}+\frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{2}}{1!(n-1)!}+\cdots+\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{(n-1)!1!}\right]x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\frac{(n-k)\pi}{2}}{k!(n-k)!}\right]x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{k!(n-k)!}\sin\frac{(n-k)\pi}{2}\right)\frac{x^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\sin\frac{(n-k)\pi}{2}\right)\frac{x^n}{n!}.$$

下面证明：$\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\sin\frac{(n-k)\pi}{2}=2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$.

事实上，一方面，由三角公式和棣莫佛公式，有

$$\left[1+\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^n=\left(2\cos^2\frac{\pi}{4}+2i\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\right)^n$$

$$=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right);$$

另一方面，由二项式公式和棣莫佛公式，有

$$\left[1+\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^n=C_n^0\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^n+\cdots$$

$$+C_n^{n-2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^2+C_n^{n-1}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)+C_n^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos\frac{(n-k)\pi}{2}+i\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\sin\frac{(n-k)\pi}{2}.$$

以上两个等式的等号右端的虚部应该相等，即

$$\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\sin\frac{(n-k)\pi}{2}=2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

于是，
$$e^x\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\cdot\frac{x^n}{n!},\quad x\in\mathbf{R}.$$

6. 证明：幂级数 $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$ 满足微分方程

$$xy''+y'+xy=0.$$

解
$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}}x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{[(2n)!!]^2} x^{2n}.$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[(2n)!!]^2} 2n x^{2n-1}.$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[(2n)!!]^2} 2n(2n-1) x^{2n-2}.$$

$$xy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[(2n)!!]^2} x^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[2(n-1)!!]^2} x^{2n-1}.$$

于是，$xy'' + y' + xy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[(2n)!!]^2} 2n(2n-1) x^{2n-1}$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[(2n)!!]^2} 2n x^{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[2(n-1)!!]^2} x^{2n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[(2n)!!]^2} [2n(2n-1) + 2n - (2n)^2] x^{2n-1} = 0.$$

（因为$\forall n \in \mathbf{N}$，有 $2n(2n-1)+2n-(2n)^2=0$.）

7. 证明：$\forall x, y \in \mathbf{R}$，有

(1) $S(x+y)=S(x)C(y)+C(x)S(y)$.

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{S(x)}{x}=1$.

证 $\forall x, y \in \mathbf{R}$，已知

$$S(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots.$$

$$C(y) = \frac{1}{0!} - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots.$$

$$S(x)C(y) = x - \left(\frac{x^3}{3!0!} + \frac{xy^2}{2!1!}\right)$$

$$+ \left(\frac{x^5}{5!0!} + \frac{x^3y^2}{3!2!} + \frac{xy^4}{1!4!}\right) - \cdots.$$

同样 $C(x)S(y) = y - \left(\frac{y^3}{0!3!} + \frac{x^2y}{1!2!}\right)$

$$+\left(\frac{y^5}{0!5!}+\frac{x^2y^3}{2!3!}+\frac{x^4y}{4!1!}\right)-\cdots.$$

于是， $S(x)C(y)+C(x)S(y)$

$$=(x+y)-\left(\frac{x^3}{3!0!}+\frac{xy^2}{2!1!}+\frac{x^2y}{1!2!}+\frac{y^3}{0!3!}\right)$$

$$+\left(\frac{x^5}{5!0!}+\frac{x^4y}{4!1!}+\frac{x^3y^2}{3!2!}+\frac{x^2y^3}{2!3!}+\frac{xy^4}{1!4!}+\frac{y^5}{0!5!}\right)-\cdots$$

$$=(x+y)-\frac{1}{3!}(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)$$

$$+\frac{1}{5!}(x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5)-\cdots$$

$$=(x+y)-\frac{(x+y)^3}{3!}+\frac{(x+y)^5}{5!}-\cdots$$

$$=S(x+y).$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{S(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\lim_{x\to0}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}=1.$$

*　　*　　*　　*

11. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$，$0\leqslant x\leqslant1$. 证明：$\forall x\in(0,1)$，有

(1) $f(x)+f(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x)=C$（常数）.

(2) $C=f(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

证 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 的收敛区间是$[-1,1]$.

$0\leqslant x\leqslant1\Longleftrightarrow0\leqslant1-x\leqslant1$. $\forall x\in(0,1)$有

$$f(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{n^2},$$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}\quad 与\quad f'(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}.$$

已知 $\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

$$\ln x=\ln[1-(1-x)]=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{n}.$$

有 $[f(x)+f(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x)]'$

$$=f'(x)-f'(1-x)+\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln x}{1-x}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}=0,$$

于是,$\forall x\in(0,1)$,有

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x)=C(常数).$$

(2) 因为 $f(x)$ 与 $f(1-x)$ 在 0 右连续,$f(0)=0$,所以对上述等式等号两端取极限,有

$$\lim_{x\to 0^+}[f(x)+f(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x)]=f(0)+f(1)=f(1).$$

$$=f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=C,$$

即
$$C=f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

12. 证明:若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $|x|<r$,且 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$ 收敛,则

$$\int_0^r f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}.$$

证 已知 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$ 收敛,由 §9.2 例 8,$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 在 $[0,r]$ 一致收敛,从而

$$\lim_{x\to r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\lim_{x\to r}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}.$$

$\forall x\in(0,r)$,有

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

于是，
$$\int_0^r f(x)dx = \lim_{x\to r^-}\int_0^x f(t)dt = \lim_{x\to r^-}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}.$$

13. 证明：若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$，$a_n\geqslant 0$，收敛半径 $r=1$，且 $\lim_{x\to 1}f(x)=s$，则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=s$.

证 设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 的部分和是 $S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$. $\forall n\in\mathbf{N},\forall x\in[0,1)$，有
$$S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k=\lim_{x\to 1}\sum_{k=0}^{n}a_k x^k\leqslant\lim_{x\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$
$$=\lim_{x\to 1}f(x)=s.$$

即数列$\{S_n\}$有上界（s 就是它的一个上界）. 于是，正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛，即幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在 $x=1$ 收敛. 由 §9.2 例 8，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在 $[0,1]$一致收敛. 于是
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\lim_{x\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\lim_{x\to 1}f(x)=s.$$

14. 证明：若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径是 R，存在某个数列 $\{x_n\}$，$x_n\in(-R,R)$，($\forall m\in\mathbf{N}$，$\exists n>m$，有 $x_n\neq 0$)使 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$，且 $f(x_n)=0$，$n=0,1,2,\cdots$，则 $a_n=0$，$n=0,1,2,\cdots$.

证 已知函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在$(-R,R)$存在任意阶导函数，且
$$a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!},k=0,1,2,\cdots.$$

因为$\{x_n\}$总存在严格单调的子数列，所以不妨设$\{x_n\}$就是严格单调增加数列，即$\forall n\in\mathbf{N}$，有$x_n<x_{n+1}$.

已知$f(x)$在点0连续，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(0).$$

因为$f(x_n)=0$，所以$f(0)=0$，即$a_0=0$.

$\forall n\in\mathbf{N}$，函数$f(x)$在$[x_n,x_{n+1}]$满足洛尔定理的条件．根据洛尔定理，存在严格单调增加数列$\{x_n^{(1)}\}(n=1,2,\cdots.)$，$x_n^{(1)}\in(x_n,x_{n+1}')$，使

$$f'(x_n^{(1)})=0,\quad n=1,2,\cdots.$$

已知$f'(x)$在点0连续，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{(1)}=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}f'(x_n^{(1)})=f'(0).$$

因为$f'(x_n^{(1)})=0$，所以$f'(0)=0$，则$a_1=0$.

应用数学归纳法不难证明，$\forall k\in\mathbf{N}$，存在严格单调增加数列$\{x_n^{(k)}\}$，使

$$f^{(k)}(x_n^{(k)})=0,\quad n=1,2,\cdots.$$

已知$f^{(k)}(x)$在点0连续，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{(k)}=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}f^{(k)}(x_n^{(k)})=f^{(k)}(0).$$

因为$f^{(k)}(x_n^{(k)})=0$，所以$f^{(k)}(0)=0$，即$a_k=0$. 于是

$$a_n=0,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

练习题　9.4

（《讲义》下册，第127页）

1. 将下列函数在指定的区间展成傅立叶级数，并画出和函数图象：

(2)　$f(x)=\begin{cases}\pi+x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ \pi-x, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$

解 $a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(\pi + x)dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)dx\right) = \pi.$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(\pi + x)\cos nx dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\cos nx dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} x\cos nx dx - \int_{0}^{\pi} x\cos nx dx\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx dx = -\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1]$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{n^2\pi}, & n \text{ 为奇数}, \\ 0, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(\pi + x)\sin nx dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\sin nx dx\right) = 0.$$

于是 $f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, |x| \leqslant \pi.$

和函数的图象如图 9. b.

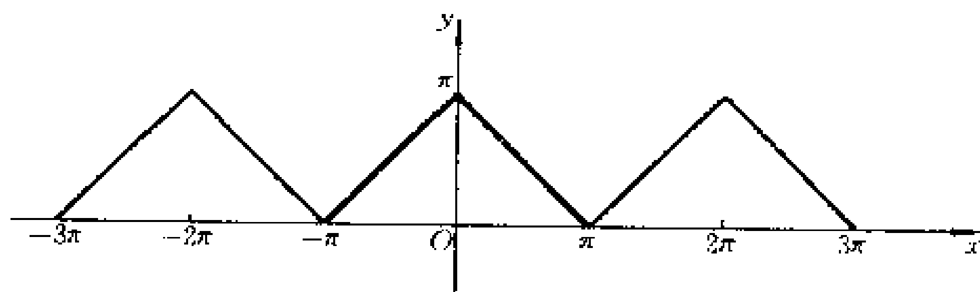


图 9. b

(4) $f(x) = |\cos x|, 0 \leqslant x < 2\pi.$

解 $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}|\cos x|dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos x|dx$

$$= \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = \frac{4}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\cos x|\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\cos x|\cos nx dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(n+1)x + \cos(n-1)x]dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n-1)x}{n-1}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{2}}{n+1} + \frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{2}}{n-1}\right]$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k+1, \\ \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^k}{2k+1} + \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\right] = (-1)^{k+1}\frac{4}{(4k^2-1)\pi}, & n = 2k. \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\cos x|\sin nx dx = 0.$$

于是

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

和函数的图象如图 9.c.

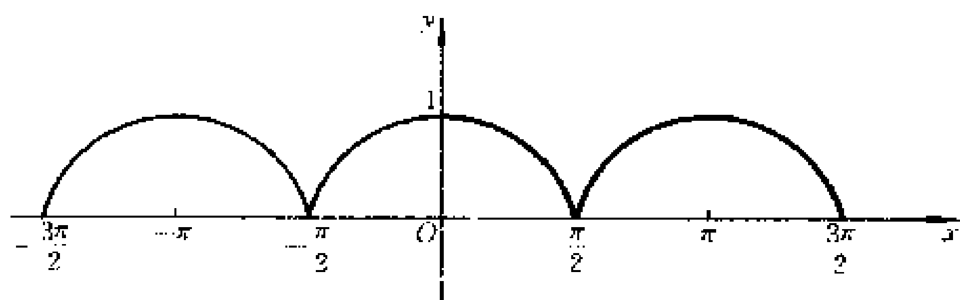


图 9.c

2. 将下列函数按偶式与奇式展成傅立叶级数，并画出和函数的图象：

(1) $f(x)=x, 0\leqslant x\leqslant \pi$.

解 按偶式展开，偶函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<\pi,\\ -x, & -\pi<x\leqslant 0.\end{cases}$$

$b_n=0,\quad n=1,2,3,\cdots.$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi}, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

于是

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2},0\leqslant x\leqslant\pi.$$

和函数的图象如图 9.d

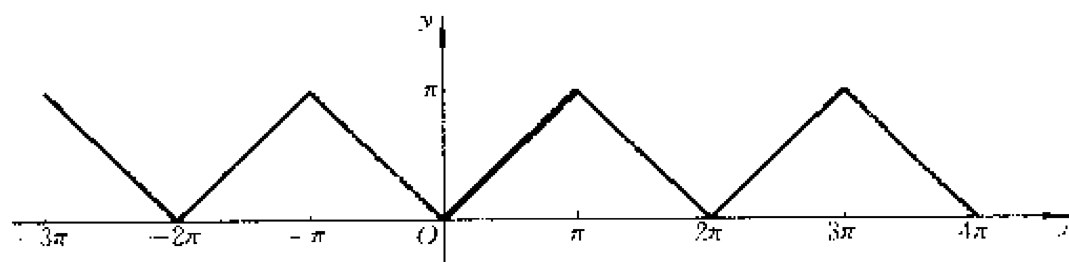


图 9.d

按奇式展开.奇函数

$$f(x)=x,\quad -\pi<x<\pi.$$

$a_n=0,\quad n=0,1,2,\cdots.$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

于是

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n},\quad 0\leqslant x<\pi.$$

和函数的图象如图 9.e

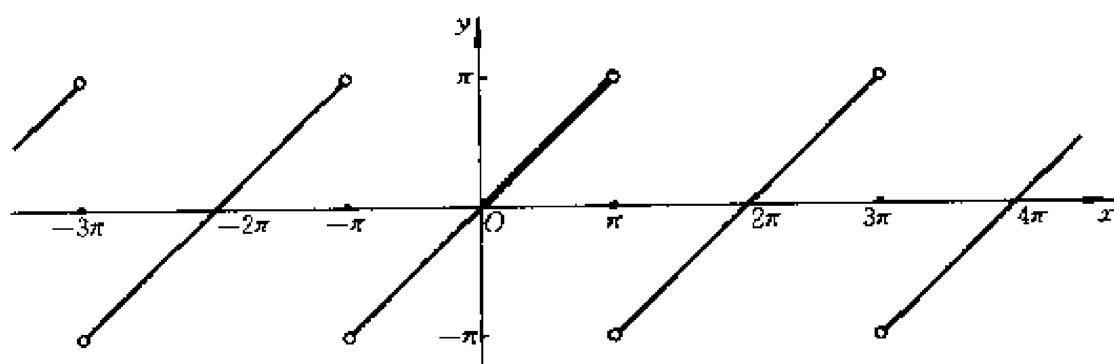


图 9.e

3. 将下列函数在指定的区间上展成傅立叶级数，并画出和函数的图象：

(1) $f(x)=|x|, -1<x\leqslant 1$.

解 $f(x)$是以 2 为周期的偶函数，$l=1$.

$$b_n=0,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

$$a_0=\frac{2}{1}\int_0^1 x dx=1.$$

$$a_n=\frac{2}{1}\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{1}dx=2\int_0^1 x\cos n\pi x dx$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi^2}, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

于是

$$|x|=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2},\quad -1<x\leqslant 1.$$

和函数的图象如图 9.f.

(3) $f(x)=x^2,\quad -l\leqslant x<l$.

解 $f(x)$是以 $2l$ 为周期的偶函数.

$$b_n=0,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l x^2 dx=\frac{2}{3}l^2.$$

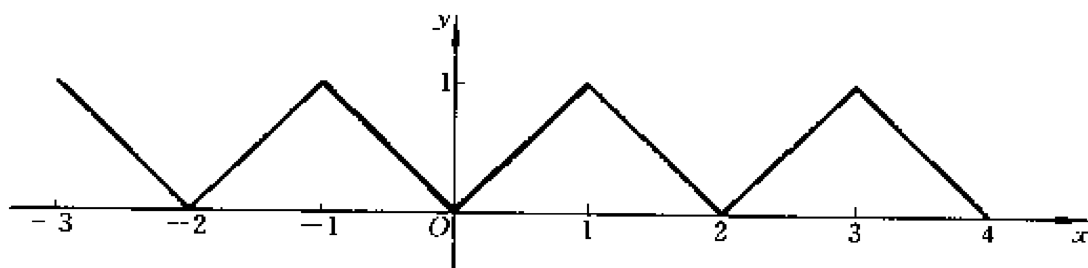


图 9.f

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l x^2\cos\frac{n\pi x}{l}dx = (-1)^n\frac{4l^2}{n^2\pi^2}.$$

于是

$$x^2 = \frac{l^2}{3} + \frac{4l^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{l}, \quad -l \leqslant x < l.$$

和函数的图象如图 9.g.

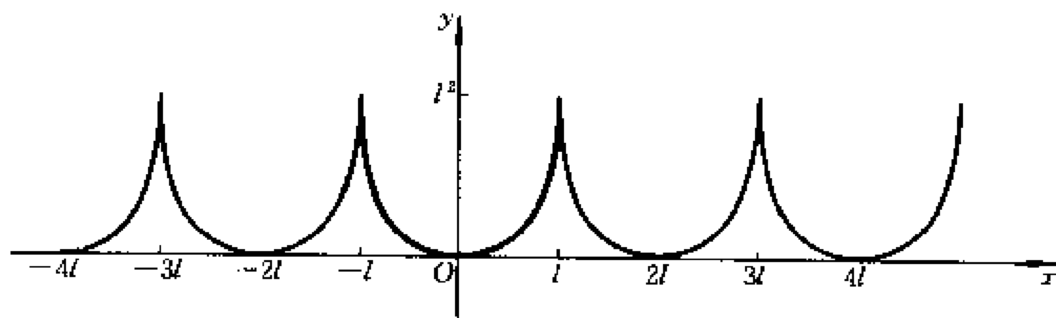


图 9.g

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 光滑. 证明:

(1) 若 $f(-x)=f(x)$ 与 $f(\pi-x)=-f(x)$, 则函数的傅立叶级数是

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\cos(2n-1)x.$$

(2) 若 $f(-x)=-f(x)$ 与 $f(\pi-x)=f(x)$, 则函数的傅立叶级数是

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}\sin(2n-1)x.$$

证 (1) $f(x)$是偶函数

$$b_n=0,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)dx\right].$$

$$a_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos2nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos2nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\cos2nxdx\right].$$

设 $x=\pi-t,dx=-dt$. 有

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f(\pi-t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\pi-x)dx.$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\cos2nxdx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f(\pi-t)\cos2ntdt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\pi-x)\cos2nxdx.$$

从而，
$$a_0=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\pi-x)dx\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x)+f(\pi-x)]dx=0.$$

$$a_{2n}=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos2nxdx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\pi-x)\cos2nxdx\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x)+f(\pi-x)]\cos2nxdx=0.$$

于是，$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}\cos(2n-1)x.$

(2) 同法可证，从略.

6. 设函数 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$可积．证明：

(1) 若$\forall x\in[-\pi,\pi]$，有 $f(x+\pi)=f(x)$，则 $a_{2k-1}=b_{2k-1}=0$；

(2) 若$\forall x\in[-\pi,\pi]$，有 $f(x+\pi)=-f(x)$，则 $a_{2k}=b_{2k}=0$，其中 a_i,b_i 都是函数 $f(x)$的傅立叶系数．

证 (1)

$$a_{2k-1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(2k-1)xdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos(2k-1)xdx+\int_{0}^{\pi}f(x)\cos(2k-1)xdx\right).$$

$$b_{2k-1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(2k-1)xdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin(2k-1)xdx+\int_{0}^{\pi}f(x)\sin(2k-1)xdx\right).$$

设 $x=t+\pi,dx=dt$，有

$$\int_{0}^{\pi}f(x)\cos(2k-1)xdx=-\int_{-\pi}^{0}f(t+\pi)\cos(2k-1)tdt$$

$$=-\int_{-\pi}^{0}f(x+\pi)\cos(2k-1)xdx.$$

$$\int_{0}^{\pi}f(x)\sin(2k-1)xdx=-\int_{-\pi}^{0}f(t+\pi)\sin(2k-1)tdt$$

$$=-\int_{-\pi}^{0}f(x+\pi)\sin(2k-1)xdx.$$

于是，$a_{2k-1}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{0}[f(x)-f(x+\pi)]\cos(2k-1)xdx=0$，

$$b_{2k-1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[f(x)-f(x+\pi)]\sin(2k-1)xdx=0;$$

(2) 同法可证，从略．

* * * *

7. 证明：若函数 $f(x)$在区间$[-\pi,\pi]$可积，且 a_k,b_k 是函数 $f(x)$ 的傅立叶系数，则$\forall n\in\mathbf{N}$，有不等式

$$(1)\ \frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx.$$

(2) $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx.$

后者称为贝塞尔不等式．

证 (1) 设 $S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$

计算积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_n(x)dx+\int_{-\pi}^{\pi}[S_n(x)]^2dx\geqslant 0.$$

由三角函数系的正交性，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_n(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]dx$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx\right)$$

$$=\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right].$$

由练习题 8.4 第 6 题的(4)，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}[S_n(x)]^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]^2dx$$

$$=\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right].$$

于是，$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]\geqslant 0,$$

即 $$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx.$$

(2) $\forall n\in\mathbf{N}$，不等式(1)都成立．不等号的右侧是常数，而左侧是正项级数 $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 的部分和，且它有上界．于是，当 $n\to\infty$ 时，也有

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx.$$

8. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 连续，设

$$T_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx),$$

则当 $A_0,A_k,B_k(k=1,2,\cdots,n)$ 是函数 $f(x)$ 的傅立叶系数时，才能使

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2dx$$

取最小值.

证 已知 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的傅立叶系数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx,\quad n=1,2,\cdots.$$

考虑积分

$$\begin{aligned}I&=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2dx\\&=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)T_n(x)dx+\int_{-\pi}^{\pi}[T_n(x)]^2dx,\end{aligned}$$

其中 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)T_n(x)dx$

$$\begin{aligned}&=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)\right]dx\\&=\frac{A_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx+\sum_{k=1}^{n}\left[A_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx dx+B_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx dx\right]\\&=\pi\left[\frac{A_0a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_ka_k+B_kb_k)\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}[T_n(x)]^2dx&=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)\right]^2dx\\&=\pi\left[\frac{A_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k^2+B_k^2)\right].\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
于是，I &= \int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - T_n(x)]^2 dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2 dx - \pi\left[\frac{2A_0a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(2A_ka_k + 2B_kb_k)\right] \\
&\qquad + \pi\left[\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(A_k^2 + B_k^2)\right] \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2 dx + \pi\left\{\frac{A_0^2 - 2A_0a_0}{2}\right. \\
&\qquad \left. + \sum_{k=1}^{n}[(A_k^2 - 2A_ka_k) + (B_k^2 - 2B_kb_k)]\right\} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2 dx + \pi\left\{\frac{A_0^2 - 2A_0a_0 + a_0^2}{2}\right. \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{n}[(A_k^2 - 2A_ka_k + a_k^2) + (B_k^2 - 2B_kb_k + b_k^2)] \\
&\qquad \left. - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right]\right\} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2 dx + \pi\left\{\frac{(A_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}[(A_k - a_k)^2\right. \\
&\qquad \left. + (B_k - b_k)^2]\right\} - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right].
\end{aligned}
$$

上式等号右端的第一、三项都是常数，第二项因 $A_0, A_k, B_k (k=1,2,\cdots,n)$的不同而变化，其和的每项都是非负数．因此，只有当每项都是 0 时，即当

$$A_0 = a_0, A_k = a_k, B_k = b_k \quad (k = 1,2,\cdots,n)$$

时 I 取最小值．于是，当 $A_0, A_k, B_k (k=1,2,\cdots,n)$是 $f(x)$的傅立叶系数时，I 取最小值．

9. 证明：若函数 $f(x)$的傅立叶级数在区间$[-\pi,\pi]$一致收敛于有界函数$f(x)$，则有帕塞法耳等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx.$$

证 设 $S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$.

已知 $f(x)$的傅立叶级数在$[-\pi,\pi]$一致收敛于有界函数 $f(x)$，即

$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N,\forall x\in[-\pi,\pi]$，有

$$|f(x)-S_n(x)|=\left|f(x)-\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]\right|<\varepsilon.$$

从而

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2dx\right|\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(x)|^2dx<2\pi\varepsilon^2,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2dx=0.$$

由第 7 题的证明，已知

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right].$$

于是

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx=\lim_{n\to\infty}\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]$$

$$=\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\right]$$

或
$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx.$$

10. 设 $S_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx$. $S_0(x)=\frac{1}{2}$,

$$\sigma_n(x)=\frac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_n(x)}{n+1}.$$

证明：(1) $\sigma_n(x)=\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\right)^2$.

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n(x)dx=\pi.$

证 (1)由已知的三角公式

$$2\sin\frac{x}{2}\cos kx=\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x$$

或
$$\cos kx=\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

$$S_0(x)=\frac{1}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

$$S_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx$$

$$=\frac{\sin\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

$$=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

再由已知三角公式

$$2\sin\frac{x}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x=\cos kx-\cos(k+1)x$$

或
$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x=\frac{\cos kx-\cos(k+1)x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sin\left(k+\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}\sum_{k=0}^{n}[\cos kx-\cos(k+1)x]$$

$$=\frac{1-\cos(n+1)x}{2\sin\frac{1}{2}x}=\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}.$$

于是

$$\sigma_n(x)=\frac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_n(x)}{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k(x)$$

$$=\frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}$$

$$=\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\right)^2.$$

(2)点 0 是 $\sigma_n(x)$的可去不连续点．$\sigma_n(x)$在$[-\pi,\pi]$可积．$\sigma_n(x)$在$[-\pi,\pi]$是偶函数，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n(x)dx=2\int_0^{\pi}\sigma_n(x)dx.$$

根据引理 1 的推论，有

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

于是

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n(x)dx=2\int_0^{\pi}\sigma_n(x)dx=\frac{2}{n+1}\int_0^{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}dx$$

$$=\frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}dx=\frac{2}{n+1}\cdot(n+1)\frac{\pi}{2}=\pi.$$

第十章　多元函数微分学

练习题　10.1

（《讲义》下册，第 142 页）

1. 描绘下列平面区域，并指出它是开区域、闭区域、有界区域、无界区域：

(1)　$\{(x,y)\mid x^2>y\}$.

解　如图 10.a 的阴影部分. 它是开区域、无界区域.

(2)　$\{(x,y)\mid x^2-y^2\leqslant 1\}$.

解　如图 10.b 的阴影部分. 它是闭区域、无界区域.

(3)　$\{(x,y)\mid |xy|\leqslant 1\}$.

解　如图 10.c 的阴影部分. 它是闭区域、无界区域.

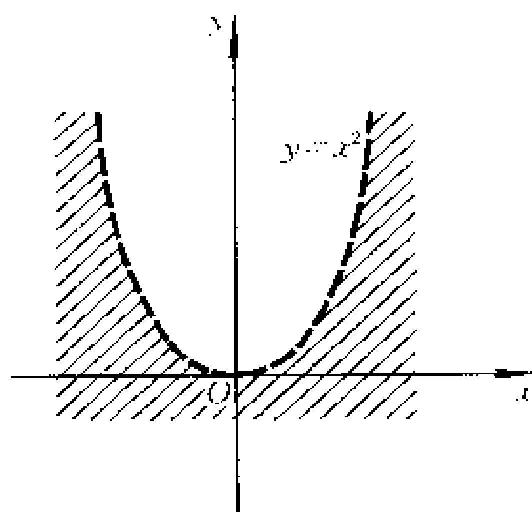


图 10.a

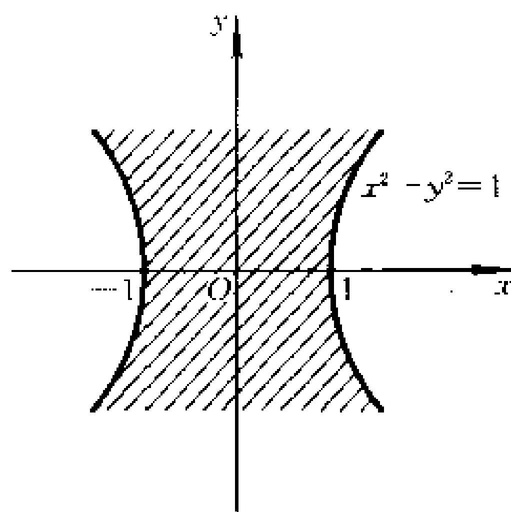


图 10.b

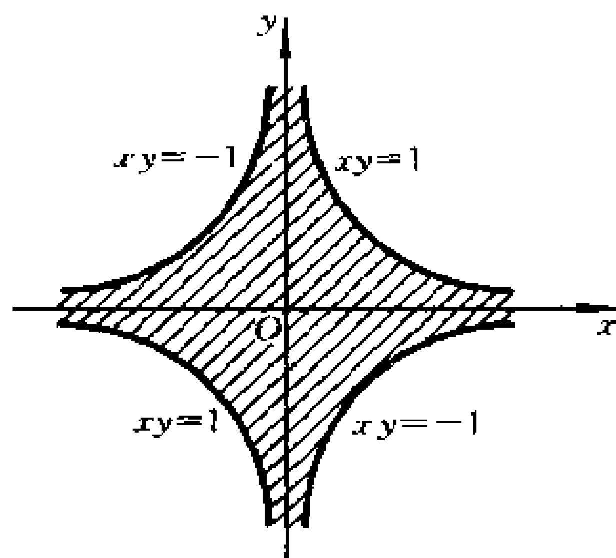


图 10.c

(4) $\{(x,y)\mid |x+y|<1\}$.

解 如图 10.d 的阴影部分. 它是开区域、无界区域.

(5) $\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$.

解 如图 10.e 的阴影部分. 它是闭区域、有界区域.

(6) $\{(x,y)\mid |x|+y\leqslant 1\}$.

解 如图 10.f 的阴影部分. 它是闭区域、无界区域.

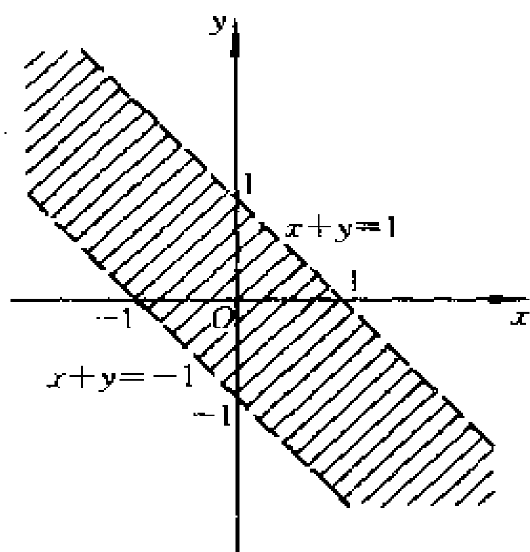


图 10.d

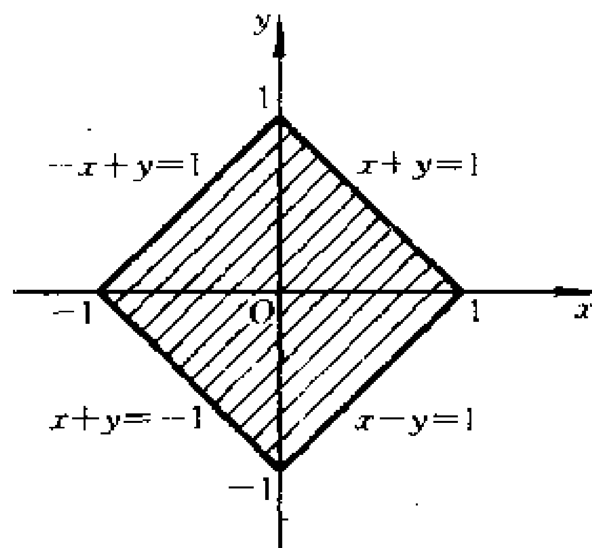


图 10.e

2. 描绘空间区域(体)的图象，并指出它是开区域还是闭区域：

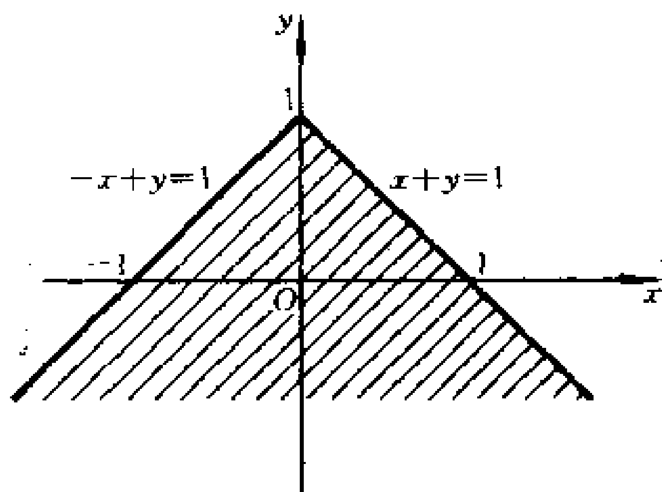


图 10. f

(1) $V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 4\}$.

解 V 是以原点$(0,0,0)$为中心，以 2 为半径的球体. 如图 10. g，是闭区域.

(2) $V=\left\{(x,y,z)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1\right.\right\}$.

解 V 是以原点$(0,0,0)$为中心，以 a,b,c 为半轴的椭球体内部(不包含椭球面)，如图 10. h，是开区域.

(3) $V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant a^2,\ |z|\leqslant h\}$.

解 V 是以 z 轴为中心轴，以 a 为半径，以 $2h$ 为高的圆柱体，如图 10. i，是闭区域.

(4) $V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2<z,z<2\}$.

解 V 是由顶点在原点$(0,0,0)$，以 z 轴为中心轴，开口向上的旋转抛物面 $x^2+y^2=z$ 与平面 $z=2$ 所围成区域的内部，如图 10. j，是开区域.

(5) $V=\{(x,y,z)\mid |x|+|y|+|z|\leqslant 1\}$.

解 V 是八个平面：$\pm x\pm y\pm z=1$，$\mp x\pm y\pm z=1$，$\pm x\mp y\pm z=1$，$\pm x\pm y\mp z=1$ 所围成. 如图 10. k，是闭区域.

5. 指出下列各平面点集 E 的所有聚点所成的集合 E'：

(1) $E=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$.

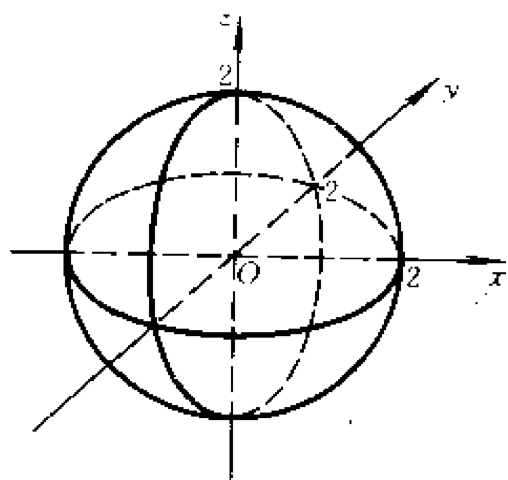


图 10. g

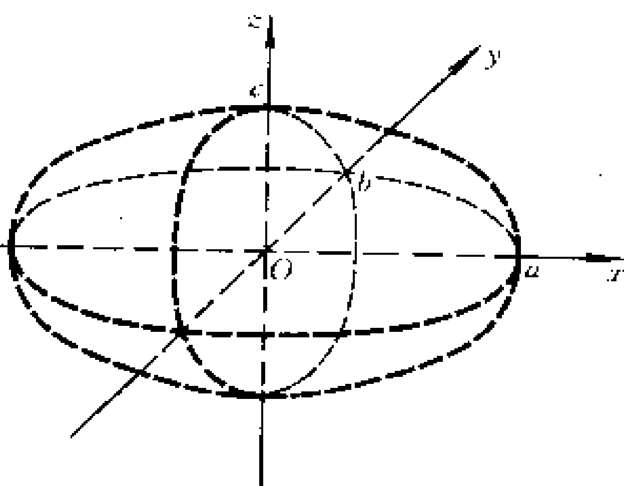


图 10. h

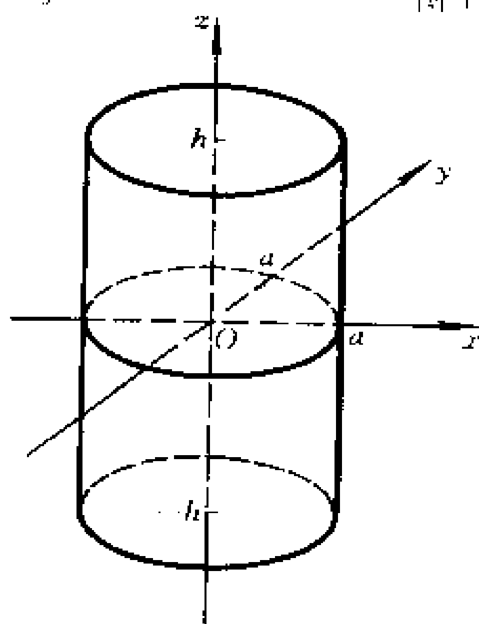


图 10. i

解 $E'=\{(x,y)\mid 0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\}$.

(2) $E=\{(r_1,r_2)\mid 0<r_1<1,0<r_2<1,r_1$ 与 r_2 是有理数$\}$.

解 $E'=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

(3) $E=\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\middle| n\in\mathbf{N}\right\}$.

解 $E'=\{(0,0)\}$.

(4) $E=\{(m,n)\mid m,n$ 是整数$\}$.

解 $E'=\varnothing$.

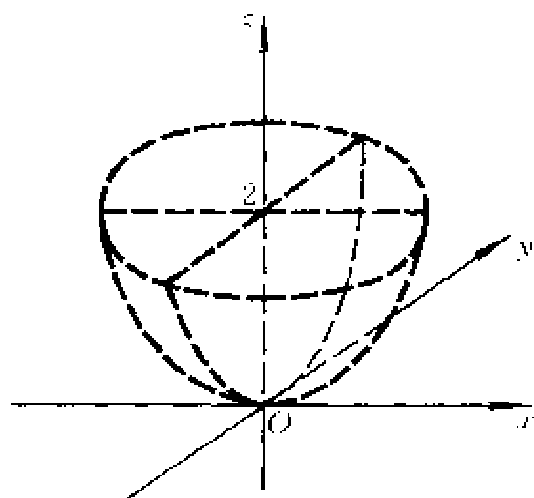


图 10. j

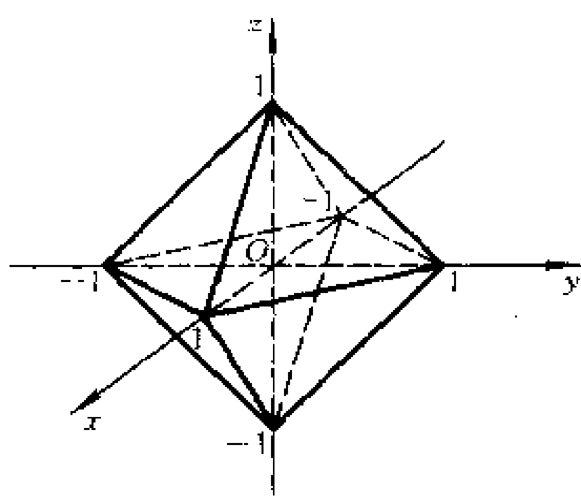


图 10. k

6. 证明：点 P 是集合 E 的聚点 $\Longleftrightarrow \forall r>0$，$\mathring{U}(P,r)\cap E\neq\varnothing$.

证 $\Rightarrow$ 若 P 是 E 的聚点，则 $\forall r>0$，$U(P,r)$ 内有 E 的无限多个点，于是

$$\mathring{U}(P,r)\cap E\neq\varnothing.$$

$\Leftarrow$ 已知 $\forall n\in\mathbf{N}$，$\mathring{U}\left(P,\frac{1}{n}\right)\cap E\neq\varnothing$，即 $\exists P_n\in\mathring{U}\left(P,\frac{1}{n}\right)\cap E$. 于是，$\forall r>0$，总 $\exists N\in\mathbf{N}$，使 $r>\frac{1}{N}$，$U\left(P,\frac{1}{N}\right)\subset U(P,r)$，从而有 $\forall n>N$ 时，总有无限多个 $P_n(n=N+1,N+2,\cdots)\in E$；有

$$P_n\in U(P,r),$$

即 P 是 E 的聚点.

7. 证明：若点 P 是集合 E 的聚点，但不是集合 E 的内点，则点 P 是集合 E 的界点.

证 已知 P 是 E 的聚点，即 $\forall r>0$，邻域 $U(P,r)$ 含有 E 的无限多个点. 又已知 P 不是 E 的内点，即邻域 $U(P,r)$ 必有不是 E 的点. 于是，$\forall r>0$，$U(P,r)$ 内既有 E 的点，又有不是 E 的点，则 P 是 E 的界点.

9. 求下列函数的定义域：

(4) $z=\dfrac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$.

解 要求 $y-\sqrt{x}>0$ 与 $x\geqslant 0$ 或 $x<y^2, y>0$ 与 $x\geqslant 0$.

定义域 $D=\{(x,y)\mid x<y^2, y>0, x\geqslant 0\}$.

(5) $z=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2}$.

解 要求 $x^2-4\geqslant 0$ 与 $4-y^2\geqslant 0$ 或 $|x|\geqslant 2$ 与 $|y|\leqslant 2$.

定义域 $D=\{(x,y)\mid |x|\geqslant 2, |y|\leqslant 2\}$.

(6) $z=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

解 要求 $\sin(x^2+y^2)\geqslant 0$ 或 $2k\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2k+1)\pi, k\in\mathbf{N}\cup\{0\}$.

定义域 $D=\{(x,y)\mid 2k\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2k+1)\pi, k\in\mathbf{N}\cup\{0\}\}$.

(7)三角形三边长分别是 x,y,z，已知 $x+y+z=2p$，则三角形面积

$$A=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}.$$

解 p 是三角形的周长之半. 有 $x+y>p, x<p$ 与 $y<p$.

定义域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<p, 0<y<p, x+y>p\}$.

12. 描绘下列函数的图象：

(1) $z=1-x-y$.

解 这是通过三点(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)的平面. 如图10. l.

(2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

解 这是以原点(0,0,0)为顶点，以 z 轴为中心轴，开口向上的锥面. 如图 10. m.

(3) $z=1-x^2-y^2$.

解 这是以(0,0,1)为顶点，以 z 轴为中心轴，开口向下的旋转抛物面. 如图 10. n.

(4) $z=xy$.

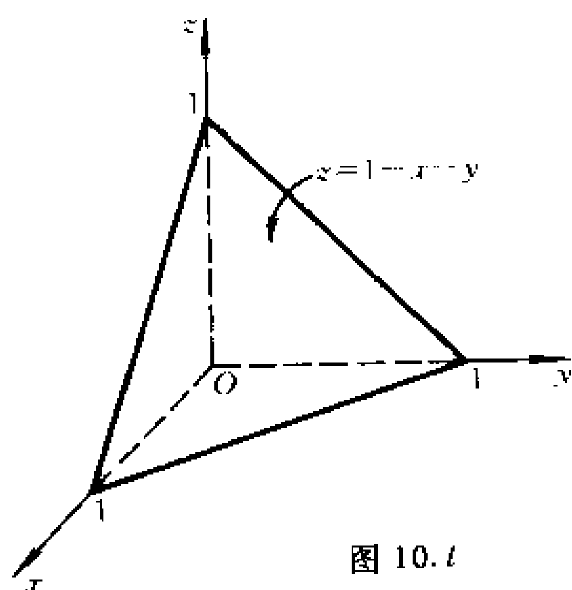


图 10.l

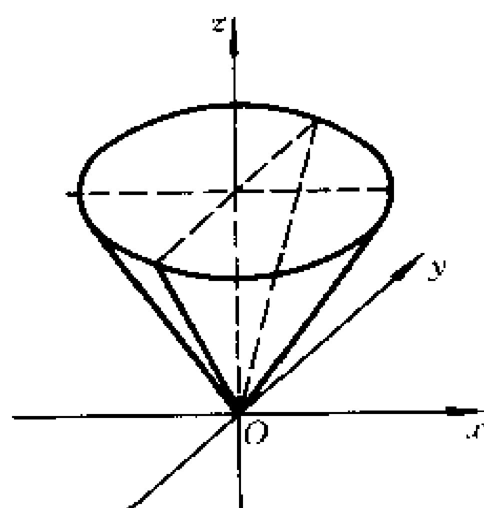


图 10.m

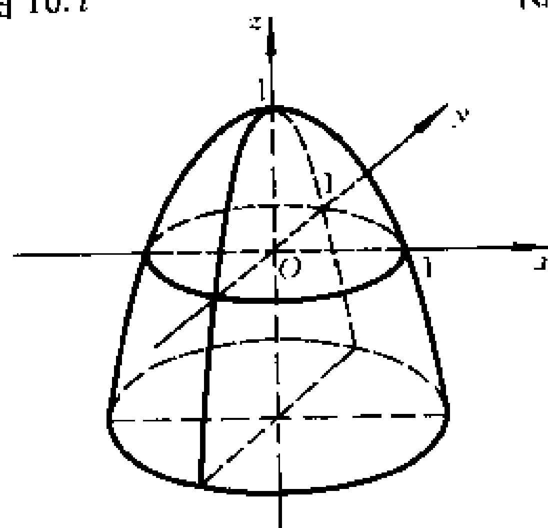


图 10.n

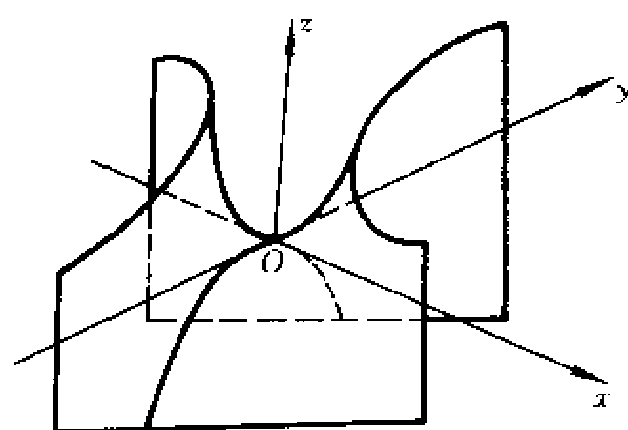


图 10.o

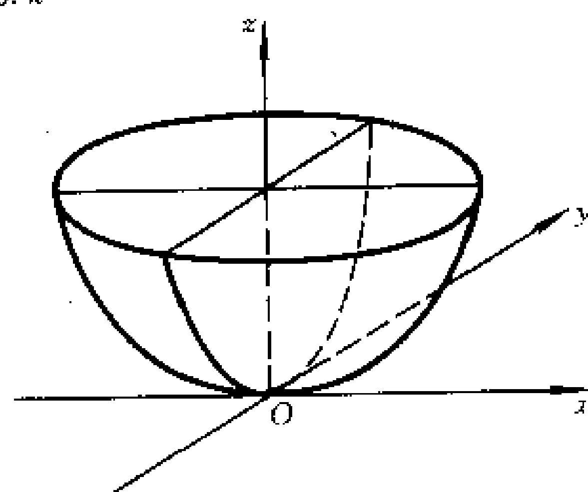


图 10.p

解 这是以 z 轴为对称轴并通过 x 与 y 两个坐标轴的双曲抛物面. 如图 10. o.

(5) $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.

解 这是以原点(0,0,0)为顶点,以 z 轴为对称轴,开口向上的椭圆抛物面. 如图 10. p.

* * * *

13. 在定理 2 中,将有界闭区域 D 换成有界开区域 D 或无界闭区域 D,定理 2 都不成立,举例说明. 将开区域集合 $\{S\}$ 换成闭区域集合 $\{S\}$,定理 2 也不成立,举例说明.

定理 2.(有限覆盖定理) 若坐标平面上开区域集合 $\{S\}$ 覆盖有界闭区域 D,则 $\{S\}$ 中存在有限个开区域也覆盖 D.

解 例如,设有界开区域 $D=\{(x,y)\,|\,|x|<1,|y|<1\}$.

$$S_n=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|<1-\frac{1}{n+1},|y|<1-\frac{1}{n+1},n\in\mathbf{N}\right\}.$$

$\forall(x,y)\in D,\exists n\in\mathbf{N}$,使 $(x,y)\in S_n$,即开区域集合 $\{S_n\}$ 覆盖 D. 显然,有限个 S_n 不能覆盖 D,即 D 没有有限覆盖.

例如,设无界闭区域 $D=\mathbf{R}^2$.

$$S_n=\{(x,y)\,|\,|x|<n,|y|<n,n\in\mathbf{N}\}.$$

$\forall(x,y)\in D=\mathbf{R}^2,\exists n\in\mathbf{N}$,使 $(x,y)\in S_n$,即开区域集合 $\{S_n\}$ 覆盖 D. 显然,有限个 S_n 不能覆盖 D,即 D 没有有限覆盖.

例如,设有界闭区域 $D=\{(x,y)\,|\,|x|\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1\}$.

$$S_1=\{(x,y)\,|\,-1\leqslant x\leqslant0,0\leqslant y\leqslant1\}.$$

$$S_n=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1,n\in\mathbf{N},n\geqslant2\right\}.$$

$\forall(x,y)\in D,\exists n\in\mathbf{N}$,使 $(x,y)\in S_n$,即闭区域集合 $\{S_n\}$ 覆盖有界闭区域 D. 显然,有限个 S_n 不能覆盖 D,即 D 没有有限覆盖.

14. 应用闭矩形区域套定理证明聚点定理.

定理 3.(聚点定理) 坐标平面上有界无限点集 E 至少有一个聚点.

证　设 E 是有界无限点集. 则存在有界闭矩形区域 D_1，使 $E\subset D_1$，即 D_1 含有 E 的无限多个点. 通过闭矩形区域 D_1 的中点，将 D_1 分成四个相等的闭矩形区域，必至少有一个闭矩形区域 $D_2(\subset D_1)$ 含有 E 的无限多个点. 再通过闭矩形区域 D_2 的中点，将闭矩形区域 D_2 分成四个相等的闭矩形区域，必至少有一个闭矩形区域 $D_3(\subset D_2)$ 含有 E 的无限多个点，如此无限次作下去，得到闭矩形区域列：$\{D_n\}$，有

1)　$D_1\supset D_2\supset\cdots\supset D_n\supset\cdots$　；　2)　$\lim\limits_{n\to\infty}d(D_n)=0.$

每个 D_n 都含有 E 的无限多个点. 根据闭矩形区域套定理，存在唯一一点 P 属于所有的 D_n，即

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}D_n=\{P\}.$$

已知 $\forall r>0$，$\exists n\in\mathbf{N}$，使 $D_n\subset U(P,r)$，从而 $U(P,r)$ 含有 E 的无限多个点，即 P 是 E 的聚点. 于是，E 至少有一个聚点.

15. 证明定理 4.

定理 4(柯西收敛准则)点列 $\{P_n\}$ 收敛 $\Longleftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n,m>N$，有 $|P_n-P_m|<\varepsilon$.

证　$\Rightarrow$ 已知点列 $\{P_n\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P$，即

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N,有\ |P_n-P|<\varepsilon.$$

于是，$\forall n,m>N$，有

$$|P_n-P_m|\leqslant|P_n-P|+|P_m-P|<2\varepsilon.$$

$\Leftarrow$ 设点列 $\{P_n\}=\{(a_n,b_n)\}$. 已知

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n,m>N$，有 $|P_n-P_m|<\varepsilon$，即

$$|P_n-P_m|=\sqrt{(a_n-a_m)^2+(b_n-b_m)^2}<\varepsilon.$$

从而，　$|a_n-a_m|<\varepsilon$　与　$|b_n-b_m|<\varepsilon$.

根据数列的柯西收敛准则，数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛，设

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a,\quad 与\quad \lim_{n\to\infty}b_n=b.$$

根据引理，有

$$\lim_{n\to\infty}P_n(a_n,b_n)=P(a,b),$$

即点列$\{P_n\}$收敛.

练习题 10.2

（《讲义》下册，第 155 页）

1. 用极限定义证明下列极限：

(1)$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}(4x^2+3y)=19.$

证 取 $\delta_1=1$. 限定 $|x-2|<1$ 与 $|y-1|<1$. 有

$$|x+2|=|x-2+4|\leqslant|x-2|+4<5.$$

$\forall\varepsilon>0$，要使不等式

$|(4x^2+3y)-19|=|4x^2-16+3y-3|$

$\leqslant 4|x+2||x-2|+3|y-1|<20(|x-2|+|y-1|)<\varepsilon$

成立，只须$|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{40}$，$|y-1|<\dfrac{\varepsilon}{40}$. 取 $\delta_2=\dfrac{\varepsilon}{40}>0$，于是

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$，$\forall(x,y)$：$|x-2|<\delta$ 与 $|y-1|<\delta$，且$(x,y)\neq(2,1)$，有

$$|(4x^2+3y)-19|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(4x^2+3y)=19.$$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$

证 $\forall\varepsilon>0$，要使不等式

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant\left|\frac{2xy}{x^2+y^2}\right||x|\leqslant|x|<\varepsilon$$

成立，只须$|x|<\delta=\varepsilon$. 于是

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon>0$，$\forall(x,y)$：$|x|<\delta$，$|y|<\delta$，且$(x,y)\neq(0,0)$，有

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}=0.$$

3. 函数 $f(x,y)=\frac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}$. 证明：当点$(x,y)$沿通过原点的任意直线($y=mx$)趋于$(0,0)$时，函数 $f(x,y)$存在极限，且极限相等. 但是，此函数在原点不存在极限.

证 设 $y=mx$(m 是通过原点的直线的斜率)，$m\neq 0$，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{m^4x^8}{(x^4+m^2x^2)^3}$$

$$=\lim_{x\to 0} \frac{m^4x^2}{(x^2+m^2)^3}=0.$$

当 $m=0$ 时，显然，也有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^2}=0.$$

即 $f(x,y)$当(x,y)沿任意直线 $y=mx$ 趋于$(0,0)$时存在极限，且极限相等.

但取 $y=x^2$，却有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} \frac{x^{12}}{8x^{12}}=\frac{1}{8}.$$

所以，$f(x,y)=\frac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}$在点$(0,0)$不存在极限.

4. 若将函数 $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 限制在区域 $D=\{(x,y)\mid |y|<x^2\}$，则函数 $f(x,y)$在原点$(0,0)$存在极限(关于 D).

证 区域 $D=\{(x,y)\mid |y|<x^2\}$，如图 10.q 的阴影部分.

$\forall \varepsilon>0$，要使不等式($x\neq 0$)

$$\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-1\right|=\frac{2y^2}{x^2+y^2}$$

$$\leqslant \frac{2y^2}{2|xy|}=\frac{|y|}{|x|}<\frac{|x|^2}{|x|}\quad (\text{应用 } |y|<x^2)$$

$$=|x|<\varepsilon$$

成立，只须取 $\delta=\varepsilon$. 于是

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta=\varepsilon>0, \forall (x,y) \in D: |x|<\delta, |y|<\delta$, 且 $(x,y)\neq(0,0)$，有

$$\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-1\right|<\varepsilon.$$

即(关于 D) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 在点(0,0)存在极限.

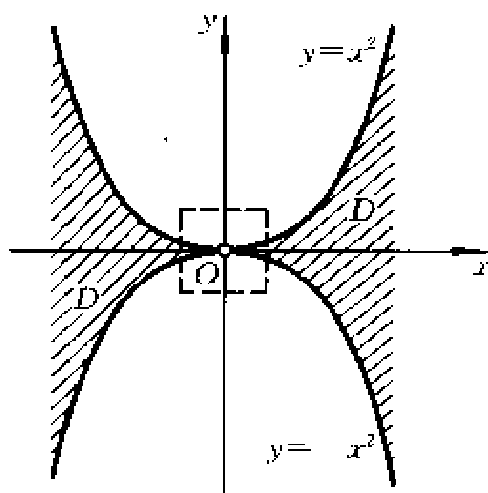


图 10.q

注 在点(0,0)的邻域内，函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 在点(0,0)却不存在极限. 事实上，当 $x=0, y\to0$ 时，却有 $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\to-1$.

5. 证明：$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A$（设 $x=x_0+r\cos\theta, y=y_0+r\sin\theta$）$\Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall r: 0<r<\delta, \forall \theta: 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，有

$$|f(x_0+r\cos\theta, y_0+r\sin\theta)-A|<\varepsilon.$$

证 $\Rightarrow$ 已知 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A$，即

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall (x,y): |x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta$, 且 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$，有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

设 $x=x_0+r\cos\theta, y=y_0+r\sin\theta, \forall \theta: 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，有

$$|x-x_0|=|r\cos\theta|\leqslant r, |y-y_0|=|r\sin\theta|\leqslant r.$$

于是，$\forall r: 0<r<\delta, \forall \theta: 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，有

$$|x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta, \text{且} (x,y)\neq(x_0,y_0),$$

则
$$|f(x_0+r\cos\theta, y_0+r\sin\theta)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

$\Leftarrow$ 已知 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall r: 0<r<\delta, \forall \theta: 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，有

$$|f(x_0+r\cos\theta, y_0+r\sin\theta)-A|<\varepsilon.$$

设 $x=x_0+r\cos\theta, y=y_0+r\sin\theta$. $\forall\theta\in[0,2\pi]$，有

$$|x-x_0|=|r\cos\theta|\leqslant r,\quad |y-y_0|=|r\sin\theta|\leqslant r.$$

且 $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$，取 $\eta=\dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$. 于是

$\forall\varepsilon>0, \exists\eta=\dfrac{\delta}{\sqrt{2}}>0, \forall(x,y)$：$|x-x_0|<\eta, |y-y_0|<\eta$（这时有 $r<\delta$），且 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$，有

$$|f(x,y)-A|=|f(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)-A|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A.$$

6. 求下列极限

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x+y)\ln(x^2+y^2)$.

解 应用第 5 题. 设 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$. 有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x+y)\ln(x^2+y^2)=\lim_{r\to0}r(\sin\theta+\cos\theta)\ln r^2.$$

$\forall\theta$：$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$，有

$$|r(\sin\theta+\cos\theta)\ln r^2|\leqslant|4r\ln r|.$$

已知 $\lim\limits_{r\to0^+}4r\ln r=0$（见§6.2 例 8）. 于是

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x+y)\ln(x^2+y^2)=0.$$

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{(1+4x^2)(1+6y^2)}-1}{2x^2+3y^2}$.

解
$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{(1+4x^2)(1+6y^2)}-1}{2x^2+3y^2}$$
$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(\sqrt{(1+4x^2)(1+6y^2)}-1)(\sqrt{(1+4x^2)(1+6y^2)}+1)}{(2x^2+3y^2)(\sqrt{(1+4x^2)(1+6y^2)}+1)}$$
$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(1+4x^2)(1+6y^2)-1}{(2x^2+3y^2)(\sqrt{(1+4x^2)(1+6y^2)}+1)}$$
$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(\frac{2}{\sqrt{(1+4x^2)(1+6y^2)}+1}+\frac{24x^2y^2}{(2x^2+3y^2)(\sqrt{(1+4x^2)(1+6y^2)}+1)}\right)$$

$=1+0=1.$

注 其中$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{24x^2y^2}{2x^2+3y^2}=0$. 事实上，

$$\left|\frac{24x^2y^2}{2x^2+3y^2}\right|\leqslant\frac{12x^2y^2}{\sqrt{6}\,|xy|}=\frac{12}{\sqrt{6}}|xy|\to 0(x\to 0,y\to 0).$$

7. 写出下列符号的定义：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}f(x,y)=A$.

答 $\forall\varepsilon>0,\exists B>0,\forall(x,y):x>B,y>B$,有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}f(x,y)=\infty$.

答 $\forall B>0,\exists\delta>0,\forall(x,y):|x-a|<\delta,|y-b|<\delta$,且$(x,y)\neq(a,b)$,有$|f(x,y)|>B$.

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to+\infty}}f(x,y)=+\infty$.

答 $\forall B>0,\exists\delta>0$ 与 $A>0,\forall(x,y):|x-a|<\delta,y>A$,有

$$f(x,y)>B.$$

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ y\to b}}f(x,y)=B$,并证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{x^2+3y^2}=+\infty$.

答 $\forall\varepsilon>0,\exists A>0$ 与 $\delta>0,\forall(x,y):x<-A,|y-b|<\delta$,有

$$|f(x,y)-B|<\varepsilon.$$

证 $\forall A>0$,要使不等式

$$\frac{1}{x^2+3y^2}\geqslant\frac{1}{3x^2+3y^2}=\frac{1}{3(x^2+y^2)}>A$$

成立，只须取$\delta=\dfrac{1}{\sqrt{6A}}$,于是

$\forall A>0,\exists\delta=\dfrac{1}{\sqrt{6A}}>0,\forall(x,y):|x|<\delta,|y|<\delta$,且$(x,y)\neq(0,0)$,有 $\dfrac{1}{x^2+3y^2}\geqslant\dfrac{1}{3(x^2+y^2)}>\dfrac{1}{6\delta^2}=A$,

即 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{x^2+3y^2}=+\infty.$

8. 证明：若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}\varphi(x,y)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}\psi(x,y)=0$，且在$(x_0,y_0)$的邻域有$|f(x,y)-\varphi(x,y)|\leqslant\psi(x,y)$，则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A$.

证 已知$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}\varphi(x,y)=A$与$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}\psi(x,y)=0$，即

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，

$$\begin{cases}\forall(x,y):|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta,\text{且}(x,y)\neq(x_0,y_0),\text{有}\\ \qquad |\varphi(x,y)-A|<\varepsilon,\\ \forall(x,y):|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta,\text{且}(x,y)\neq(x_0,y_0),\text{有}\\ \qquad |\psi(x,y)-0|=|\psi(x,y)|<\varepsilon.\end{cases}$$

于是，$\forall(x,y):|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta$，且$(x,y)\neq(x_0,y_0)$，有

$$\begin{aligned}|f(x,y)-A|&\leqslant|f(x,y)-\varphi(x,y)|+|\varphi(x,y)-A|\\&\leqslant\psi(x,y)+|\varphi(x,y)-A|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,\end{aligned}$$

即
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A.$$

注 《讲义》原题抄写有误，如是改正。

9. 证明：若$\forall Q\in U(P,r)$，有$f(Q)\leqslant g(Q)$，且极限$\lim\limits_{Q\to P}f(Q)$与$\lim\limits_{Q\to P}g(Q)$存在，则$\lim\limits_{Q\to P}f(Q)\leqslant\lim\limits_{Q\to P}g(Q)$.

证 设$\lim\limits_{Q\to P}f(Q)=a$与$\lim\limits_{Q\to P}g(Q)=b$. 往证$a\leqslant b$.

用反证法 假设 $a=\lim\limits_{Q\to P}f(Q)>\lim\limits_{Q\to P}g(Q)=b$. 有$a-b>0$.

$\exists\dfrac{a-b}{2}>0$，

$$\begin{cases}\exists\delta_1>0,\forall Q:0<|Q-P|<\delta_1,\text{有}|f(Q)-a|<\dfrac{a-b}{2}\text{从而}\\ \qquad \dfrac{a+b}{2}<f(Q),\\ \exists\delta_2>0,\forall Q:0<|Q-P|<\delta_2,\text{有}|g(Q)-b|<\dfrac{a-b}{2},\text{从而}\\ \qquad g(Q)<\dfrac{a+b}{2}.\end{cases}$$

$\exists\,\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0,\forall Q:0<|Q-P|<\delta$,有

$$g(Q)<\frac{a+b}{2}<f(Q).$$

与已知条件矛盾,即

$$\lim_{Q\to P}f(Q)\leqslant\lim_{Q\to P}g(Q).$$

11. 证明:函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

在原点(0,0)分别对每个自变数 x 或 y(另一个看作常数)都连续,但是二元函数在原点(0,0)却不连续.

证 $\forall y\in\mathbf{R}$ 与 $\forall x\in\mathbf{R}$,分别有

$$\lim_{x\to 0}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}=0=f(0,y)$$

与
$$\lim_{y\to 0}f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}=0=f(x,0),$$

即 $f(x,y)$ 在原点(0,0)分别对 x 与 y 都连续.

当 $x=y$ 时,却有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{2x^2}=1\neq 0=f(0,0),$$

即 $f(x,y)$ 在原点(0,0)不连续(其实 $f(x,y)$ 在原点(0,0)并不存在极限,当然不连续).

12. 证明:定理 2 中的乘积函数 $f(P)g(P)$ 在点 P_0 连续.

定理 2. 若函数 $f(P)$ 与 $g(P)$ 在点 P_0 连续,则 $f(P)g(P)$ 在 P_0 连续.

证 已知 $f(P)$ 与 $g(P)$ 在 P_0 连续,即

$$\underset{\sim\sim\sim\sim}{\forall\,\varepsilon>0},\begin{cases}\exists\,\delta_1>0,\forall\,P:|P-P_0|<\delta_1,\text{有}\\ \qquad |f(P)-f(P_0)|<\varepsilon,\\ \exists\,\delta_2>0,\forall\,P:|P-P_0|<\delta_2,\text{有}\\ \qquad |g(P)-g(P_0)|<\varepsilon.\end{cases}$$

又已知 $g(P)$ 在点 P_0 的某邻域有界，即

$\exists M>0, \exists \delta_3>0, \forall P: |P-P_0|<\delta_3$，有 $|g(P)|\leqslant M$.

$\exists \delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}>0$. 于是，$\forall P: |P-P_0|<\delta$，有

$$
\begin{aligned}
&|f(P)g(P)-f(P_0)g(P_0)| \\
&\leqslant |f(P)g(P)-f(P_0)g(P)|+|f(P_0)g(P)-f(P_0)g(P_0)| \\
&\leqslant |g(P)||f(P)-f(P_0)|+|f(P_0)||g(P)-g(P_0)| \\
&< M\varepsilon+|f(P_0)|\varepsilon=(M+|f(P_0)|)\varepsilon,
\end{aligned}
$$

即　　$f(P)g(P)$ 在点 P_0 连续.

14. 应用致密性定理证明定理 5.

定理 5. (有界性) 若函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 连续，则函数 $f(P)$ 在 D 有界，即 $\exists M>0, \forall P\in D$，有 $|f(P)|\leqslant M$.

证　用反证法. 假设 $f(P)$ 在 D 无界，即

$\forall M>0, \exists P_0\in D$，使 $|f(P_0)|>M$.

当 $M=1$ 时，$\exists P_1\in D$，使 $|f(P_1)|>1$，

当 $M=2$ 时，$\exists P_2\in D$，使 $|f(P_2)|>2$，

…　　　…

当 $M=n$ 时，$\exists P_n\in D$，使 $|f(P_n)|>n$，

…　　　…

于是得到有界点列 $\{P_n\}$，使得 $\forall n\in \mathbf{N}, P_n\in D$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(P_n)=\infty$. 根据致密性定理，点列 $\{P_n\}$ 存在收敛的子点列 $\{P_{n_k}\}$. 设 $\lim\limits_{k\to\infty} P_{n_k}=P_0\in D$.

一方面，已知 $f(P)$ 在 P_0 连续，有 $\lim\limits_{k\to\infty} f(P_{n_k})=f(P_0)$ (常数)；

另一方面，已知 $\lim\limits_{n\to\infty} f(P_n)=\infty$，从而有 $\lim\limits_{k\to\infty} f(P_{n_k})=\infty$，与 $\lim\limits_{k\to\infty} f(P_{n_k})=f(P_0)$ 矛盾. 所以 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上有界.

15. 证明：若在开区域 G 函数 $f(x,y)$ 对变量 x 连续，对变数 y 满足利普希茨条件，即 $\forall (x,y_1),(x,y_2)\in G$，有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|,$$

其中 L 是常数，则函数 $f(x,y)$ 在 G 连续.

证　$\forall P_0(x_0,y_0)\in G$. 已知一元函数 $f(x,y_0)$ 在 x_0 连续，即

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta_1>0, \forall x: |x-x_0|<\delta_1$，有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

再由利普希茨条件，有

$$|f(x,y)-f(x,y_0)| \leqslant L|y-y_0|.$$

$\exists \delta=\min\{\delta_1,\varepsilon\}>0, \forall (x,y)\in G: |x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta$，有

$$\begin{aligned}
&|f(x,y)-f(x_0,y_0)| \\
&\leqslant |f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)| \\
&< L|y-y_0|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)| \\
&< L\varepsilon+\varepsilon=(L+1)\varepsilon,
\end{aligned}$$

即　$f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$连续，从而$f(x)$在G连续.

16. 证明：若函数$f(x,y)$在$\mathbf{R}^2$连续，且$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y)=A$，则函数$f(x,y)$在$\mathbf{R}^2$一致连续.

证　已知$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y)=A$，即

$\forall \varepsilon>0, \exists B>1, \forall (x,y)\in\mathbf{R}^2: |x|>B, |y|>B$，有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

从而，$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2): |x_1|>B, |x_2|>B, |y_1|>B, |y_2|>B$，有

$$\begin{aligned}
&|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| \\
&\leqslant |f(x_1,y_1)-A|+|f(x_2,y_2)-A|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,
\end{aligned}$$

即$f(x,y)$在区域$D=\{(x,y)\,|\,|x|>B, |y|>B\}$一致连续.

已知$f(x,y)$在有界闭正方形区域$G=\{(x,y)\,|\,|x|<B+1, |y|<B+1\}$连续，从而一致连续，即

对上述$\varepsilon>0, \exists \delta>0(\delta<1), \forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in G$，且$|x_1-x_2|<\delta, |y_1-y_2|<\delta$，有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon.$$

于是，$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbf{R}^2: |x_1-x_2|<\delta, |y_1-y_2|<\delta$（此时，点$(x_1,y_1)$与$(x_2,y_2)$同时属于$D$或同时属于$G$），有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<2\varepsilon,$$

即 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 一致连续.

17. 应用致密性定理证明定理 8.

定理 8.（一致连续性）若 $f(P)$ 在有界闭区域 D 连续，则 $f(P)$ 在 D 一致连续.

证 用反证法 假设 $f(P)$ 在 D 非一致连续，即

$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists P',P''\in D:|P'-P''|<\delta$，有

$$|f(P')-f(P'')|\geqslant\varepsilon_0,$$

当 $\delta=1$ 时，$\exists P'_1,P''_1\in D:|P'_1-P''_1|<1$，有 $|f(P'_1)-f(P''_1)|\geqslant\varepsilon_0$，

当 $\delta=\dfrac{1}{2}$ 时，$\exists P'_2,P''_2\in D:|P'_2-P''_2|<\dfrac{1}{2}$，有

$$|f(P'_2)-f(P''_2)|\geqslant\varepsilon_0,$$

… …

当 $\delta=\dfrac{1}{n}$ 时，$\exists P'_n,P''_n\in D:|P'_n-P''_n|<\dfrac{1}{n}$，有 $|f(P'_n)-f(P''_n)|\geqslant\varepsilon_0$，

… …

从而得到两个有界点列 $\{P'_n\}$ 与 $\{P''_n\}$. 根据致密性定理，点列 $\{P'_n\}$ 存在收敛子列 $\{P'_{n_k}\}$，设 $\lim\limits_{k\to\infty}P'_{n_k}=P_0\in D$. 又有

$$\lim_{k\to\infty}P''_{n_k}=\lim_{k\to\infty}[(P''_{n_k}-P'_{n_k})+P'_{n_k}]=P_0\in D.$$

一方面，已知 $f(P)$ 在 P_0 连续，有

$$\lim_{k\to\infty}|f(P'_{n_k})-f(P''_{n_k})|=|f(P_0)-f(P_0)|=0;$$

另一方面，已知 $\forall n_k\in\mathbf{N}$，有

$$|f(P'_{n_k})-f(P''_{n_k})|\geqslant\varepsilon_0,$$

与 $\lim\limits_{k\to\infty}|f(P'_{n_k})-f(P''_{n_k})|=0$ 矛盾. 于是，$f(P)$ 在有界闭区域 D 一致连续.

* * * *

18. 证明：极限 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$ 存在 $\Longleftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall P_1,P_2:0<|P_1-P_0|<\delta$ 与 $0<|P_2-P_0|<\delta$,

有

$$|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon.\quad(\text{柯西收敛准则})$$

证 $\Rightarrow$ 已知 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$ 存在，设 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=a$，即

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall P:0<|P-P_0|<\delta$，有

$$|f(P)-a|<\varepsilon.$$

从而，$\forall P_1,P_2:0<|P_1-P_0|<\delta$ 与 $0<|P_2-P_0|<\delta$，有

$$|f(P_1)-f(P_2)|$$
$$\leqslant|f(P_1)-a|+|a-f(P_2)|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

$\Leftarrow$ 已知 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall P_1,P_2:0<|P_1-P_0|<\delta$ 与 $0<|P_2-P_0|<\delta$，有

$$|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon.$$

任取（注意"任取"二字）点列 $\{Q_n\}$，且 $Q_n\neq P_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}Q_n=P_0$。从而，对上述 $\delta>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall m,n>N$，当 $0<|Q_m-P_0|<\delta$ 与 $0<|Q_n-P_0|<\delta$ 时，有

$$|f(Q_m)-f(Q_n)|<\varepsilon.$$

根据数列柯西收敛准则，对任意点列 $\{Q_n\}$，只要 $Q_n\neq P_0$ 以及 $\lim\limits_{n\to\infty}Q_n=P_0$，数列 $\{f(Q_n)\}$ 都收敛.

首先证明，它们有相同的极限，即若有两个点列 $\{A_n\}$ 与 $\{B_n\}$，且 $A_n\neq P_0$，$B_n\neq P_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=P_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}B_n=P_0$，并设 $\lim\limits_{n\to\infty}f(A_n)=e$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}f(B_n)=g$，则 $e=g$. 用反证法. 假设 $e\neq g$. 将两个点列 $\{A_n\}$ 与 $\{B_n\}$ 合并为一个点列 $\{C_n\}$，其中 $C_{2n-1}=A_n$，$C_{2n}=B_n$. 显然，$\forall n\in\mathbf{N}$，有 $C_n\neq P_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}C_n=P_0$，而数列 $\{f(C_n)\}$ 却不收敛（因为它的奇偶子列有不同的极限）. 与上述结论矛盾. 于是，$e=g$，即它们有相同的极限，并设极限等于 a.

其次证明，$\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=a$（根据海涅定理，若极限 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$ 存在，它的极限只能是 a）.

用反证法. 假设 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)\neq a$，即

$\exists \varepsilon_0>0, \forall \delta>0, \exists E: 0<|E-P_0|<\delta$，有
$$|f(E)-a| \geqslant \varepsilon_0.$$
$\forall n \in \mathbf{N}$，令 $\delta=\frac{1}{n}$，$\exists E_n: 0<|E_n-P_0|<\frac{1}{n}$，有
$$|f(E_n)-a| \geqslant \varepsilon_0.$$
从而得到一个点列$\{E_n\}$，且 $E_n \neq P_0$，$\lim\limits_{n \to \infty} E_n=P_0$，而数列$\{f(E_n)\}$却不收敛于 a. 与上述结论矛盾. 于是，$f(P)$在 P_0 存在极限，即$\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$存在.

19. 证明：若函数 $f(x,y)$分别对每个变量 x 与 y 都连续，并对 x 又是单调的，则函数 $f(x,y)$连续.

证 $\forall P_0(x_0,y_0)$. 已知 $f(x,y)$在 P_0 分别对 x 与 y 都连续，即
$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，

当 $x=x_0 \pm \delta$，有 $|f(x_0 \pm \delta, y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$ 或
$$-\varepsilon<f(x_0 \pm \delta, y_0)-f(x_0,y_0)<\varepsilon.$$
$\forall y: |y-y_0| \leqslant \delta$，有 $|f(x_0 \pm \delta, y)-f(x_0 \pm \delta, y_0)|<\varepsilon$ 或
$$-\varepsilon<f(x_0 \pm \delta, y)-f(x_0 \pm \delta, y_0)<\varepsilon.$$

又已知 $f(x,y)$对 x 是单调的，不妨设它是单调增加，$\forall (x,y): x_0-\delta \leqslant x \leqslant x_0+\delta, y_0-\delta \leqslant y \leqslant y_0+\delta$，有
$$f(x_0-\delta, y) \leqslant f(x,y) \leqslant f(x_0+\delta, y).$$
于是，对上述 $\varepsilon>0$ 与 $\delta>0$，$\forall (x,y): |x-x_0| \leqslant \delta, |y-y_0| \leqslant \delta$，即 $\forall (x,y): x_0-\delta \leqslant x \leqslant x_0+\delta, y_0-\delta \leqslant y \leqslant y_0+\delta$，有
$$\begin{aligned} f(x,y)-f(x_0,y_0) &\leqslant f(x_0+\delta,y)-f(x_0,y_0) \\ &= [f(x_0+\delta,y)-f(x_0+\delta,y_0)] \\ &\quad +[f(x_0+\delta,y_0)-f(x_0,y_0)]<2\varepsilon \end{aligned}$$
与
$$\begin{aligned} f(x,y)-f(x_0,y_0) &\geqslant f(x_0-\delta,y)-f(x_0,y_0) \\ &= [f(x_0-\delta,y)-f(x_0-\delta,y_0)]+[f(x_0-\delta,y_0)-f(x_0,y_0)] \\ &> -2\varepsilon. \end{aligned}$$
于是
$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<2\varepsilon,$$
即 $f(x,y)$在 $P_0(x_0,y_0)$连续，从而 $f(x,y)$连续.

20. 证明：若函数 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant A, b\leqslant y\leqslant B\}$ 连续，函数列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[a,A]$ 一致收敛，且 $b\leqslant\varphi_n(x)\leqslant B$，则函数列

$$F_n(x)=f[x,\varphi_n(x)],\quad n=1,2,\cdots$$

在 $[a,A]$ 一致收敛.

证 已知 $f(x,y)$ 在有界闭矩形区域 D 连续，从而一致连续，即

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$：$|x_1-x_2|<\delta$，$|y_1-y_2|<\delta$，有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon.$$

特别 $x_1=x_2=x$，$|y_1-y_2|<\delta$，有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<\varepsilon.$$

已知 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[a,A]$ 一致收敛，则对上述 $\delta>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n,m>N$，$\forall x\in[a,A]$，有

$$|\varphi_m(x)-\varphi_n(x)|<\delta,$$

从而，有

$$|F_m(x)-F_n(x)|=|f[x,\varphi_m(x)]-f[x,\varphi_n(x)]|<\varepsilon,$$

即 $\{F_n(x)\}$ 在 $[a,A]$ 一致收敛.

练习题 10.3

（《讲义》下册，第 176 页）

1. 求函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

的偏导数.

解 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，应用求导公式

$$f'_x(x,y)=\frac{(x^2+y^2)\cdot y-xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f'_y(x,y)=\frac{(x^2+y^2)\cdot x-xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

当 $x^2+y^2=0$(即在(0,0)点)时,应用偏导数定义.

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0.$$

2. 求下列函数的偏导数:

(2) $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-x\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(4) $u=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}(x+\sqrt{x^2+y^2})}.$$

(6) $u=\arcsin\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$. $(|x|>|y|)$

解 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}\cdot\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{xy^2\sqrt{2(x^2-y^2)}}{|y|(x^4-y^4)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}$$

$$\cdot \frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=-\frac{x^2y\sqrt{2(x^2-y^2)}}{|y|(x^4-y^4)}.$$

(8) $u=\left(\frac{x}{y}\right)^z$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\cdot\frac{1}{y}=\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y}=\left(\frac{x}{y}\right)^z(\ln x-\ln y).$$

5. 求下列复合函数的偏导数：

(1) $u=f(x,y)$，而 $x=s+t,\ y=st$.

解 $\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}+t\frac{\partial f}{\partial y}$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}+s\frac{\partial f}{\partial y}.$$

(2) $u=f(x,y,z)$，而$x=r^2+s^2+t^2,y=r^2-s^2-t^2$,

$$z=r^2-s^2+t^2.$$

解 $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$

$$=2r\frac{\partial f}{\partial x}+2r\frac{\partial f}{\partial y}+2r\frac{\partial f}{\partial z}=2r\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$=2s\frac{\partial f}{\partial x}-2s\frac{\partial f}{\partial y}-2s\frac{\partial f}{\partial z}=2s\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$=2t\frac{\partial f}{\partial x}-2t\frac{\partial f}{\partial y}+2t\frac{\partial f}{\partial z}=2t\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

6. 证明下列各题：

(2)函数 $z=\operatorname{arctg}\frac{x^3-y^3}{x-y}$是方程 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\sin 2z$ 的一个解.

证 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x^3-y^3}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{3x^2(x-y)-(x^3-y^3)}{(x-y)^2}$

$$=\frac{2x^3-3x^2y+y^3}{(x-y)^2+(x^3-y^3)^2},$$

同样
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3-3xy^2+2y^3}{(x-y)^2+(x^3-y^3)^2}.$$

有
$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2(x-y)(x^3-y^3)}{(x-y)^2+(x^3-y^3)^2}.$$

已知 $\mathrm{tg}z=\frac{x^3-y^3}{x-y}$，有

$$\sin 2z=\frac{2\mathrm{tg}z}{1+\mathrm{tg}^2z}=\frac{2\cdot\frac{x^3-y^3}{x-y}}{1+\left(\frac{x^3-y^3}{x-y}\right)^2}$$

$$=\frac{2(x-y)(x^3-y^3)}{(x-y)^2+(x^3-y^3)^2},$$

即
$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\sin 2z.$$

于是，$z=\mathrm{arctg}\,\frac{x^3-y^3}{x-y}$是方程 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\sin 2z$ 的解.

7. 证明：若 $f'_x(x,y)$与 $f'_y(x,y)$在矩形域 D 有界，则函数 $f(x,y)$在 D 一致连续.

证 已知 $f'_x(x,y)$与 $f'_y(x,y)$在 D 有界，即

$\exists M>0,\forall(x,y)\in D$，有$|f'_x(x,y)|\leqslant M$ 与$|f'_y(x,y)|\leqslant M$.

$\forall P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)\in D$，有 $Q(x_2,y_1)\in D$. $\forall\varepsilon>0$，要使不等式

$$|f(P_1)-f(P_2)|=|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|$$
$$\leqslant|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_1)|+|f(x_2,y_1)-f(x_2,y_2)|$$
$$=|f'_x(\xi,y_1)||x_1-x_2|+|f'_y(x_2,\eta)||y_1-y_2|$$
$$\leqslant M(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|)\leqslant 2M|P_1-P_2|<\varepsilon$$

(其中 ξ 在 x_1 与 x_2 之间，η 在 y_1 与 y_2 之间)成立，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2M}>0$，于是

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta=\frac{\varepsilon}{2M}>0, \forall P_1, P_2 \in D: |P_1-P_2|<\delta$，有

$$|f(P_1)-f(P_2)|=|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|$$
$$\leqslant 2M|P_1-P_2|<\varepsilon,$$

即 $f(x,y)$ 在 D 一致连续.

8. 证明：若函数 $f(x,y)$ 在区域 D 对变量 x 连续（对每个固定的变量 y），且 $f'_y(x,y)$ 在 D 有界，则函数 $f(x,y)$ 在 D 连续.

证 $\forall (x_0,y_0)\in D$，往证 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续.

$\forall (x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in D$. 当 $|\Delta x|$，$|\Delta y|$ 充分小时，可使点 $(x_0+\Delta x, y_0)\in D$.

已知一元函数 $f(x,y_0)$ 在 x_0 连续，即

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta_1>0, \forall \Delta x: |\Delta x|<\delta_1$，有

$$|f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

又已知 $f'_y(x,y)$ 在 D 有界，即

$$\exists M>0, \forall (x,y)\in D，有 |f'_y(x,y)|\leqslant M.$$

于是，$\forall \varepsilon>0, \exists \delta=\min\{\delta_1,\varepsilon\}>0, \forall (x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in D: |\Delta x|<\delta$ 与 $|\Delta y|<\delta$，有

$$\begin{aligned}
&|f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|\\
\leqslant &|f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)|\\
&\quad +|f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\
= &|f'_y(x_0+\Delta x,y_0+\theta\Delta y)||\Delta y|\\
&\quad +|f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\
\leqslant &M|\Delta y|+|f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)|<M\varepsilon+\varepsilon\\
= &(M+1)\varepsilon
\end{aligned}$$

其中 $0<\theta<1$，即 $f(x,y)$ 在任意点 (x_0,y_0) 连续，从而 $f(x,y)$ 在 D 连续.

12. 求下列曲面在指定点的切平面方程与法线方程：

(2) $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$，在点 $\left(1,1,\frac{\pi}{4}\right)$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$，　　$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=-\dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，　　$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=\dfrac{1}{2}$.

切平面方程

$$-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)-\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=0 \quad 或 \quad 2x-2y+4z=\pi.$$

法线方程

$$\frac{x-1}{-\frac{1}{2}}=\frac{y-1}{\frac{1}{2}}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{-1} \quad 或 \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}.$$

13. 求函数 $z=x^2-xy+y^2$ 在点(1,1)沿与 x 轴正向组成 α 角的射线 l 的方向导数．α 角取何值，方向导数有：(1)最大值；(2)最小值；(3)等于 0.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-y$，　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-x+2y$.

$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=1$，　　$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=1$.

于是，在点(1,1)沿射线 l 的方向导数

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}\cos\alpha+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$
$$=\cos\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

当 $\dfrac{\pi}{4}-\alpha=0$，即 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$\dfrac{\partial z}{\partial l}$ 有最大值；

当 $\dfrac{\pi}{4}-\alpha=-\pi$，即 $\alpha=\dfrac{5\pi}{4}$ 时，$\dfrac{\partial z}{\partial l}$ 有最小值；

当 $\dfrac{\pi}{4}-\alpha=-\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{\pi}{4}-\alpha=-\dfrac{3\pi}{2}$，即 $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$ 或 $\alpha=\dfrac{7\pi}{4}$ 时，$\dfrac{\partial z}{\partial l}=0$.

14. 求下列函数在指定点和指定方向的方向导数：

(2)　$u=x^2-xy+z^2$，从点(1,0,1)到点(3,−1,3)的方向．

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x-y$，　　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-x$，　　$\dfrac{\partial u}{\partial z}=2z$.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,0,1)}=2,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,0,1)}=-1,\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,0,1)}=2.$$

由空间解析几何知，由点(1,0,1)到点(3,－1,3)的射线 l 的方向余弦：

$$\cos\alpha=\frac{2}{3},\quad \cos\beta=-\frac{1}{3},\quad \cos\gamma=\frac{2}{3}.$$

于是，在点(1,0,1)沿射线 l 的方向导数

$$\frac{\partial u}{\partial l}=2\cdot\frac{2}{3}+(-1)\left(-\frac{1}{3}\right)+2\cdot\frac{2}{3}=3.$$

*　　*　　*　　*

15. 证明：函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & xy=0,\\ 0, & xy\neq 0.\end{cases}$$

在原点(0,0)存在偏导数，但是在原点(0,0)不可微.

证　$\forall\Delta x\neq 0,\Delta y\neq 0$，有

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-1}{\Delta x}=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1-1}{\Delta x}=0.$$

即 $f(x,y)$ 在原点(0,0)存在偏导数.

沿 x 轴($y=0$)，有　$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}}f(x,y)=1,$

沿直线 $y=x$，有　$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}f(x,x)=0.$

即函数 $f(x,y)$ 在原点(0,0)不存在极限，从而 $f(x,y)$ 在原点(0,0)不连续. 于是，$f(x,y)$ 在原点(0,0)也不可微.

16. 证明：函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

在原点(0,0)连续，且存在偏导数，但是在原点(0,0)不可微.

证 $\forall(x,y)$，且 $x^2+y^2\neq 0$，$\forall\varepsilon>0$，要使不等式

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\frac{|x^2y|}{x^2+y^2}\leqslant\frac{2|xy|}{x^2+y^2}\cdot|x|\leqslant|x|<\varepsilon$$

成立，取 $\delta=\varepsilon$，于是，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon>0$，$\forall(x,y)$：$|x|<\delta$，$|y|<\delta$，有

$$|f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon,$$

即 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 连续. $\forall\Delta x\neq 0$ 与 $\Delta y\neq 0$ 分别有

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0.$$

即 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 存在偏导数.

下面证明，$f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 不可微.

用反证法. 假设 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 可微，有

$$df=f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y=0.$$

$\forall(x,y)$，且 $x^2+y^2\neq 0$，有

$$\Delta f=f(x,y)-f(0,0)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}.$$

设 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$， $y=kx(k\neq 0)$，有

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f-df}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}=\lim_{\substack{x\to 0\\y=kx}}\frac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{\sqrt{(1+k^2)^3}\cdot|x|^3}=\operatorname{sgn}x\cdot\frac{k}{\sqrt{(1+k^2)^3}}\neq 0.$$

与函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 可微矛盾，即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微.

17. 证明：曲面 $xyz=a^3(a>0)$ 上任意点 (x_0,y_0,z_0) 的切平面与三个坐标面围成的四面体的体积是常数 $\frac{9a^3}{2}$.

证 将曲面方程改写为 $z=\frac{a^3}{xy}$. $z_0=\frac{a^3}{x_0y_0}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{a^3}{x^2y},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{a^3}{xy^2}.$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=-\frac{a^3}{x_0^2 y_0},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=-\frac{a^3}{x_0 y_0^2}.$$

从而，曲面上任意点(x_0,y_0,z_0)的切平面方程是

$$-\frac{a^3}{x_0^2 y_0}(x-x_0)-\frac{a^3}{x_0 y_0^2}(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

或
$$y_0 z_0(x-x_0)+z_0 x_0(y-y_0)+x_0 y_0(z-z_0)=0.$$

切平面与三个坐标轴的截距分别是 $3x_0, 3y_0, 3z_0$. 于是，四面体(看作是锥体)的体积

$$V=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}3x_0\cdot 3y_0\right)\cdot 3z_0=\frac{9}{2}x_0 y_0 z_0=\frac{9a^3}{2}.$$

练习题　10.4

(《讲义》下册，第 197 页)

1. 求下列函数的二阶导数：

(2)　$u=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

解　$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

(4)　$u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

解　$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2y^2-z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\frac{3zx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

2. 求下列函数的指定阶偏导数：

(2) $u=x^3\sin y+y^3\sin x$, $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3\partial y^3}$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2\sin y+y^3\cos x$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x\sin y-y^3\sin x$,

$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=6\sin y-y^3\cos x$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}=6\cos y-3y^2\cos x$,

$\dfrac{\partial^5 u}{\partial x^3\partial y^2}=-6\sin y-6y\cos x$, $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3\partial y^3}=-6(\cos y+\cos x)$.

(4) $f(x,y)=e^x\sin y$, $f^{(m+n)}_{x^m y^n}(0,0)$.

解 $f^{(m)}_{x^m}(x,y)=e^x\sin y$,

$$f^{(m+n)}_{x^m y^n}(x,y)=e^x\sin\left(y+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

$$f^{(m+n)}_{x^m y^n}(0,0)=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2k,\\(-1)^{k-1}, & n=2k-1.\end{cases}\quad k\in\mathbf{N}.$$

4. 求函数

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

的二阶偏导数 $f''_{xx}(0,0)$ 与 $f''_{xy}(0,0)$.

解 $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=0.$$

$\forall(x,y)$，且 $x^2+y^2\neq 0$.

$$f'_x(x,y)=\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}.$$

有 $$f''_{xx}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'_x(0+x,0)-f'_x(0,0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x^4}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=0.$$

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,0+y)-f'_x(0,0)}{y}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0.$$

于是，$f''_{xx}(0,0)=f''_{xy}(0,0)=0$.

6. 证明：若 $u=x^m y^n$，其中 $m+n=1$，则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=0.\quad (x>0,y>0)$$

证 $$\frac{\partial u}{\partial x}=mx^{m-1}y^n,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=nx^m y^{n-1},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=m(m-1)x^{m-2}y^n,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=n(n-1)x^m y^{n-2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=mnx^{m-1}y^{n-1}.$$

于是，$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2$$

$$=[m(m-1)n(n-1)-m^2n^2]x^{2m-2}y^{2n-2}$$

$$=[mn(mn-n-m+1)-m^2n^2]x^{2m-2}y^{2n-2}=0.$$

7. 证明：$u=f(x,y)$，$x=s\cos\alpha-t\sin\alpha$，$y=s\sin\alpha+t\cos\alpha$，则

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \text{ 与 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

证 $$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha,\quad \frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}2\sin\alpha\cos\alpha+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\alpha.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin^2\alpha-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}2\sin\alpha\cos\alpha+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\alpha.$$

于是，$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha\right)^2+\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha\right)^2$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}2\sin\alpha\cos\alpha+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\alpha$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin^2\alpha-\frac{\partial^2 u}{\partial xy}2\sin\alpha\cos\alpha+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\alpha$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

8. 证明：$u=f(x,y,z)$在空间直交变换

$x=a_1r+b_1s+c_1t,y=a_2r+b_2s+c_2t,z=a_3r+b_3s+c_3t$

下（a_i,b_i,c_i 都是常数）有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

证 $\frac{\partial u}{\partial r}=a_1\frac{\partial u}{\partial x}+a_2\frac{\partial u}{\partial y}+a_3\frac{\partial u}{\partial z}.$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=a_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a_1a_2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_1a_3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$$

$$+a_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a_1a_2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_2a_3\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$$

$$+a_3^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+a_1a_3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+a_2a_3\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}.$$

将上式中的 a_1,a_2,a_3 分别换为 b_1,b_2,b_3 与 c_1,c_2,c_3，就得到$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$与$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$；有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$=(a_1^2+b_1^2+c_1^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(a_2^2+b_2^2+c_2^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$+(a_3^2+b_3^2+c_3^2)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

$$+2(a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3)\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+2(a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1)\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}.$$

已知 $x=a_1r+b_1s+c_1t, y=a_2r+b_2s+c_2t, z=a_3r+b_3s+c_3t$ 直交，即

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=1, a_2^2+b_2^2+c_2^2=1, a_3^2+b_3^2+c_3^2=1, \text{且}$$

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0, a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3=0,$$

$$a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1=0.$$

于是，
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

9. 将下列函数在指定点展成泰勒公式：

(2) $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$，在点$(1,1,1)$.

解 $f(1,1,1)=0$.

$f'_x(1,1,1)=f'_y(1,1,1)=f'_z(1,1,1)=0$,

$f''_{xx}(1,1,1)=f''_{yy}(1,1,1)=f''_{zz}(1,1,1)=6$,

$f''_{xy}(1,1,1)=f''_{yz}(1,1,1)=f''_{zx}(1,1,1)=-3$,

$f'''_{x^3}(1,1,1)=f'''_{y^3}(1,1,1)=f'''_{z^3}(1,1,1)=6$,

$f'''_{xy^2}(1,1,1)=f'''_{yz^2}(1,1,1)=f'''_{zx^2}(1,1,1)$

$=f'''_{yx^2}(1,1,1)=f'''_{zy^2}(1,1,1)=f'''_{xz^2}(1,1,1)=0$,

$f'''_{xyz}(1,1,1)=-3$.

高于 3 阶的偏导数都恒为 0. 于是，由泰勒公式，有

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^3+y^3+z^3-3xyz \\ &= 3[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-(x-1)(y-1) \\ &\quad -(y-1)(z-1)-(z-1)(x-1)]+(x-1)^3 \\ &\quad +(y-1)^3+(z-1)^3-3(x-1)(y-1)(z-1). \end{aligned}$$

11. 将函数 $f(x,y)=e^{x+y}$ 在点$(1,-1)$展成幂级数.

解 $e^{x+y}=e^{x-1+y+1}=e^{x-1}\cdot e^{y+1}$. 已知

$$e^{x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}, \quad e^{y+1}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(y+1)^m}{m!}.$$

$\forall (x,y)\in \mathbf{R}^2$，这两个幂级数都绝对收敛. 根据§9.1 定理 14，有

$$e^{x+y}=e^{x-1}\cdot e^{y+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(y+1)^m}{m!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n(y+1)^m}{n!m!}.$$

12. 求下列函数的极值：

(2) $u=(2ax-x^2)(2by-y^2)$, $ab\neq 0$.

解 令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2y(a-x)(2b-y)=0,\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=2x(b-y)(2a-x)=0.\end{cases}$$

解得五个稳定点：$(0,0)$，(a,b)，$(2a,2b)$，$(0,2b)$，$(2a,0)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-2y(2b-y),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=4(a-x)(b-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2x(2a-x).$$

$$\Delta(x,y)=16(a-x)^2(b-y)^2-4xy(2a-x)(2b-y).$$

$$\Delta(a,b)=-4a^2b^2<0,\quad A=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(a,b)}=-2b^2<0.$$

于是，(a,b)是函数 u 的极大点，极大值 $u|_{(a,b)}=a^2b^2$.

$$\Delta(0,0)=\Delta(2a,2b)=\Delta(0,2b)=\Delta(2a,0)=16a^2b^2>0.$$

于是，$(0,0)$，$(2a,2b)$，$(0,2b)$，$(2a,0)$都不是极值点.

(4) $u=(ax^2+by^2)e^{-(x^2+y^2)}$, $0<a<b$.

解 令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x[a-(ax^2+by^2)]e^{-(x^2+y^2)}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=2y[b-(ax^2+by^2)]e^{-(x^2+y^2)}=0.\end{cases}$$

解得五个稳定点：$(0,0)$，$(0,\pm 1)$，$(\pm 1,0)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(2a-10ax^2+4ax^4-2by^2+4bx^2y^2)e^{-(x^2+y^2)},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(2b-10by^2+4by^4-2ax^2+4ax^2y^2)e^{-(x^2+y^2)},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=(-4bxy-4axy+4ax^3y+4bxy^3)e^{-(x^2+y^2)}.$$

$$\Delta(x,y)=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

$$\Delta(0,0)=-4ab<0,\quad A=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}=2a>0.$$

于是，$(0,0)$是 u 的极小点，极小值是 $u|_{(0,0)}=0$.

$$\Delta(0,\pm 1)=-2(a-b)(-4b)e^{-2}<0,$$

$$A=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(0,\pm 1)}=2(a-b)e^{-1}<0.$$

于是，$(0,\pm 1)$是 u 的极大点，极大值是 $u|_{(0,\pm 1)}=\frac{b}{e}$.

$$\Delta(\pm 1,0)=4a\cdot 2(b-a)e^{-2}>0.$$

于是，$(\pm 1,0)$不是 u 的极值点.

14. 在半径为 a 的半球内，求出体积为最大的内接长方体的边长.

解 设半球面的方程是

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

设内接长方体的长、宽、高分别是 $2x$、$2y$、z. 于是，长方体的体积

$$V=4xyz=4xy\sqrt{a^2-x^2-y^2},\quad x>0,y>0,x^2+y^2<a^2.$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial x}=4y\sqrt{a^2-x^2-y^2}-\dfrac{4x^2y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=0,\\ \dfrac{\partial V}{\partial y}=4x\sqrt{a^2-x^2-y^2}-\dfrac{4xy^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=0.\end{cases}$$

解得唯一稳定点$\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$. 由题意知，$V$ 必取最大值，又有唯一一个稳定点. 于是，V 必在稳定点$\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$取最大值. 从而，内接长方体的长、宽、高分别是 $\frac{2a}{\sqrt{3}}$，$\frac{2a}{\sqrt{3}}$，$\frac{a}{\sqrt{3}}$.

高 $z=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{3}}$

15. 已知渠道的横截面是等腰梯形，其面积为 A，问等腰梯形的底与高各多大，才能使渠道的湿周（两腰与底之和）最小？

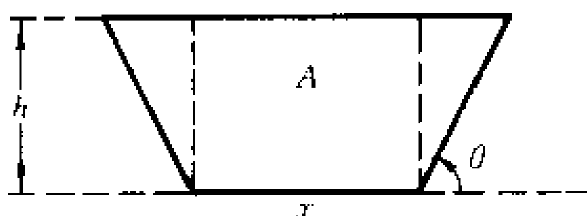


图 10.r

解 如图 10.r. 设等腰梯形的下底是 x，高为 h，腰与底的延长线夹角是 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，渠道的湿周为 L. 已知等腰梯形的面积

$$A=\frac{1}{2}(2x+2h\operatorname{ctg}\theta)h \quad 或 \quad x=\frac{A}{h}-h\operatorname{ctg}\theta.$$

于是，湿周

$$L(h,\theta)=\frac{A}{h}-h\operatorname{ctg}\theta+\frac{2h}{\sin\theta}=\frac{A}{h}+\frac{h(2-\cos\theta)}{\sin\theta}.$$

令

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial h}=-\frac{A}{h^2}+\frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}=0,\\ \frac{\partial L}{\partial\theta}=\frac{h\sin^2\theta-h(2-\cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta}=0.\end{cases}$$

解得唯一稳定点 $\left(\frac{\sqrt{A}}{\sqrt[4]{3}},\frac{\pi}{3}\right)$. 由题意知，湿周 $L(h,\theta)$ 必有最小值，又有唯一一个稳定点，于是，$L(h,\theta)$ 必在稳定点 $\left(\frac{\sqrt{A}}{\sqrt[4]{3}},\frac{\pi}{3}\right)$ 取最小值. 从而，当等腰梯形的底 $x=\frac{A}{h}-h\operatorname{ctg}\theta=\frac{2\sqrt{A}}{\sqrt[4]{27}}$，高 $h=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt[4]{3}}$ 时，渠道的湿周为最小.

*　　*　　*　　*

16. 证明：若 $u=f(x,y,z)$，而 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z=z$，则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

证 $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi,$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\varphi.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\varphi+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\varphi\sin\varphi+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}r^2\sin^2\varphi-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}r^2\sin\varphi\cos\varphi+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}r^2\cos^2\varphi$$
$$-\frac{\partial u}{\partial x}r\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial y}r\sin\varphi.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial z},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

于是，$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$

17. 证明：若 $z=f(u,v)$，$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，而函数 u 与 v 满足柯西-黎曼方程：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$，则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right].$$

证 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\tag{1}$$
$$+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

同样，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}$

$$+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.\tag{2}$$

由柯西-黎曼方程$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=0\right)$，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=0.$$

同样，$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$.

(1)式与(2)式等号两端相加，再应用上述结果与柯西-黎曼方程，有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right].$$

18. 证明：若 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$和 $f''_{xy}(x,y)$在点 $P(x_0,y_0)$邻域存在，且 $f''_{xy}(x,y)$在点 $P(x_0,y_0)$连续，则 $f''_{yx}(x,y)$在 $P(x_0,y_0)$也存在，且

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0).\quad（较定理1的条件弱）$$

证　已知 $f''_{xy}(x,y)$在点 $P(x_0,y_0)$存在，根据二阶偏导数定义，累次极限

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f'_x(x_0,y_0+\Delta y)-f'_x(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}\left\{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)}{\Delta x}\right.$$

$$\left.-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\right\}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)+f(x_0,y_0)}{\Delta x\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{W}{\Delta x\Delta y}$$

存在，其中 $W=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)$
$+f(x_0,y_0)$.

同样，$f''_{yx}(x_0,y_0)$也可形式地写成

$$f''_{yx}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{W}{\Delta x\Delta y}.$$

往证,累次极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{W}{\Delta x\Delta y}$也存在(即 $f''_{yx}(x_0,y_0)$存在). 为此,首先证明

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{W}{\Delta x\Delta y}=f''_{xy}(x_0,y_0).$$

事实上,设 $\varphi(x)=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)$. 于是

$$W=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0).$$

根据一元函数的拉格朗日定理,有

$$\frac{W}{\Delta x\Delta y}=\frac{1}{\Delta x\Delta y}[\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)]=\frac{1}{\Delta y}\varphi'_x(x_0+\theta_1\Delta x)$$

$$=\frac{1}{\Delta y}[f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)-f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0)]$$

$$=f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y),\qquad 0<\theta_1<1,0<\theta_2<1.$$

已知 $f''_{xy}(x,y)$在点 $P(x_0,y_0)$连续,有

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{W}{\Delta x\Delta y}=f''_{xy}(x_0,y_0).$$

又已知 $f'_x(x,y)$与 $f'_y(x,y)$在点 $P(x_0,y_0)$邻域存在. 所以,当 Δx 充分小时,极限$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{W}{\Delta y}$存在. 根据§10.2定理1①,有

$$f''_{yx}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{W}{\Delta x\Delta y}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{W}{\Delta x\Delta y}=f''_{xy}(x_0,y_0),$$

即 $f''_{yx}(x_0,y_0)$存在,且 $f''_{yx}(x_0,y_0)=f''_{xy}(x_0,y_0)$.

19. 证明:若函数 $f(x,y)$在点(0,0)邻域存在二阶连续偏导数,

---

① 从§10.2定理1的证明可看到:若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$与 $\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$(或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$)存在,则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y)\quad(\text{或}\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)).$$

则

$$f''_{xx}(0,0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f\left(2h,e^{-\frac{1}{2h}}\right)-2f\left(h,e^{-\frac{1}{h}}\right)+f(0,0)}{h^2}.$$

证 当 $h(>0)$ 很小时，$2h, e^{-\frac{1}{2h}}, e^{-\frac{1}{h}}$ 也都是很小的正数. 由泰勒公式(展到二阶)，有

$$f\left(2h,e^{-\frac{1}{2h}}\right)=f(0,0)+f'_x(0,0)\cdot 2h+f'_y(0,0)e^{-\frac{1}{2h}}$$

$$+\frac{1}{2}f''_{xx}(\xi_1,\eta_1)4h^2+f''_{xy}(\xi_1,\eta_1)2he^{-\frac{1}{2h}}$$

$$+\frac{1}{2}f''_{yy}(\xi_1,\eta_1)e^{-\frac{1}{h}},$$

$$f\left(h,e^{-\frac{1}{h}}\right)=f(0,0)+f'_x(0,0)h+f'_y(0,0)e^{-\frac{1}{h}}$$

$$+\frac{1}{2}f''_{xx}(\xi_2,\eta_2)h^2+f''_{xy}(\xi_2,\eta_2)he^{-\frac{1}{h}}$$

$$+\frac{1}{2}f''_{yy}(\xi_2,\eta_2)e^{-\frac{2}{h}},$$

其中 $0<\xi_1<2h, 0<\eta_1<e^{-\frac{1}{2h}}; 0<\xi_2<h, 0<\eta_2<e^{-\frac{1}{h}}$. 有

$$f\left(2h,e^{-\frac{1}{2h}}\right)-2f\left(h,e^{-\frac{1}{h}}\right)+f(0,0)$$

$$=f'_y(0,0)\left(e^{-\frac{1}{2h}}-2e^{-\frac{1}{h}}\right)+2f''_{xx}(\xi_1,\eta_1)h^2-f''_{xx}(\xi_2,\eta_2)h^2$$

$$+2f''_{xy}(\xi_1,\eta_1)he^{-\frac{1}{2h}}-2f''_{xy}(\xi_2,\eta_2)he^{-\frac{1}{h}}+\frac{1}{2}f''_{yy}(\xi_1,\eta_1)e^{-\frac{1}{h}}$$

$$-f''_{yy}(\xi_2,\eta_2)e^{-\frac{2}{h}}.$$

已知 $f''_{xx}(x,y), f''_{xy}(x,y), f''_{yy}(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 邻域连续，从而 $f''_{xy}(x,y)$ 与 $f''_{yy}(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 邻域有界.

易证：

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{2h}}}{h^2}=\lim_{h\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h^2}=\lim_{h\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{2h}}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h}=0.$$

而 $$\lim_{h\to 0}\frac{2f''_{xx}(\xi_1,\eta_1)h^2-f''_{xx}(\xi_2,\eta_2)h^2}{h^2}$$

$$=2f''_{xx}(0,0)-f''_{xx}(0,0)=f''_{xx}(0,0).$$

于是，

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f\left(2h,e^{-\frac{1}{2h}}\right)-2f\left(h,e^{-\frac{1}{h}}\right)+f(0,0)}{h^2}=f''_{xx}(0,0).$$

20. 若 $f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)=t^kf(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(\forall t>0)$，则称 n 元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 k 次齐次函数. 证明：设 $f(x,y,z)$ 可微，函数 $f(x,y,z)$ 是 k 次齐次函数 $\Longleftrightarrow$

$$xf'_x+yf'_y+zf'_z=kf(x,y,z).$$

证 $\Rightarrow$ 若 $f(x,y,z)$ 是 k 次齐次函数，即

$$f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z).$$

对上式等号两端关于 t 求导数，由复合函数求导法则，有

$$xf'_x(tx,ty,tz)+yf'_y(tx,ty,tz)+zf'_z(tx,ty,tz)$$
$$=kt^{k-1}f(x,y,z)$$

令 $t=1$，有

$$xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,y,z)=kf(x,y,z).$$

$\Leftarrow$ 若 $xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,y,z)=kf(x,y,z)$，将其中的 x,y,z 分别换为 tx,ty,tz，有 $(t>0)$

$$txf'_x(tx,ty,tz)+tyf'_y(tx,ty,tz)+tzf'_z(tx,ty,tz)$$
$$=kf(tx,ty,tz)$$

或
$$t[f'_t(tx,ty,tz)]=kf(tx,ty,tz)$$

或
$$\frac{f'_t(tx,ty,tz)}{f(tx,ty,tz)}=\frac{k}{t}.$$

等号两端求不定积分，有

$$\int\frac{f'_t(tx,ty,tz)}{f(tx,ty,tz)}dt=\int\frac{k}{t}dt$$

或
$$\ln|f(tx,ty,tz)|=k\ln t+C.$$

令 $t=1$，有 $C=\ln|f(x,y,z)|$，从而

$$\ln|f(tx,ty,tz)|=\ln|t^kf(x,y,z)|.$$

因为 $f(tx,ty,tz)$ 与 $t^kf(x,y,z)$ 同号，所以

$$f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z),$$

即 $f(x,y,z)$ 是 k 次齐次函数.

21. 证明：若 $f(x,y,z)$ 是二次可微[1]的 k 次齐次函数，则 $f'_x(x,y,z)$，$f'_y(x,y,z)$，$f'_z(x,y,z)$ 是 $k-1$ 次齐次函数.

证 已知 $f(x,y,z)$ 是二次可微的 k 次齐次函数，由第 20 题的必要性，有

$$xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,y,z)=kf(x,y,z).$$

上式等号两端对 x 求偏导数，有

$$f'_x(x,y,z)+x(f'_x)'_x+y(f'_y)'_x+z(f'_z)'_x=kf'_x(x,y,z)$$

或

$$x(f'_x)'_x+y(f'_x)'_y+z(f'_x)'_z=(k-1)f'_x(x,y,z).$$

再由第 20 题的充分性，$f'_x(x,y,z)$ 是 $k-1$ 次齐次函数.

同法可证，$f'_y(x,y,z)$，$f'_z(x,y,z)$ 也是 $k-1$ 次齐次函数.

22. 证明：若 $f(x,y,z)$ 是可微的 n 次齐次函数，而函数 $x(u,v,w)$，$y(u,v,w)$，$z(u,v,w)$ 是可微的 m 次齐次函数，则

$$F(u,v,w)=f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]$$

是 nm 次齐次函数.

证 由第 20 题的必要性知，

$$xf'_x+yf'_y+zf'_z=nf,\qquad ux'_u+vx'_v+wx'_w=mx,$$

$$uy'_u+vy'_v+wy'_w=my,\qquad uz'_u+vz'_v+wz'_w=mz.$$

有

$$F'_u=f'_xx'_u+f'_yy'_u+f'_zz'_u,$$

$$F'_v=f'_xx'_v+f'_yy'_v+f'_zz'_v,$$

$$F'_w=f'_xx'_w+f'_yy'_w+f'_zz'_w.$$

于是，

$$uF'_u+vF'_v+wF'_w=f'_x\cdot(ux'_u+vx'_v+wx'_w)$$

$$+f'_y\cdot(uy'_u+vy'_v+wy'_w)+f'_z\cdot(uz'_u+vz'_v+wz'_w)$$

$$=mxf'_x+myf'_y+mzf'_z=m(xf'_x+yf'_y+zf'_z)$$

$$=mnf=mnF.$$

再由第 20 题的充分性，$F[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]$ 是 mn 次的齐次函数.

---

① 若 $f(x,y,z)$ 二次可微，则 $f(x,y,z)$ 存在二阶偏导数，且混合偏导数与求导的顺序无关.

第十一章　隐　函　数

练习题　11.1

（《讲义》下册，第 218 页）

1. 验证下列方程在指定点邻域存在以 x 为自变量的隐函数，并求$\frac{dy}{dx}$：

(3)$\sin x+2\cos y-\frac{1}{2}=0$，在点$\left(\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right)$.

证　设　$F(x,y)=\sin x+2\cos y-\frac{1}{2}$.

1)$F'_x(x,y)=\cos x$，　$F'_y(x,y)=-2\sin y$ 在点$\left(\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right)$邻域连续.

2)　$F\left(\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right)=0$，

3)　$F'_y\left(\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right)=2\neq 0$.

根据定理 1，在点$\frac{\pi}{6}$邻域存在可微的隐函数 $y=f(x)$，且

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}=\frac{\cos x}{2\sin y}.$$

2. 验证下列方程在指定点邻域存在以 x,y 为自变量的隐函数，并求$\frac{\partial z}{\partial x}$与$\frac{\partial z}{\partial y}$：

(2)$x+y-z-\cos(xyz)=0$，在点$(0,0,-1)$.

证　设 $F(x,y,z)=x+y-z-\cos(xyz)$.

1)$F'_x(x,y,z)=1+yz\sin(xyz)$，$F'_y(x,y,z)=1+xz\sin(xyz)$，

$$F'_z(x,y,z) = -1 + xy\sin(xyz),$$

在点$(0,0,-1)$邻域都连续.

2)$F(0,0,-1)=0$,

3)$F'_z(0,0,-1)=-1\neq 0$.

根据定理 2,在点$(0,0)$邻域存在有连续偏导数的隐函数 $z=f(x,y)$,且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1+yz\sin(xyz)}{-1+xy\sin(xyz)} = \frac{1+yz\sin(xyz)}{1-xy\sin(xyz)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1+xz\sin(xyz)}{-1+xy\sin(xyz)} = \frac{1+xz\sin(xyz)}{1-xy\sin(xyz)}.$$

3. 求下列方程所确定的隐函数的导数或偏导数:

(1) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$,求$\frac{dy}{dx}$.

解 将方程改写为

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x},$$

上式等号两端对 x 求偏导数(y 是 x 的函数),有

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{xy'-y}{x^2}$$

或

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2}=\frac{xy'-y}{x^2+y^2},$$

从中解得

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}.$$

4. 证明:若方程 $F(x,y,z)=0$ 的任意一个变量都是另外两个变量的隐函数,即 $z=f(x,y)$,$x=g(y,z)$,$y=h(z,x)$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} = -1.$$

证 由求隐函数偏导数公式,有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},\quad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}},\quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

于是，
$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\cdot\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}\cdot\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-1.$$

5. 验证下列方程组在指定点邻域存在隐函数组，并求它的偏导数：

(2) $\begin{cases}u+v=x+y,\\ \dfrac{\sin u}{\sin v}=\dfrac{x}{y},\end{cases}$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$，求 du 与 dv.

证 设 $\begin{cases}F_1(x,y,u,v)=x+y-u-v,\\ F_2(x,y,u,v)=\dfrac{x}{y}-\dfrac{\sin u}{\sin v}.\end{cases}$

1) $F_1(x,y,u,v)$ 与 $F_2(x,y,u,v)$ 的所有偏导函数在点 $P\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的邻域都连续.

2) $\begin{cases}F_1\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)=0,\\ F_2\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)=0.\end{cases}$

3) $$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v}\end{vmatrix}_P=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -\dfrac{\cos u}{\sin v} & \dfrac{\sin u\cos v}{\sin^2 v}\end{vmatrix}_P$$
$$=-\frac{\sin u\cos v+\sin v\cos u}{\sin^2 v}\bigg|_P=-\frac{2}{\sqrt{3}}\neq 0.$$

根据定理 3，在点 $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的邻域存在有连续偏导数的隐函数组
$$u=u(x,y)\quad 与\quad v=v(x,y).$$

将原方程组改写为
$$\begin{cases}u+v=x+y,\\ y\sin u=x\sin v.\end{cases}$$

求微分，有（u 与 v 都是 x 与 y 的函数）

$$\begin{cases} du + dv = dx + dy, \\ y\cos u du + \sin u dy = x\cos v dv + \sin v dx. \end{cases}$$

从上述方程组中解得

$$du = \frac{(x\cos v + \sin v)dx - (\sin u - x\cos v)dy}{x\cos v + y\cos u},$$

$$dv = \frac{(y\cos u - \sin v)dx + (\sin u + y\cos u)dy}{x\cos v + y\cos u}.$$

6. 证明：若 $x = x(u,v)$，$y = y(u,v)$，$z = z(u,v)$ 的所有偏导数都连续，且

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则存在有连续偏导数的隐函数组 $z = f(x,y)$，$u = \varphi(x,y)$，$v = \psi(x,y)$.

证 设 $\begin{cases} F_1(x,y,z,u,v) = x - x(u,v), \\ F_2(x,y,z,u,v) = y - y(u,v), \\ F_3(x,y,z,u,v) = z - z(u,v). \end{cases}$

1) F_1, F_2, F_3 的所有偏导数在任意点 $P(x,y,z,u,v)$ 的邻域连续.

2) $F_1(P) = F_2(P) = F_3(P) = 0$.

3) $$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \\ \frac{\partial F_3}{\partial z} & \frac{\partial F_3}{\partial u} & \frac{\partial F_3}{\partial v} \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial x}{\partial u} & -\frac{\partial x}{\partial v} \\ 0 & -\frac{\partial y}{\partial u} & -\frac{\partial y}{\partial v} \\ 1 & -\frac{\partial z}{\partial u} & -\frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}_P$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}_P \neq 0.$$

根据定理 4，在点 $Q(x,y)$ 的邻域存在有连续偏导数的隐函数

组

$$z=f(x,y),u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y).$$

8. 验证方程组

$$\begin{cases}x^2-y\cos(uv)+z^2=0,\\x^2+y^2-\sin(uv)+2z^2=2,\\xy-\sin u\cos v+z=0.\end{cases}$$

在点 $P(x_0,y_0,z_0,u_0,v_0)=\left(1,1,0,\frac{\pi}{2},0\right)$ 的邻域满足定理 4 的条件，在点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 的邻域存在唯一一组有连续偏导数的函数组：$x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v)$，并求 $\frac{\partial x}{\partial u}$ 与 $\frac{\partial x}{\partial v}$ 在点 P 的值.

证 设

$$\begin{cases}F_1(x,y,z,u,v)=x^2-y\cos(uv)+z^2,\\F_2(x,y,z,u,v)=x^2+y^2-\sin(uv)+2z^2-2,\\F_3(x,y,z,u,v)=xy-\sin u\cos v+z.\end{cases}$$

1) F_1,F_2,F_3 的所有偏导数在点 $P\left(1,1,0,\frac{\pi}{2},0\right)$ 邻域都连续.

2) $F_1(P)=F_2(P)=F_3(P)=0$.

3) $J=\left.\frac{\partial(F_1,F_2,F_3)}{\partial(x,y,z)}\right|_P$

$$=\begin{vmatrix}2x & -\cos(uv) & 2z\\2x & 2y & 4z\\y & x & 1\end{vmatrix}_P=6\neq0.$$

根据定理 4，在点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 邻域存在唯一一个有连续偏导数的函数组：

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v).$$

在原方程组中，将 x,y,z 看作是 u 与 v 的二元函数，每个方程

分别对 u 与 v 求偏导数,有(对 u 求)

$$\begin{cases} 2x\dfrac{\partial x}{\partial u}-\cos(uv)\dfrac{\partial y}{\partial u}+yv\sin(uv)+2z\dfrac{\partial z}{\partial u}=0, \\ 2x\dfrac{\partial x}{\partial u}+2y\dfrac{\partial y}{\partial u}-v\cos(uv)+4z\dfrac{\partial z}{\partial u}=0, \\ y\dfrac{\partial x}{\partial u}+x\dfrac{\partial y}{\partial u}-\cos u\cos v+\dfrac{\partial z}{\partial u}=0. \end{cases}$$

从上述方程组,解得

$$\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_P=\frac{\begin{vmatrix} -yv\sin(uv) & -\cos(uv) & 2z \\ v\cos(uv) & 2y & 4z \\ \cos u\cos v & x & 1 \end{vmatrix}_P}{\begin{vmatrix} 2x & -\cos(uv) & 2z \\ 2x & 2y & 4z \\ y & x & 1 \end{vmatrix}_P}=0.$$

同法可得
$$\left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_P=\frac{\pi}{12}.$$

9. 求下列函数组所确定的反函数组的偏导数:$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

(1) $x=u\cos\dfrac{v}{u},\quad y=u\sin\dfrac{v}{u}$.

解 对上面两个方程的等号两端分别对 x 求偏导数(u 与 v 都是 x,y 的函数),有

$$\begin{cases} 1=\left(\cos\dfrac{v}{u}+\dfrac{v}{u}\sin\dfrac{v}{u}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}-\sin\dfrac{v}{u}\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ 0=\left(\sin\dfrac{v}{u}-\dfrac{v}{u}\cos\dfrac{v}{u}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}+\cos\dfrac{v}{u}\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

从上面方程组解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -\sin\frac{v}{u}\\ 0 & \cos\frac{v}{u}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u} & -\sin\frac{v}{u}\\ \sin\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u} & \cos\frac{v}{u}\end{vmatrix}}=\cos\frac{v}{u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}-\sin\frac{v}{u}.$$

对(1)的两个方程等号两端分别对 y 求偏导数，同样的方法，解得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sin\frac{v}{u}\quad 与\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}.$$

10. 证明：若 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$，则在任意点$(r_0,\varphi_0)$（其中 $r_0>0, -\infty<\varphi_0<+\infty$）的邻域存在反函数组. 但是，在 $r\varphi$ 平面上不存在反函数组.

证　设 $\begin{cases}F_1(r,\varphi,x,y)=x-r\cos\varphi,\\ F_2(r,\varphi,x,y)=y-r\sin\varphi.\end{cases}$

1）显然，F_1,F_2 的所有偏导数在点 $P(r_0,\varphi_0,x_0,y_0)$ 的充分小的邻域连续（其中 $x_0=r_0\cos\varphi_0, y_0=r_0\sin\varphi_0$）.

2）$F_1(P)=F_2(P)=0$.

3）$J=\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(r,\varphi)}\right|_P=\left.\begin{vmatrix}-\cos\varphi & r\sin\varphi\\ -\sin\varphi & -r\cos\varphi\end{vmatrix}\right|_P=r_0>0.$

根据定理 3 的推论，在点(x_0,y_0)的邻域存在有连续偏导数的反函数组：

$$r=r(x,y),\quad \varphi=\varphi(x,y).$$

但是，在 $r\varphi$ 平面上，φ 轴上的所有点$(0,\varphi)$（即 $r=0, -\infty<\varphi<+\infty$）都对应 xy 平面上的原点$(0,0)$，即不是一一对应. 因此，在 $r\varphi$ 平面上它不存在反函数.

*　*　*　*

11. 证明：方程 $x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz.$$

证 对给定的方程等号两端分别对 x 与 y 求偏导数，有

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\frac{z}{y}\right)\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=f\left(\frac{z}{y}\right)+f'\left(\frac{z}{y}\right)\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{z}{y}f'\left(\frac{z}{y}\right).$$

从上面两个方程分别解得：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{f'\left(\frac{z}{y}\right)-2z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y+\frac{z}{y}f'\left(\frac{z}{y}\right)-f\left(\frac{z}{y}\right)}{f'\left(\frac{z}{y}\right)-2z}.$$

于是，将 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 代入原方程之中，有

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$=\frac{2x(x^2-y^2-z^2)+2xy\left[2y+\frac{z}{y}f'\left(\frac{z}{y}\right)-f\left(\frac{z}{y}\right)\right]}{f'\left(\frac{z}{y}\right)-2z}$$

$$=\frac{2x(x^2-y^2-z^2)+2x\left[2y^2+zf'\left(\frac{z}{y}\right)-yf\left(\frac{z}{y}\right)\right]}{f'\left(\frac{z}{y}\right)-2z}$$

$$=\frac{2x(x^2-y^2-z^2)+2x\left[2y^2+zf'\left(\frac{z}{y}\right)-(x^2+y^2+z^2)\right]}{f'\left(\frac{z}{y}\right)-2z}$$

$$=\frac{2xz\left[f'\left(\frac{z}{y}\right)-2z\right]}{f'\left(\frac{z}{y}\right)-2z}=2xz.$$

12. 证明：方程 $F(x+zy^{-1}, y+zx^{-1})=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy.$$

解 设 $u=x+zy^{-1}, v=y+zx^{-1}$，方程是

$$F(u,v)=0.$$

对上面方程等号两端分别对 x 与 y 求偏导数，有

$$F'_u\left(1+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F'_v\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{z}{x^2}\right)=0,$$

$$F'_u\left(\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{z}{y^2}\right)+F'_v\left(1+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0.$$

分别解得

$$x\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y(zF'_v-x^2F'_u)}{xF'_u+yF'_v},$$

$$y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x(zF'_u-y^2F'_v)}{xF'_u+yF'_v}.$$

于是，$\quad x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$

$$=\frac{y(zF'_v-x^2F'_u)+x(zF'_u-y^2F'_v)}{xF'_u+yF'_v}$$

$$=\frac{z(xF'_u+yF'_v)-xy(xF'_u+yF'_v)}{xF'_u+yF'_v}=z-xy.$$

13. 已知方程 $\sin(x+y)+\sin(y+z)=1$ 确定了隐函数 $z=f(x,y)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 对给定的方程等号两端分别对 x 与 y 求偏导数，有

$$\cos(x+y)+\cos(y+z)\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$\cos(x+y)+\cos(y+z)\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0.$$

分别解得：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\cos(x+y)}{\cos(y+z)},\quad 1+\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\cos(x+y)}{\cos(y+z)}.$$

再对$\frac{\partial z}{\partial x}$关于 y 求偏导数，应用 $1+\frac{\partial z}{\partial y}$的结果，有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\cos(y+z)\sin(x+y)-\cos(x+y)\sin(y+z)\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\cos^2(y+z)}$$

$$=\frac{\cos^2(y+z)\sin(x+y)+\cos^2(x+y)\sin(y+z)}{\cos^3(y+z)}.$$

14. 设 $F(x,y)=f[x+g(y)]$，其中 $f(u)$ 与 $g(y)$ 都是可微函数，求 $F(x,y)$ 的一阶偏导数与二阶偏导数.

解 设 $u=x+g(y)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=f'[x+g(y)],\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=f'[x+g(y)]g'(y),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=f''[x+g(y)],$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=f''[x+g(y)][g'(y)]^2+f'[x+g(y)]g''(y),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=f''[x+g(y)]g'(y)=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}.$$

练习题 11.2

(《讲义》下册，第 227 页)

3. 证明：若 $u(x,y,z)$，$v(x,y,z)$ 都可微，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=0.$$

证 $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\end{vmatrix}+\frac{\partial u}{\partial y}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x}\end{vmatrix}+\frac{\partial u}{\partial z}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix}=0.$$ （根据行列式的性质）

4. 证明：若 $x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v)$ 都可微，则

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}dx+\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}dy+\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dz=0.$$

证 $$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}dx+\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}dy+\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dz$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)+\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right)$$

$$+\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\left(\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv\right)$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}=0.$$ （根据行列式的性质）

5. 证明：若 $u=u(x,y,z), v=v(x,y,z)$ 有连续偏导数，而 $x=x(s,t), y=y(s,t), z=z(s,t)$ 也有连续偏导数，则

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}\frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}\frac{\partial(z,x)}{\partial(s,t)}.$$

证

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix}$$

根据行列式的性质，有

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}\frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}\frac{\partial(z,x)}{\partial(s,t)}.$$

练习题 11.3

（《讲义》下册，第 238 页）

3. 求在两个曲面 $x^2-xy+y^2-z^2=1$ 与 $x^2+y^2=1$ 交线上到原

点最近的点.

解 设(x,y,z)是两曲面交线上的动点.已知它到原点的距离是

$$d(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

依题意,求距离函数$d(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$在满足联系方程组

$$\begin{cases}x^2-xy+y^2-z^2=1,\\ x^2+y^2=1,\end{cases}$$

条件下的最小值.由于在满足这个联系方程组的条件下,函数$d(x,y,z)$与$d^2(x,y,z)$有相同的最小值点,为了简化计算,下面求函数

$$d^2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

在满足上述联系方程组的条件下的最小值点,根据拉格朗日乘数法,设

$$\Phi(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=x^2+y^2+z^2$$
$$+\lambda_1(x^2-xy+y^2-z^2-1)+\lambda_2(x^2+y^2-1).$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=2x+2\lambda_1x-\lambda_1y+2\lambda_2x=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=2y-\lambda_1x+2\lambda_1y+2\lambda_2y=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}=2z-2\lambda_1z=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\lambda_1}=x^2-xy+y^2-z^2-1=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\lambda_2}=x^2+y^2-1=0.\end{cases}$$

由此方程组解得八个稳定点(去掉λ_1与λ_2的坐标):$(1,0,0)$ $(-1,0,0)$,$(0,1,0)$,$(0,-1,0)$,$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

依题意，$d^2(x,y,z)$（或 $d(x,y,z)$）必取到最小值，且只能在这八个点上取到最小值．为此，验证：

$d^2(1,0,0)=d^2(-1,0,0)=d^2(0,1,0)=d^2(0,-1,0)=1.$

$$d^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=d^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=d^2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=d^2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3}{2}.$$

于是，两曲面的交线上有四个点$(1,0,0)$，$(-1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,-1,0)$到原点的距离最近，其距离都是 1.

4. 求椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$在第一卦限部分上的切平面与三个坐标面围成四面体的最小体积.

解 在第一卦限的椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$上任取一点$(x,y,z)$ $(x>0,y>0,z>0)$，过点(x,y,z)的切平面方程是（易求）：

$$\frac{2x}{a^2}(X-x)+\frac{2y}{b^2}(Y-y)+\frac{2z}{c^2}(Z-z)=0.$$

切平面在三个坐标轴的截距分别是

$$\frac{a^2}{x},\quad \frac{b^2}{y},\quad \frac{c^2}{z}.$$

于是，切平面与三个坐标面围成的四面体（看成锥体）的体积

$$V(x,y,z)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{x}\cdot\frac{b^2}{y}\cdot\frac{c^2}{z}=\frac{a^2b^2c^2}{6xyz}.$$

$$(x>0,y>0,z>0).$$

联系方程是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

由拉格朗日乘数法，设

$$\Phi(x,y,z,\lambda)=\frac{a^2b^2c^2}{6xyz}+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right).$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=-\dfrac{a^2b^2c^2}{6x^2yz}+\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=-\dfrac{a^2b^2c^2}{6xy^2z}+\dfrac{2\lambda y}{b^2}=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}=-\dfrac{a^2b^2c^2}{6xyz^2}+\dfrac{2\lambda z}{c^2}=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\lambda}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0.\end{cases}$$

由此方程组解得在区域 $D(x>0,y>0,z>0)$ 存在唯一稳定点(去掉 λ 的坐标)$\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$.

已知函数 $V(x,y,z)$ 在开区域 D 必存在最小值,这里又只有唯一一个稳定点$\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$. 因此,$V(x,y,z)$ 必在此稳定点取最小值. 最小值就是最小的四面体的体积,即

$$V_{最小}=\frac{a^2b^2c^2}{6\,\frac{a}{\sqrt{3}}\,\frac{b}{\sqrt{3}}\,\frac{c}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc.$$

5. 求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y-2=0$ 之间的距离(即最小距离).

解 设 (x,y) 是抛物线 $y=x^2$ 上任意点,(u,v) 是直线 $u-v-2=0$ 上任意点. 已知点 (x,y) 到点 (u,v) 的距离是

$$d(x,y,u,v)=\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}.$$

依题意,求函数

$$d^2(x,y,u,v)=(x-u)^2+(y-v)^2$$

满足联系方程组:$y=x^2$ 与 $u-v-2=0$ 的最小值点.

由拉格朗日乘数法,设

$$\Phi(x,y,u,v,\lambda_1,\lambda_2)=(x-u)^2+(y-v)^2$$

$$+\lambda_1(y-x^2)+\lambda_2(u-v-2).$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=2(x-u)-2\lambda_1 x=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=2(y-v)+\lambda_1=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial u}=-2(x-u)+\lambda_2=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial v}=-2(y-v)-\lambda_2=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\lambda_1}=y-x^2=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\lambda_2}=u-v-2=0.\end{cases}$$

由此方程组解得唯一稳定点(去掉 λ_1 与 λ_2 的坐标) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{11}{8},\frac{-5}{8}\right)$. 已知 $d^2(x,y,u,v)$或 $d(x,y,u,v)$必存在最小值，这里又只有唯一一个稳定点$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{11}{8},\frac{-5}{8}\right)$. 因此 $d(x,y,u,v)$必在此稳定点取到最小值，最小值是

$$d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{11}{8},\frac{-5}{8}\right)=\sqrt{\frac{49}{32}}=\frac{7}{4\sqrt{2}}.$$

*　　*　　*　　*

6. 求二次型

$$f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy$$

满足联系方程

$$x^2+y^2+z^2=1$$

的最小值和最大值.

解　三元函数 $f(x,y,z)$在球面 $x^2+y^2+z^2=1$(有界闭区域)是连续函数，从而 $f(x,y,z)$在球面必能取到最大值与最小值，从而这

个最大值和最小值就是极小值和极大值.

由拉格朗日乘数法,设

$$\Phi(x,y,z,\lambda) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

这里取"$-\lambda$"在形式上比较简单.令

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = 2Ax + 2Ez + 2Fy - 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = 2By + 2Dz + 2Fx - 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = 2Cz + 2Dy + 2Ex - 2\lambda z = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

已知二次型函数 $f(x,y,z)$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上必取到极值,则函数 $\Phi(x,y,z,\lambda)$ 必存在稳定点,即方程组(1)必有解.设其中一组解是 (x_1,y_1,z_1,λ_1).由方程组(1)的第四个方程,有 $x_1^2+y_1^2+z_1^2=1$,即点 (x_1,y_1,z_1) 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上,显然,x_1,y_1,z_1 不能同时为零.从而 (x_1,y_1,z_1,λ_1) 必是方程组(1)的前面三个方程组成的齐次线性方程组:

$$\begin{cases} (A-\lambda)x + Fy + Ez = 0, \\ Fx + (B-\lambda)y + Dz = 0, \\ Ex + Dy + (C-\lambda)z = 0. \end{cases} \tag{2}$$

的一组非零解.有非零解的充分必要条件是系数行列式等于零,即

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & F & E \\ F & B-\lambda & D \\ E & D & C-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

行列式方程(3)是 λ 的三次方程,且 λ_1 必是这个 λ 的三次方程的

根，即 λ_1 是对称矩阵

$$\begin{matrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{matrix}$$

的特征值. 因为对称矩阵的特征值都是实数. 从而，λ 的三次方程(3)有三个实根. 设这三个实根分别是 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，且 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3$，设 $\Phi(x,y,z,\lambda)$ 与 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 对应的三个稳定点分别是：

$$(x_1,y_1,z_1,\lambda_1),(x_2,y_2,z_2,\lambda_2),(x_3,y_3,z_3,\lambda_3).$$

将稳定点 (x_3,y_3,z_3,λ_3) 的坐标代入方程组(2)，并用 x_3,y_3,z_3 分别乘方程组(2)的第一、二、三个方程，然后相加，有

$$Ax_3^2+By_3^2+Cz_3^2+2Dy_3z_3+2Ez_3x_3+2Fx_3y_3 \\ -\lambda_3(x_3^2+y_3^2+z_3^2)=0,$$

即
$$f(x_3,y_3,z_3)=\lambda_3(x_3^2+y_3^2+z_3^2).$$

已知 $x_3^2+y_3^2+z_3^2=1$，则 $f(x_3,y_3,z_3)=\lambda_3$，

同理有 $f(x_1,y_1,z_1)=\lambda_1$ 与 $f(x_2,y_2,z_2)=\lambda_2$.

于是，二次型函数 $f(x,y,z)$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的最大值就是最大的特征值 λ_3（在点 (x_3,y_3,z_3) 取到）. 最小值就是最小的特征值 λ_1（在点 (x_1,y_1,z_1) 取到）.

注 此题指出：二次型函数在单位球面上的最大值（或最小值）恰是二次型对应的对称矩阵的最大（或最小）特征值或特征根.

7. 证明不等式

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n,\quad 其中\ n\geqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0.$$

证 设 $x+y=c$. 此不等式就转化为证明函数

$$u(x,y)=\frac{1}{2}(x^n+y^n)$$

满足联系方程 $x+y=c(c>0,x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 的最小值是 $\left(\frac{c}{2}\right)^n$. 设

$$\Phi(x,y,\lambda)=\frac{1}{2}(x^n+y^n)+\lambda(x+y-c).$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = \dfrac{n}{2}x^{n-1} + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = \dfrac{n}{2}y^{n-1} + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = x + y - c = 0.\end{cases}$$

解得唯一一组解(去掉 λ 坐标):$x=y=\dfrac{c}{2}$.

因为函数 $u(x,y)$ 在第一象限内的有界闭线段 $L:x+y=c,x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 上连续,所以 $u(x,y)$ 在 L 必取最大值与最小值,从而函数 $u(x,y)$ 在 L 上的最大值和最小值必在 L 上的点 $\left(\dfrac{c}{2},\dfrac{c}{2}\right)$ 和两个端点 $(0,c)$ 与 $(c,0)$ 取到. 比较函数 $u(x,y)$ 在这三点的函数值:

$$u(0,c) = u(c,0) = \frac{c^n}{2} \geqslant \left(\frac{c}{2}\right)^n = u\left(\frac{c}{2},\frac{c}{2}\right).$$

于是,函数 $u(x,y)$ 在点 $\left(\dfrac{c}{2},\dfrac{c}{2}\right)$ 取到最小值,即

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geqslant \left(\frac{c}{2}\right)^n = \left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

8. 证明:赫尔德不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $a_i\geqslant 0,b_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n,q>1$,而 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

分析 将赫尔德不等式改写为

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad 或 \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{b_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

不难看到,只要证明,$\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$ 就是 n 元函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

满足联系方程 $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = 1$ 的最大值即可.

证 求 n 元函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \qquad (x_i \geqslant 0)$$

满足联系方程 $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = 1 (p > 1)$ 的最大值,设

$$\Phi(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p - 1\right).$$

令

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i} = a_i + p\lambda x_i^{p-1} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n, & (1) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} x_i^p - 1 = 0. & (2) \end{cases}$$

将方程(1)的等号两端乘 x_i,再对 $i=1,2,\cdots,n$ 相加,再由方程(2),有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + p\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^p = 0 \quad 或 \quad -p\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i. \qquad (3)$$

由方程(1)直接解得 $x_i = \left(-\dfrac{a_i}{p\lambda}\right)^{\frac{1}{p-1}}$,则

$$x_i^p = \left(-\frac{a_i}{p\lambda}\right)^{\frac{p}{p-1}} = \left(-\frac{a_i}{p\lambda}\right)^q. \quad (已知\frac{p}{p-1} = q).$$

然后由方程(2),有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^p = \left(-\frac{1}{p\lambda}\right)^q \sum_{i=1}^{n} a_i^q = 1 \quad 或 \quad -p\lambda = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (4)$$

由(3)式与(4)式,有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad 或 \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{x_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} = 1.$$

再由方程(2),应该有

$$x_i^p = a_i \frac{x_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \quad 或 \quad x_i = \left[\frac{a_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}\right]^{\frac{1}{p-1}} \tag{5}$$

$$i = 1,2,\cdots,n.$$

为了确定起见，将(5)式的 x_i 表为 x_i^0，即

$$x_i^0 = \left[\frac{a_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}\right]^{\frac{1}{p-1}}, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

从而，求得函数 Φ 的唯一一个稳定点(去掉 λ 的坐标)$P_n(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$. 已知 n 元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 n 维有界闭曲面 $V_n = \left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p = 1\right\}$ 连续. 从而，函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 V_n 必取到最大值与最小值. 显然，$P_n \in V_n$.

下面用归纳法证明：$\forall n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2$ ($n=1$，显然成立)，当点 P_n 满足联系方程 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p = 1$ 时，函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在点 P_n 取最大值，最大值是

$$f(P_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left[\frac{a_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}\right]^{\frac{1}{p-1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{1+\frac{1}{p-1}}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^q\right)^{\frac{1}{q(p-1)}}}$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^q}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^q\right)^{\frac{1}{p}}} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^q\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

其中 $1+\frac{1}{p-1}=q, \frac{1}{q(p-1)}=\frac{1}{p}=1-\frac{1}{q}$.

i) 设当 $n=2$ 时，函数 $f(x_1,x_2)=a_1x_1+a_2x_2$ 在满足联系方程 $x_1^p+x_2^p=1$ 条件下，在点 $P_2(x_1^0,x_2^0)$ 取到最大值，最大值是 $(a_1^q+a_2^q)^{\frac{1}{q}}$.

事实上，$V_2=\{(x_1,x_2) \mid x_1^p+x_2^p=1\}$ 是 x_1x_2 坐标面第一象限以点 $(1,0)$ 与 $(0,1)$ 为边界点的闭曲线段. 在此闭曲线段的内部(去掉两

个边界点)只有唯一稳定点 $P_2(x_1^0,x_2^0)$. 因此,函数 $f(x_1,x_2)=a_1x_1+a_2x_2$ 只能在稳定点 $P_2(x_1^0,x_2^0)$或两个边界点(1,0),(0,1)取到最大值. 比较函数 $f(x_1,x_2)=a_1x_1+a_2x_2$ 在这三点:(x_1^0,x_2^0),(1,0),(0,1)的函数值,有(x_1,x_2 最大是 1).

$$\begin{aligned}f(x_1^0,x_2^0) &= a_1x_1^0 + a_2x_2^0\\ &= a_1\left[\frac{a_1}{\left(a_1^q+a_2^q\right)^{\frac{1}{q}}}\right]^{\frac{1}{p-1}} + a_2\left[\frac{a_2}{\left(a_1^q+a_2^q\right)^{\frac{1}{q}}}\right]^{\frac{1}{p-1}}\\ &= \frac{a_1^{\frac{1}{p-1}+1}+a_2^{\frac{1}{p-1}+1}}{\left(a_1^q+a_2^q\right)^{\frac{1}{q(p-1)}}} = (a_1^q+a_2^q)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

而
$$f(1,0)=a_1\leqslant(a_1^q+a_2^q)^{\frac{1}{q}}=f(x_1^0,x_2^0),$$
$$f(0,1)=a_2\leqslant(a_1^q+a_2^q)^{\frac{1}{q}}=f(x_1^0,x_2^0).$$

于是,函数 $f(x_1,x_2)=a_1x_1+a_2x_2$,在满足联系方程 $x_1^p+x_2^p=1$ 条件下,在点(x_1^0,x_2^0)取到最大值,最大值是$(a_1^q+a_2^q)^{\frac{1}{q}}$.

ii)设当 $n=k$ 时,函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_k)$,在满足联系方程 $\sum\limits_{i=1}^{k}x_i^p=1$ 条件下,在点 $P_k(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_k^0)$取到最大值,最大值是$\left(\sum\limits_{i=1}^{k}a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$,即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_k) = \sum_{i=1}^{k}a_ix_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k}a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

当 $n=k+1$ 时,$V_{k+1}=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})\,\middle|\,\sum\limits_{i=1}^{k+1}x_i^p=1\right\}$是 $k+1$ 维空间 $\mathbf{R}^{k+1}$的有界闭曲面,它在坐标面上的边界点$(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})$至少有一个坐标 $x_i=0(i=1,2,\cdots,k+1)$. 在此有界闭曲面 V_{k+1}的内部(去掉所有的边界点),只有唯一稳定点 $P_{k+1}(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{k+1}^0)$. 因此,函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})$只能在稳定点 P_{k+1}或 V_{k+1}的边界点取到最大值,比较函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})$在这些点的函数值. 设$(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})$是 V_{k+1}的任意一个边界点,不妨设 $x_{k+1}=0$,即$(x_1,x_2,$

$\cdots,x_k,0)$，由已知条件，有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_k,0)=\sum_{i=1}^{k}a_ix_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{k}a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{k+1}a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}=f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{k+1}^0).$$

于是，函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})$，在满足联系方程 $\sum\limits_{i=1}^{k+1}a_i^p=1$ 条件下，在点 $P_{k+1}(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{k+1}^0)$取到最大值，最大值是 $\left(\sum\limits_{i=1}^{k+1}a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

综上所证，$\forall n\in\mathbf{N}$，函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，在满足联系方程 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^p=1$ 条件下，在点 $P_n(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$取到最大值，最大值是 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$，即

$\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in V_n$，有

$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

令 $x_i=\dfrac{b_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}\geqslant0,(i=1,2,\cdots,n)$，有

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^p=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^p}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^p}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^p}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^p}=1.$$

所以 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$满足联系方程时，有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{b_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

或

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

练习题 11.4

（《讲义》下册，第 247 页）

2. 在曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上求出那样的点，使此点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

解 $x'=1,\ y'=2t,\ z'=3t^2$.

设曲线上的点为 $M(x,y,z)$，曲线在点 $M(x,y,z)$ 的切线方程是

$$\frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{2t}=\frac{Z-z}{3t^2}.$$

欲使切线平行于平面 $x+2y+z=4$，即切线的方向向量$(1,2t,3t^2)$与此平面的法向量$(1,2,1)$垂直，则

$$1\cdot 1+2\cdot 2t+1\cdot 3t^2=0 \quad 或 \quad 3t^2+4t+1=0.$$

解得 $t=-1,t=-\frac{1}{3}$. 于是，曲线上那些切点是

当 $t=-1$ 时，切点是$(-1,1,-1)$，

当 $t=-\frac{1}{3}$时，切点是$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27}\right)$.

3. 求曲线 $x^2+z^2=10,y^2+z^2=10$ 在点 $P(1,1,3)$的切线方程与法平面方程.

解 设 $F_1=x^2+z^2-10,\quad F_2=y^2+z^2-10.$ 有

$$\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\right|_P=-12,\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}\right|_P=-12,\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right|_P=4.$$

于是，切线方程是

$$\frac{x-1}{-12}=\frac{y-1}{-12}=\frac{z-3}{4} \quad 或 \quad \frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-1}.$$

法平面方程是

$$3(x-1)+3(y-1)-(z-3)=0 \quad 或 \quad 3x+3y-z=3.$$

5. 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的切平面，使其平行于平面 $x+4y+6z=0$.

解 设 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=4y,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=6z.$$

于是，在曲面 $F(x,y,z)=0$ 上点(x_0,y_0,z_0)的切平面方程是

$$2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0$$

或
$$x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+3z_0(z-z_0)=0.$$

欲使切平面平行于平面 $x+4y+6z=0$，则有

$$\frac{x_0}{1}=\frac{2y_0}{4}=\frac{3z_0}{6}=k(\text{设}).$$

解得 $x_0=k, y_0=z_0=2k$，即点$(x_0,y_0,z_0)=(k,2k,2k)$.

因为点$(k,2k,2k)$在曲面 $F(x,y,z)=0$ 上，有方程

$$k^2+2(2k)^2+3(2k)^2=21.$$

解得 $k=\pm 1$. $k=1$，切点是$(1,2,2)$；$k=-1$，切点是$(-1,-2,-2)$. 于是，有两个切平面，它们的方程分别是

$$x\pm 1+4(y\pm 2)+6(z\pm 2)=0$$

$$\text{或}\quad x+4y+6z=\pm 21.$$

6. 证明：若 $P(x_0,y_0,z_0)$是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上任意一点，则点 P 的法线必通过球心$(0,0,0)$.

证 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$，且 $x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$.

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_P=2x_0,\quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_P=2y_0,\quad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_P=2z_0.$$

点 $P(x_0,y_0,z_0)$的法线方程是

$$\frac{x-x_0}{2x_0}=\frac{y-y_0}{2y_0}=\frac{z-z_0}{2z_0}\text{或}\frac{x-x_0}{x_0}=\frac{y-y_0}{y_0}=\frac{z-z_0}{z_0}.$$

当 $x=0,y=0,z=0$ 时，有

$$\frac{0-x_0}{x_0}=\frac{0-y_0}{y_0}=\frac{0-z_0}{z_0}=-1,$$

即原点$(0,0,0)$在法线上，或法线通过球心$(0,0,0)$.

7. 求曲面 $x=u\cos v, y=u\sin v, z=av$ 上在点 $P(u_0,v_0)$的切面方程与法线方程.

解 点 $P(u_0,v_0)$对应曲面上的点 $M(u_0\cos v_0, u_0\sin v_0, av_0)$.

$$\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_P = a\sin v_0,\quad \left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_P = -a\cos v_0,\quad \left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_P = u_0.$$

于是,在点 M 的切平面方程是

$$a\sin v_0(x - u_0\cos v_0) - a\cos v_0(y - u_0\sin v_0) + u_0(z - av_0) = 0$$

或 $\quad (a\sin v_0)x-(a\cos v_0)y+u_0z=au_0v_0.$

法线方程是

$$\frac{x - u_0\cos v_0}{a\sin v_0} = \frac{y - u_0\sin v_0}{-a\cos v_0} = \frac{z - av_0}{u_0}.$$

* * * *

8. 证明:若二曲面 $F_1(x,y,z)=0$, $F_2(x,y,z)=0$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$直交(二曲面在点 P 的法线垂直),则在点 $P(x_0,y_0,z_0)$,有

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial z}=0.$$

并验证二曲面 $3x^2+2y^2=2z+1$, $x^2+y^2+z^2-4y-2z+2=0$ 在点$(1,1,2)$直交.

证 曲面 $F_1(x,y,z)=0$ 与 $F_2(x,y,z)=0$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$的法向量分别是

$$\boldsymbol{n}_1=\left.\left(\frac{\partial F_1}{\partial x},\frac{\partial F_1}{\partial y},\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\right|_P \quad 与 \quad \boldsymbol{n}_2=\left.\left(\frac{\partial F_2}{\partial x},\frac{\partial F_2}{\partial y},\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\right|_P$$

已知 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 垂直,则 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$,即在点 $P(x_0,y_0,z_0)$有

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial z}=0.$$

验证 设 $F_1(x,y,z)=3x^2+2y^2-2z-1$,

$F_2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4y-2z+2.$

在点$(1,1,2)$,有

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}=6,\quad \frac{\partial F_1}{\partial y}=4,\quad \frac{\partial F_1}{\partial z}=-2,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}=2,\quad \frac{\partial F_2}{\partial y}=-2,\quad \frac{\partial F_2}{\partial z}=2.$$

有 $$\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial z}=12-8-4=0,$$

即二曲面在点(1,1,2)直交.

9. 证明:曲面 $F(nx-lz,ny-mz)=0$ 上任意一点的切平面都平行于直线$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$.

证 设 $u=nx-lz$, $v=ny-mz$.

$$W=F(u,v),\quad 而\ u=nx-lz,\quad v=ny-mz.$$

$$\frac{\partial W}{\partial x}=F'_u n,\ \frac{\partial W}{\partial y}=F'_v n,\ \frac{\partial W}{\partial z}=-(F'_u l+F'_v m).$$

从而,曲面 $F(u,v)=0$ 上任意一点(x,y,z)的法向量是

$$(nF'_u,nF'_v,-lF'_u-mF'_v).$$

而直线$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$的方向向量是$(l,m,n)$.

对曲面 $F(u,v)=0$ 上任意一点(x,y,z),有

$$l\cdot nF'_u+m\cdot nF'_v+n(-lF'_u-mF'_v)=0,$$

即曲面 $F(nx-lz,ny-mz)=0$ 上任意一点(x,y,z)的切平面都平行于直线$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$.

第十二章　广义积分与含参变量的积分

练习题　12.1

（《讲义》下册，第 265 页）

1. 求下列无穷积分：

(2) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}$.

解 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}=\lim_{p\to+\infty}\int_2^p\frac{dx}{x^2+x-2}$

$=\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{3}\int_2^p\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$=\frac{1}{3}\lim_{p\to+\infty}[\ln(x-1)-\ln(x+2)]\Big|_2^p$

$=\frac{1}{3}\lim_{p\to+\infty}\left(\ln\frac{p-1}{p+2}+\ln4\right)=\frac{2}{3}\ln2.$

(4) $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

解 $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=-2\int_1^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}d(-\sqrt{x})$

$=-2e^{-\sqrt{x}}\Big|_1^{+\infty}=\frac{2}{e}.$

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|x|}dx\quad(a>0)$.

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|x|}dx=\int_{-\infty}^0 e^{-a|x|}dx+\int_0^{+\infty}e^{-a|x|}dx$

$=2\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx$

$$=-\frac{2}{a}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty}=\frac{2}{a}.$$

(6) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx.\quad (a>0).$

解 已知 $\int e^{-ax}\sin bx dx=\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(-a\sin bx-b\cos bx)+C$（见《讲义》上册 § 7.2 例 6），有

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx=\frac{-e^{-ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx+b\cos bx)\Big|_0^{+\infty}=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

2. 判别下列无穷积分的敛散性：

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3+1}}dx.$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{4}}\frac{1}{\sqrt[4]{x^3+1}}=1.$

$\lambda=\frac{3}{4}<1, d=1>0$. 于是，无穷积分发散.

(4) $\int_1^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx,\quad (n>0,m>0).$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{n-m}\cdot\frac{x^m}{1+x^n}=1.$

$d=1$，当 $\lambda=n-m>1$，无穷积分收敛；当 $\lambda=n-m\leqslant 1$，无穷积分发散.

(6) $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}dx.$

解 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{1+x^2}=1.$

从而，函数$\frac{\operatorname{arctg}x}{x}$可在点 0 连续开拓.

$$\lim_{x\to+\infty}x\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}.$$

$\lambda=1, d=\frac{\pi}{2}>0$，无穷积分发散.

(8) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{e^x+e^{-x}}dx.$

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{e^x+e^{-x}}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{e^x+e^{-x}}dx+\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x+e^{-x}}dx.$

设 $x=-t, dx=-dt$，有

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{e^x+e^{-x}}dx=\int_{+\infty}^{0}\frac{tdt}{e^t+e^{-t}}=-\int_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{e^x+e^{-x}}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{x}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x+e^{-x}}=0.$$

$\lambda=2, d=0$. 这两个无穷积分都收敛. 从而无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{e^x+e^{-x}}dx$ 收敛.

3. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调减少，且当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to 0$，则无穷积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 同时收敛或同时发散.

证 已知 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调减少，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，则 $\forall x\in[1,+\infty)$，有 $f(x)\geqslant 0$，且 $\forall k\in\mathbf{N}$，有

$$f(k+1)=\int_k^{k+1}f(k+1)dx\leqslant\int_k^{k+1}f(x)dx$$
$$\leqslant\int_k^{k+1}f(k)dx=f(k).$$

从而，
$$\sum_{k=1}^{n}f(k+1)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}f(x)dx\leqslant\sum_{k=1}^{n}f(k)$$

或
$$\sum_{k=1}^{n}f(k+1)\leqslant\int_1^{n+1}f(x)dx\leqslant\sum_{k=1}^{n}f(k).$$

其中数列 $\left\{\int_1^{n+1}f(x)dx\right\}$ 是单调增的，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 的部分和.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 收敛，则数列 $\{S_n\}$ 有上界，从而数列 $\left\{\int_1^{n+1}f(x)dx\right\}$ 也有上界. 于是，无穷积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛；

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 发散，则数列 $\{S_n\}$ 无上界，从而数列 $\left\{\int_1^{n+1}f(x)dx\right\}$ 也无上界. 于是，无穷积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 发散.

即 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 同时收敛或同时发散.

5. 证明:若无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛,而函数 $\varphi(x)$ 在$[a,+\infty)$单调有界,则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$ 收敛.

证 已知 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛,由柯西收敛准则,

$\forall \varepsilon>0, \exists A>a, \forall p_1, p_2>A$,有

$$\left|\int_{p_1}^{p_2} |f(x)|dx\right| < \varepsilon.$$

又已知 $\varphi(x)$在$[a,+\infty)$单调有界,即

$\exists M>0, \forall x\in[a,+\infty)$,有 $|\varphi(x)|\leqslant M$.

又已知 $f(x)\varphi(x)$可积. 有

$$\left|\int_{p_1}^{p_2} f(x)\varphi(x)dx\right| \leqslant \left|\int_{p_1}^{p_2} |f(x)||\varphi(x)|dx\right|$$
$$\leqslant M\left|\int_{p_1}^{p_2} |f(x)|dx\right| < M\varepsilon,$$

即无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$ 收敛.

7. 证明:$0<\lambda<1$,无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda}dx$ 与 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\lambda}dx$ 都是条件收敛.

证 证明 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda}dx$ 条件收敛(同法可证$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\lambda}dx$ 也是条件收敛).

已知函数 $\sin x$ 在$[1,+\infty)$连续,$\forall p>1$,有

$$\left|\int_1^p \sin x dx\right| = |\cos 1 - \cos p| \leqslant 2.$$

$\lambda>0$. 根据定理8,无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda}dx$ 收敛.

$\forall x\geqslant 1$,有 $|\sin x|\geqslant \sin^2 x$,从而

$$\left|\frac{\sin x}{x^\lambda}\right| \geqslant \frac{\sin^2 x}{x^\lambda} = \frac{1-\cos 2x}{2x^\lambda}$$

$$=\frac{1}{2x^\lambda}-\frac{\cos 2x}{2x^\lambda}.$$

已知当$0<\lambda<1$，$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{2x^\lambda}$发散，而$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^\lambda}dx$收敛，从而$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^\lambda}\right|dx$发散. 于是，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\lambda}dx$条件收敛.

8. 若无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，则有$f(x)\to 0(x\to+\infty)$是否成立?反之，是否成立?

答 不成立. 例如，无穷积分$\int_0^{+\infty}\sin x^2dx$收敛(见《讲义》§12.1例12). 但是，$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x^2$不存在，当然也不会有$f(x)\to 0(x\to+\infty)$.

反之，也不成立，即$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$可能发散，例如，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$，无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$却发散$\left(p=\frac{1}{2}<1\right)$.

* * * *

9. 证明：若无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，函数$f(x)$在$[a,+\infty)$单调，则$f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)$.

证 不妨设$f(x)$在$[a,+\infty)$单调减少(否则，考虑函数$-f(x)$). 则$\forall x\in[a,+\infty)$，$f(x)\geqslant 0$. 否则，$\exists x_1\in[a,+\infty)$，使$f(x_1)<0$，则$\forall x>x_1$，有$f(x)\leqslant f(x_1)<0$. 从而$\forall p>x_1$，有

$$\int_{x_1}^p f(x)dx\leqslant\int_{x_1}^p f(x_1)dx=f(x_1)(p-x_1)\to-\infty(p\to+\infty).$$

即$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散，与已知条件矛盾.

已知$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，根据柯西收敛准则，

$$\forall\varepsilon>0,\exists A>0,\forall p_1,p_2>A,有\left|\int_{p_1}^{p_2}f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

于是，$\forall x>2A\left(或\frac{x}{2}>A\right)\left(取 p_1=\frac{x}{2},p_2=x\right)$，由$f(x)$在$[a,+\infty)$非

负，且单调减少，有

$$\varepsilon > \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt \geqslant f(x)\int_{\frac{x}{2}}^{x} dt = \frac{x}{2}f(x)$$

或
$$xf(x) < 2\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{x}} = 0$. 于是，$f(x) = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

10. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续，且无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

证 用反证法. 假设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$，即

$$\exists\ \varepsilon_0 > 0, \forall\ n \in \mathbf{N}, \exists\ x_n > n, 有\ |f(x_n)| \geqslant \varepsilon_0.$$

从而，存在数列 $\{x_n\}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$，有 $|f(x_n)| \geqslant \varepsilon_0$.

已知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续，即

对 $\dfrac{\varepsilon_0}{2} > 0, \exists\,\delta > 0, \forall\, x', x'' \in [a,+\infty)$：$|x' - x''| \leqslant \delta$，有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

从而，$\forall\, x \in [x_n, x_n + \delta]$：$|x - x_n| \leqslant \delta$，有 $|f(x) - f(x_n)| < \dfrac{\varepsilon_0}{2}$.

$$|f(x)| \geqslant |f(x_n)| - |f(x_n) - f(x)| > \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}. \quad (1)$$

$\forall\, x \in [x_n, x_n + \delta]$，$f(x)$ 与 $f(x_n)$ 必同号. 否则若 $f(x)$ 与 $f(x_n)$ 异号，则有 $|f(x) - f(x_n)| = |f(x)| + |f(x_n)| > \varepsilon_0$，矛盾.

若 $f(x_n) > 0$，则 $f(x) > 0$，由(1)式，有 $f(x) > \dfrac{\varepsilon_0}{2}$. 从而

$$\int_{x_n}^{x_n+\delta} f(x)dx > \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{x_n}^{x_n+\delta} dx = \frac{\varepsilon_0\delta}{2}(正常数);$$

若 $f(x_n) < 0$，则 $f(x) < 0$. 由(1)式，有 $f(x) < -\dfrac{\varepsilon_0}{2}$. 从而

$$\int_{x_n}^{x_n+\delta} f(x)dx < -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{x_n}^{x_n+\delta} dx = -\frac{\varepsilon_0\delta}{2},$$

或
$$\left|\int_{x_n}^{x_n+\delta} f(x)dx\right| > \frac{\varepsilon_0\delta}{2}\text{（正常数）}.$$

于是，$\exists\ \frac{\varepsilon_0\delta}{2}>0, \forall n\in\mathbf{N}, \exists\ x_n>n$，有 $\left|\int_{x_n}^{x_n+\delta} f(x)dx\right| > \frac{\varepsilon_0\delta}{2}$.

根据柯西收敛准则的否定叙述，$\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 发散，与已知条件矛盾. 于是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

11. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有连续导函数 $f'(x)$，且无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 都收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证 已知无穷积分 $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 收敛，即极限
$$\int_a^{+\infty} f'(x)dx = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f'(t)dt = \lim_{x\to+\infty} f(t)\Big|_a^x$$
$$= \lim_{x\to+\infty} f(x) - f(a)$$
存在，也就是极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\alpha$.

下面证明：$\alpha=0$. 用反证法. 假设 $\alpha\neq 0$. 不妨设 $\alpha>0$. 即 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\alpha>0$. 由连续函数的保号性，$\exists\ A>0, \forall x>A$，有
$$f(x)\geqslant\frac{\alpha}{2}.$$
从而，$\forall\ p>A$（当然 $p+1>A$），有
$$\int_p^{p+1} f(x)dx \geqslant \frac{\alpha}{2}\quad\text{（正常数）}.$$
根据柯西收敛准则的否定叙述，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散. 与已知条件矛盾. 于是，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

12. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 可导，且单调减少，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，证明：$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Longleftrightarrow \int_a^{+\infty} xf'(x)dx$ 收敛.

证 $$\int_a^{+\infty} xf'(x)dx = \lim_{x\to+\infty} xf(x) - af(a) - \int_a^{+\infty} f(x)dx. \tag{1}$$

$\Rightarrow$ 若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，又已知 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调减少，由

第9题，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$. 于是，无穷积分 $\int_a^{+\infty} xf'(x)dx$ 收敛.

$\Leftarrow$ 若 $\int_a^{+\infty} xf'(x)dx$ 收敛，又已知可导函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调减少，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，则 $\forall x\in[a,+\infty)$，有 $f(x)\geqslant 0$，且 $f'(x)\leqslant 0$.

不妨设 $a\geqslant 0$. $x>a$，$\forall b>x$. 根据定积分中值定理，$\exists\xi\in[x,b]$，有

$$-\int_x^b tf'(t)dt=-\xi\int_x^b f'(t)dt=-\xi[f(b)-f(x)]$$
$$=\xi[f(x)-f(b)]\geqslant x[f(x)-f(b)]\geqslant 0.$$

已知 $\lim\limits_{b\to+\infty} f(b)=0$. 从而，当 $b\to+\infty$ 时，有

$$-\int_x^{+\infty} tf'(t)dt\geqslant xf(x)\geqslant 0.$$

根据定理2的推论1，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\int_x^{+\infty} tf'(t)dt\right]=0$. 从而，有

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0.$$

由(1)式，无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

练习题　12.2

（《讲义》下册，第275页）

1. 求下列瑕积分：

(2) $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

解　1是被积函数的瑕点. $\forall\eta$: $0<\eta<1$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=\lim_{\eta\to0^+}\int_0^{1-\eta}\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}\ (\text{设 } 1-x=t)$$

$$=\lim_{\eta\to0^+}\int_\eta^1\frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}=\lim_{\eta\to0^+} 2\operatorname{arctg}\sqrt{t}\Big|_\eta^1=\frac{\pi}{2}.$$

(4) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

解 a 与 b 是被积函数的瑕点.

设 $x=a\cos^2 t+b\sin^2 t$. $dx=2(b-a)\sin t\cos t dt$.

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(b-a)\sin t\cos t}{(b-a)\sin t\cos t}dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi.$$

2. 判别下列瑕积分的敛散性:

(1) $\int_0^1 \frac{1}{\ln x}dx$.

解 1是被积函数的瑕点.

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\frac{-1}{\ln x} = 1.$$

$\lambda=1$, $d=1$. 于是,瑕积分发散.

(3) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$. $(k^2<1)$

解 1是被积函数的瑕点.

$$\lim_{x\to 1}(1-x)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}.$$

$\lambda=\frac{1}{2}$, $d=\frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}$. 于是,瑕积分收敛.

(5) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}$.

解 0与1都是被积函数的瑕点.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}.$$

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\frac{-1}{\sqrt{x}\ln x} = 1.$$

$\lambda=1$, $d=1$. 瑕积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}$ 发散.

于是，瑕积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}$ 发散.

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$.

解 0与$\frac{\pi}{2}$都是被积函数的瑕点.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}.$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^p \frac{1}{\sin^p x\cos^q x} = 1.$$

$\lambda=p, d=1$，从而，当 $p<1$时瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$收敛；当 $p\geqslant 1$时，瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 发散.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)^q \cdot \frac{1}{\sin^p x\cos^q x} = 1.$$

$\lambda=q, d=1$，从而，当 $q<1$ 时，瑕积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$收敛；当 $q\geqslant 1$时，瑕积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 发散. 于是，当 $p<1$ 与 $q<1$ 时，瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 收敛.

3. 给出定理 3 及其推论的证明.

证明定理 3 应用柯西收敛准则. 从略.

定理3的推论：设$\forall x\in(a,b]$，有 $f(x)\geqslant 0$，a 是瑕点，且极限

$$\lim_{x\to a^+} (x-a)^\lambda f(x) = d \quad (0\leqslant d\leqslant +\infty).$$

1) 若 $\lambda<1, 0\leqslant d<+\infty$，则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.

2) 若 $\lambda\geqslant 1, 0<d\leqslant +\infty$，则 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

证 1) 已知 $\lim\limits_{x\to a^+} (x-a)^\lambda f(x)=d$，且 $0\leqslant d<+\infty$，则

$\exists\varepsilon_0>0,\exists\delta>0,\forall x: a<x<a+\delta$，有

$$|(x-a)^\lambda f(x)-d|<\varepsilon_0 \quad 或 \quad f(x)<\frac{d+\varepsilon_0}{(x-a)^\lambda}.$$

若 $\lambda<1, 0\leqslant d<+\infty$，$\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^\lambda}$收敛. 根据定理3，$\int_a^b f(x)dx$ 收敛.

2）已知 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^\lambda f(x)=d$，且 $0<d<+\infty$，则

$\exists\frac{d}{2}>0,\exists\delta>0,\forall x: a<x<a+\delta$，有

$$|(x-a)^\lambda f(x)-d|<\frac{d}{2} \quad 或 \quad \frac{d}{2}\cdot\frac{1}{(x-a)^\lambda}<f(x).$$

若 $\lambda\geqslant 1, 0<d<+\infty$，$\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^\lambda}$发散. 根据定理3，$\int_a^b f(x)dx$ 发散.

已知 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^\lambda f(x)=+\infty$. 同法可证，若 $\lambda\geqslant 1, d=+\infty$，$\int_a^b f(x)dx$ 发散.

4. 给出定理2和定理4的证明.

证明定理2应用柯西收敛准则，从略.

定理4 若函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 连续（a 是瑕点），且 $F(x)=\int_x^b f(t)dt$ 在 $(a,b]$ 有界，即$\exists C>0,\forall x\in(a,b]$，有

$$|F(x)|=\left|\int_x^b f(t)dt\right|\leqslant C,$$

则当 $\lambda>0$时，瑕积分 $\int_a^b(x-a)^\lambda f(x)dx$ 收敛.

证 已知 $dF(x)=-f(x)dx$. $F(b)=0$. $\forall\eta>0$（$\eta<b-a$），有

$$\int_{a+\eta}^b(x-a)^\lambda f(x)dx=-\int_{a+\eta}^b(x-a)^\lambda dF(x)$$

$$=-(x-a)^\lambda F(x)\Big|_{a+\eta}^b+\lambda\int_{a+\eta}^b(x-a)^{\lambda-1}F(x)dx$$

$$=\eta^\lambda F(a+\eta)+\lambda\int_{a+\eta}^b(x-a)^{\lambda-1}F(x)dx.$$

其中 $\lim\limits_{\eta\to 0^+}\eta^\lambda F(a+\eta)=0$，$|(x-a)^{\lambda-1}F(x)|\leqslant\frac{C}{(x-a)^{1-\lambda}}$.

已知 $\lambda>0$，即 $1-\lambda<1$ 时，$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{1-\lambda}}$ 收敛. 从而极限

$$\lim_{\eta\to 0^+}\int_{a+\eta}^b (x-a)^\lambda f(x)dx$$

$$=\lim_{\eta\to 0^+}\left[\eta^\lambda F(a+\eta)+\lambda\int_{a+\eta}^b (x-a)^{\lambda-1}F(x)dx\right]$$

存在. 于是，瑕积分 $\int_a^b (x-a)^\lambda f(x)dx$ 收敛.

*　　*　　*　　*

5. 证明：若瑕积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 收敛，且当 $x\to 0^+$ 时函数 $f(x)$ 单调趋向于 $+\infty$，则 $\lim_{x\to 0^+} xf(x)=0$.

证　不妨设 $\forall x\in(0,1]$，$f(x)\geqslant 0$，且 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 单调减少. 已知 $\int_0^1 f(x)dx$ 收敛，由柯西收敛准则，即

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0(\delta<1)$，$\forall x:0<x<\delta$，有 $\int_{\frac{x}{2}}^x f(t)dt<\varepsilon$. 从而，

$$0<\frac{x}{2}f(x)\leqslant\int_{\frac{x}{2}}^x f(t)dt<\varepsilon\quad\text{或}\quad xf(x)<2\varepsilon$$

即

$$\lim_{x\to 0^+} xf(x)=0.$$

6. 证明：瑕积分 $\int_0^1 \frac{dx}{[x(1-\cos x)]^\lambda}$ $(\lambda>0)$ 当 $\lambda<\frac{1}{3}$ 时收敛；当 $\lambda\geqslant\frac{1}{3}$ 时发散.

证　$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{3\lambda}\cdot\frac{1}{[x(1-\cos x)]^\lambda}=\lim\limits_{x\to 0^+} x^{3\lambda}\frac{1}{x^{3\lambda}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^\lambda}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^\lambda}=2^\lambda.$$

当 $3\lambda<1$ 时，即 $\lambda<\frac{1}{3}$ 时，瑕积分收敛；当 $3\lambda\geqslant 1$ 时，即 $\lambda\geqslant\frac{1}{3}$ 时，瑕积分发散.

7. 求下列积分的柯西主值：

(1) $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x}$.

解 $\text{V.P.}\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{\eta\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-\eta}\frac{dx}{x}+\int_{\eta}^{2}\frac{dx}{x}\right)$

$=\lim\limits_{\eta\to 0^+}(\ln|-\eta|-\ln|-1|+\ln 2-\ln\eta)$

$=\ln 2$.

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x dx$.

解 $\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\sin x dx=\lim\limits_{A\to+\infty}(-\cos x)\Big|_{-A}^{A}$

$=\lim\limits_{A\to+\infty}[-\cos A+\cos(-A)]=0$.

8. 证明：若无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=A$（常数），则积分主值 $\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=A$. 但反之不成立.

证 已知$\forall c\in\mathbf{R}$，有$(-q<c,p>c)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{+\infty}f(x)dx$$

$$=\lim_{q\to+\infty}\int_{-q}^{c}f(x)dx+\lim_{p\to+\infty}\int_{c}^{p}f(x)dx$$

$$=\lim_{\substack{p\to+\infty\\q\to+\infty}}\left[\int_{-q}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{p}f(x)dx\right].$$

上式对任意 p 与 q 都成立，特别是，当 $p=q$ 时，也成立，即

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{p\to+\infty}\int_{-p}^{p}f(x)dx\qquad(\forall c\in\mathbf{R},|p|>c)$$

$$=\lim_{p\to+\infty}\int_{-p}^{c}f(x)dx+\lim_{p\to+\infty}\int_{c}^{p}f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=A.$$

反之不成立. 例如.

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x dx=0.$$

但是，$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x dx$ 却发散.

练习题 12.3

（《讲义》下册，第305页）

1. 设有二元函数 $f(x,y)=\operatorname{sgn}(x-y)$，$(x,y)\in\mathbf{R}^2$. 证明：一元函数

$$F(y)=\int_0^1 f(x,y)dx$$

在 $\mathbf{R}$ 连续，并描绘函数 $F(y)$ 的图象.

证 $0\leqslant x\leqslant 1$. $\forall y\in\mathbf{R}$，有

$$f(x,y)=\operatorname{sgn}(x-y)=\begin{cases}1, & y<0,\\ -1, & x<y(0\leqslant y\leqslant 1),\\ 0, & x=y(0\leqslant y\leqslant 1),\\ 1, & x>y(0\leqslant y\leqslant 1),\\ -1, & y>1.\end{cases}$$

当 $y<0$ 时，$z=F(y)=\int_0^1 f(x,y)dx=\int_0^1 dx=1$；

当$0\leqslant y\leqslant 1$时，$z=F(y)=\int_0^1 f(x,y)dx$

$$=\int_0^y(-1)dx+\int_y^1 dx=1-2y;$$

当 $y>1$时，$z=F(y)=\int_0^1 f(x,y)dx=\int_0^1(-1)dx=-1$.

于是，函数

$$z=F(y)=\begin{cases}1, & y<0,\\ 1-2y, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ -1, & y>1.\end{cases}$$

其图象如图12.a.

显然，$z=F(y)$在$(-\infty,0)$，$(0,1)$，$(1,+\infty)$都连续，且

$$\lim_{y\to 0^+}F(y)=\lim_{y\to 0^-}F(y)=1=F(0),$$

$$\lim_{y\to 1^+}F(y)=\lim_{y\to 1^-}F(y)=-1=F(1).$$

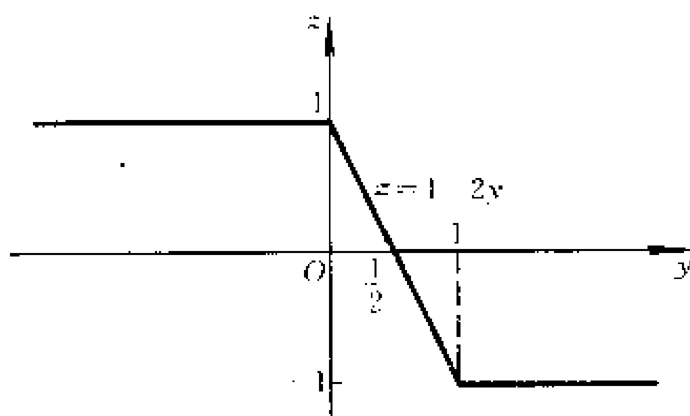


图 12.a

即 $z=F(y)$ 在0与1也连续. 于是,一元函数 $F(y)$ 在 **R** 连续.

2. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{y\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}dx$.

解 函数 $\sqrt{x^2+y^2}$ 在矩形域 $D(-1\leqslant x\leqslant 1,-a\leqslant y\leqslant a)$ 连续 $(a>0)$. 根据定理1,有

$$\lim_{y\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}dx=\int_{-1}^{1}\left(\lim_{y\to 0}\sqrt{x^2+y^2}\right)dx=\int_{-1}^{1}|x|dx=1.$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{0}^{1}\dfrac{dx}{1+\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n}}$.

解 考虑函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+(1+yx)^{\frac{1}{y}}}, & 0\leqslant x\leqslant 1,0<y\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{1+e^{x}}, & 0\leqslant x\leqslant 1,y=0.\end{cases}$$

$\forall x\in[0,1]$, 有 $\lim\limits_{y\to 0^{+}}\dfrac{1}{1+(1+yx)^{\frac{1}{y}}}=\dfrac{1}{1+e^{x}}$.

从而,二元函数 $f(x,y)$ 在正方形域 $D(0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1)$ 连续,根据定理1,取 $y=\dfrac{1}{n}$,有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \lim_{y\to 0^-}\int_0^1 \frac{dx}{1+(1+yx)^{\frac{1}{y}}}$$

$$= \int_0^1\left(\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{1+(1+yx)^{\frac{1}{y}}}\right)dx = \int_0^1\frac{dx}{1+e^x} \quad (\text{设 } u = e^x)$$

$$= \int_1^e \frac{du}{u(1+u)} = \int_1^e\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)du = \ln\frac{2e}{1+e}.$$

3. 求 $F'(y)$.

(1) $F(y)=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{(1+y\sin x)^2}$, $\quad y\in(-1,1)$.

解 $\forall y\in(-1,1)$, $\exists\,\delta>0$ 和 $\exists\, y_0\in(-1,1)$, 使 $y\in[y_0-\delta, y_0+\delta]\subset(-1,1)$. 二元函数

$$f(x,y)=\frac{1}{(1+y\sin x)^2} \text{ 与 } \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{-2\sin x}{(1+y\sin x)^3}$$

在区域 $D(-\pi\leqslant x\leqslant\pi, y_0-\delta\leqslant y\leqslant y_0+\delta)$ 连续. 根据定理2, $\forall y\in(-1,1)$, 有

$$F'(y)=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{(1+y\sin x)^2}\right]dx=-2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin x}{(1+y\sin x)^3}dx.$$

(3) $\quad F(y)=\displaystyle\int_{a+y}^{b+y}\frac{\sin yx}{x}dx.$

解 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin yx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin yx}{yx}y=y.$

$(0,y)$ 是被积函数的可去间断点. 可连续开拓. 因此, 二元函数 $\dfrac{\sin yx}{x}$ 与 $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\sin yx}{x}\right)=\cos yx$ 在 $\mathbf{R}^2$ 是连续函数, $a+y$ 与 $b+y$ 也是 y 的连续函数且可导. 根据定理4, 有

$$F'(y)=\int_{a+y}^{b+y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin yx}{x}\right)dx+\frac{\sin[y(b+y)]}{b+y}-\frac{\sin[y(a+y)]}{a+y}$$

$$=\int_{a+y}^{b+y}\cos yx\,dx+\frac{\sin[y(b+y)]}{b+y}-\frac{\sin[y(a+y)]}{a+y}$$

$$=\frac{1}{y}\{\sin[y(b+y)]-\sin[y(a+y)]\}$$

$$+\frac{\sin[y(b+y)]}{b+y}-\frac{\sin[y(a+y)]}{a+y}$$

$$=\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{b+y}\right)\sin[y(b+y)]$$

$$-\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{a+y}\right)\sin[y(a+y)].$$

5. 设 $F(x)=\int_0^h\left\{\int_0^h f(x+\xi+\eta)d\eta\right\}d\xi\ (h>0)$，其中 $f(x)$ 是连续函数，求 $F''(x)$.

解 设 $t=x+\xi+\eta$，则 $dt=d\eta$. 有

$$F(x)=\int_0^h\left\{\int_{x+\xi}^{x+\xi+h}f(t)dt\right\}d\xi.$$

根据定理2和定理4，有

$$F'(x)=\int_0^h\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int_{x+\xi}^{x+\xi+h}f(t)dt\right\}d\xi$$

$$=\int_0^h\left\{\int_{x+\xi}^{x+\xi+h}\frac{\partial}{\partial x}f(t)dt+f(x+\xi+h)-f(x+\xi)\right\}d\xi$$

$$=\int_0^h[f(x+\xi+h)-f(x+\xi)]d\xi.$$

设 $u=x+\xi+h$，则 $du=d\xi$；$v=x+\xi$，则 $dv=d\xi$，有

$$F'(x)=\int_{x+h}^{x+2h}f(u)du-\int_x^{x+h}f(v)dv.$$

再根据定理4，有

$$F''(x)=f(x+2h)-f(x+h)-f(x+h)+f(x)$$

$$=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x).$$

7. 证明：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续，则 $\forall x\in[a,b]$，有

$$\int_a^x\left\{\int_a^y f(t)dt\right\}dy=\int_a^x f(t)(x-t)dt.$$

证 上式等号左右两端分别对 x 求导数. $\forall x\in[a,b]$，有

$$\left(\int_a^x\left\{\int_a^y f(t)dt\right\}dy\right)'_x=\int_a^x f(t)dt$$

与 $\left(\int_a^x f(t)(x-t)dt\right)'_x=\int_a^x\left(\frac{\partial}{\partial x}[f(t)(x-t)]\right)dt+f(x)(x-x)$

$$= \int_a^x f(t)dt.$$

于是，$\forall x \in [a,b]$，有

$$\left(\int_a^x \left\{ \int_a^y f(t)dt \right\} dy - \int_a^x f(t)(x-t)dt \right)' = 0.$$

因此 $$\int_a^x \left\{ \int_a^y f(t)dt \right\} dy - \int_a^x f(t)(x-t)dt = C(\text{常数}).$$

令 $x=a$，显然 $C=0$，于是，$\forall x \in [a,b]$，有

$$\int_a^x \left\{ \int_a^y f(t)dt \right\} dy = \int_a^x f(t)(x-t)dt.$$

注 本题也可用分部积分法，见练习题8.4第17题.

8. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,A]$ 连续，则 $\forall x \in [a,A)$，有

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_a^x [f(t+h) - f(t)]dt = f(x) - f(a).$$

证 已知 $f(x)$ 在 $[a,A]$ 连续，$\forall x \in [a,A)$，$t \in [a,x]$，使 $t+h \in [a,A)$.

设 $t+h=y$，$dt=dy$. 有

$$\int_a^x f(t+h)dt = \int_{a+h}^{x+h} f(y)dy = \int_{a+h}^{x+h} f(t)dt.$$

于是，$\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_a^x [f(t+h) - f(t)]dt$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^x f(t+h)dt - \int_a^x f(t)dt \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\int_{a+h}^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} \quad \left(\frac{0}{0}\text{，用洛比达法则} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\int_{a+h}^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right)'_h}{h'}$$

$$= \lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(a+h)] = f(x) - f(a).$$

注 本题另一证法见练习题8.4第11题.

9. 用积分号下可微分，求下列积分：

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin^2 x + a^2 \cos^2 x)dx, \quad a > 0.$$

解 $\forall \varepsilon: 0<\varepsilon<1, \delta>1$，使 $\varepsilon \leqslant a \leqslant \delta$. 设

$$f(x,a)=\ln(\sin^2 x + a^2\cos^2 x).$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}=\frac{2a\cos^2 x}{\sin^2 x + a^2\cos^2 x}.$$

它们在矩形域 $D\left(0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}, \varepsilon\leqslant a\leqslant \delta\right)$ 连续. 根据定理2，有

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\partial}{\partial a}\ln(\sin^2 x + a^2\cos^2 x\right]dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\cos^2 x}{\sin^2 x + a^2\cos^2 x}dx.$$

设 $u=\operatorname{tg}x, du=\frac{dx}{\cos^2 x}$，有

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\cos^2 x}{\sin^2 x + a^2\cos^2 x}dx = 2a\int_0^{+\infty}\frac{du}{(1+u^2)(a^2+u^2)}$$

$$=\frac{2a}{1-a^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{a^2+u^2}-\frac{1}{1+u^2}\right)du=\frac{\pi}{1+a}.$$

上式等号两端对 a 积分.

$$I(a)=\int\frac{\pi}{1+a}da=\pi\ln(1+a)+C \quad (C\text{ 是常数}).$$

令 $a=1$，已知 $I(1)=0$，有

$$I(1)=\pi\ln 2 + C = 0 \quad \text{或} \quad C=-\pi\ln 2.$$

于是，
$$I(a)=\pi\ln(1+a)-\pi\ln 2=\pi\ln\frac{1+a}{2}.$$

10. 证明下列无穷积分在指定区间一致收敛：

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin x dx,\quad a\leqslant t<+\infty \ (a>0)$.

证 $\forall t\in[a,+\infty)$，有

$$|e^{-tx}\sin x|\leqslant e^{-ax}.$$

已知 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx\ (a>0)$ 收敛. 于是，$\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin x dx$ 在 $[a,+\infty)$ 一致收敛.

11. 证明下列无穷积分在指定区间非一致收敛：

(1) $\int_0^{+\infty} ye^{-yx}dx$,　　$0\leqslant y\leqslant 1$.

分析　不论正数 A_0 怎样大，总存在充分小的正数 $y_0\in[0,1]$，使无穷积分 $\left|\int_{A_0}^{+\infty} y_0e^{-y_0x}dx\right| = e^{-y_0A_0}$ 大于或等于某个正常数. 只须取 $y_0=\frac{1}{A_0}\in[0,1]$即可.

证　$\exists\varepsilon_0=\frac{1}{3}>0,\forall A>0,\exists A_0>A,\exists y_0=\frac{1}{A_0}\in[0,1]$，有

$$\left|\int_{A_0}^{+\infty} y_0e^{-y_0x}dx\right| = \left|e^{-y_0x}\Big|_{A_0}^{+\infty}\right| = e^{-y_0A_0}$$

$$= e^{-\frac{1}{A_0}\cdot A_0} = e^{-1} = \frac{1}{e} > \frac{1}{3} = \varepsilon_0,$$

即 $\int_0^{+\infty} ye^{-yx}dx$ 在$[0,1]$非一致收敛.

(2)　$\int_1^{+\infty} \frac{y}{(x+y)^2}dx$,　$0<y<+\infty$.

分析　不论正数 A_0 怎样大，总存在充分大的 $y_0\in(0,+\infty)$，使 $\left|\int_{A_0}^{+\infty} \frac{y_0}{(x+y_0)^2}dx\right| = \frac{y_0}{A_0+y_0}$大于或等于某个正常数，只须取 $y_0=A_0\in(0,+\infty)$即可.

证　$\exists\varepsilon_0=\frac{1}{3}>0,\forall A>0,\exists A_0>A,\exists y_0=A_0\in(0,+\infty)$，有

$$\left|\int_{A_0}^{+\infty} \frac{y_0}{(x+y_0)^2}dx\right| = \left|\left(-\frac{y_0}{x+y_0}\right)\Big|_{A_0}^{+\infty}\right| = \frac{y_0}{A_0+y_0}$$

$$= \frac{A_0}{A_0+A_0} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \varepsilon_0,$$

即 $\int_1^{+\infty} \frac{y}{(x+y)^2}dx$ 在$(0,+\infty)$非一致收敛.

12. 设$\forall u\in[\alpha,\beta]$，点$(b,u)$都是$f(x,u)$的瑕点. 定义瑕积分 $\int_a^b f(x,u)dx$ 在区间$[\alpha,\beta]$一致收敛，并叙述其非一致收敛，并验证瑕积分 $\int_0^1(1-x)^{\alpha-1}dx$ 在区间$[a,+\infty)(a>0)$一致收敛，在区间$(0,+\infty)$非一致收敛.

答 瑕积分 $\int_a^b f(x,u)dx$ 在$[\alpha,\beta]$一致收敛（点(b,u)都是瑕点）

$\Longleftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0(\delta<b-a),\forall\eta:0<\eta<\delta,\forall u\in[\alpha,\beta]$，有

$$\left|\int_{b-\eta}^{b} f(x,u)dx\right|<\varepsilon.$$

瑕积分 $\int_a^b f(x,u)dx$ 在$[\alpha,\beta]$非一致收敛（点(b,u)都是瑕点）

$\Longleftrightarrow$

$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0(\delta<b-a),\exists\eta_0:0<\eta_0<\delta,\exists u_0\in[\alpha,\beta]$，有

$$\left|\int_{b-\eta_0}^{b} f(x,u_0)dx\right|\geqslant\varepsilon_0.$$

验证 $\forall\varepsilon>0,\forall u\in[a,+\infty)(a>0)$，要使不等式$(0<\eta<1)$

$$\left|\int_{1-\eta}^{1}(1-x)^{u-1}dx\right|=\left|\frac{1}{u}(1-x)^u\Big|_{1-\eta}^{1}\right|=\frac{\eta^u}{u}\leqslant\frac{\eta^a}{a}<\varepsilon$$

成立，从不等式$\frac{\eta^a}{a}<\varepsilon$ 解得 $\eta<(a\varepsilon)^{\frac{1}{a}}$，取 $\delta=\min\{1,(a\varepsilon)^{\frac{1}{a}}\}$. 于是，

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\min\{1,(a\varepsilon)^{\frac{1}{a}}\}>0,\forall\eta:0<\eta<\delta,\forall u\in[a,+\infty)$，有

$$\left|\int_{1-\eta}^{1}(1-x)^{u-1}dx\right|<\varepsilon,$$

即瑕积分 $\int_0^1(1-x)^{u-1}dx$ 在$[a,+\infty)$一致收敛$(a>0)$.

但是，瑕积分 $\int_0^1(1-x)^{u-1}dx$ 在$(0,+\infty)$却非一致收敛. 这是因为，不论正数 η_0 怎样小，总存在充分小的正数 $u_0\in(0,+\infty)$，使 $\left|\int_{1-\eta_0}^{1}(1-x)^{u_0-1}dx\right|=\frac{\eta_0^{u_0}}{u_0}$大于或等于某个正常数. ∎

已知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\eta_0}=1\ (0<\eta_0<1)$，因此当 n 充分大，可使 $\sqrt[n]{\eta_0}>\frac{1}{2}$.

$\exists\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0,\forall\delta>0(\delta<1),\exists\eta_0:0<\eta_0<\delta,\exists u_0=\frac{1}{n_0}\in(0,+\infty)(n_0\in\mathbf{N},n_0$充分大)，有

$$\left|\int_{1-\eta_0}^{1}(1-x)^{n_0-1}dx\right|=\frac{\eta_0^{n_0}}{n_0}=n_0\sqrt[n_0]{\eta_0}>\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

即瑕积分 $\int_0^1(1-x)^{n-1}dx$ 在$(0,+\infty)$非一致收敛.

14. 应用积分号下可微分,求无穷积分:

$$I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2}-e^{-ax^2}}{x}dx,\quad a>0.$$

解 设 $f(x,a)=\dfrac{e^{-x^2}-e^{-ax^2}}{x}$. $f'_a(x,a)=xe^{-ax^2}$.

因为$\forall a>0$,有

$$\lim_{x\to0^+}f(x,a)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-x^2}-e^{-ax^2}}{x}=0,$$

所以,函数 $f(x,a)$在$(x,0)$可连续开拓. 使 $f(x,a)$与 $f'_a(x,a)$在区域 $D(0\leqslant x<+\infty,0<a<+\infty)$连续.

$\forall a>0,\exists\varepsilon>0(\varepsilon<1)$与 $\delta>1$,使 $a\in[\varepsilon,\delta]$,无穷积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{e^{-x^2}-e^{-ax^2}}{x}\right)dx=\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}dx$$

在$[\varepsilon,\delta]$一致收敛. 事实上,$\forall a\in[\varepsilon,\delta]$,有

$$|xe^{-ax^2}|\leqslant xe^{-\varepsilon x^2}.$$

已知 $\int_0^{+\infty}xe^{-\varepsilon x^2}dx$ 收敛,则 $\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}dx$ 在$[\varepsilon,\delta]$一致收敛.

根据定理10,$\forall a\in[\varepsilon,\delta]$,有

$$I'(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{e^{-x^2}-e^{-ax^2}}{x}\right)dx=\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}dx$$

$$=-\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2a}.$$

从而,
$$I(a)=\int\frac{da}{2a}=\frac{1}{2}\ln a+C.$$

令 $a=1$,已知 $I(1)=0$,有

$$I(1)=\frac{1}{2}\ln1+C=0\quad 或\quad C=0.$$

于是,$\forall a>0$,有

$$I(a)=\frac{1}{2}\ln a.$$

15. 应用积分号下可积分，求无穷积分：

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin x dx,\quad a>0,b>0.$$

证 将被积函数表为积分

$$\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin x=\sin x\int_a^b e^{-xy}dy=\int_a^b e^{-xy}\sin x dy.$$

从而， $$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin x dx=\int_0^{+\infty}\left\{\int_a^b e^{-xy}\sin x dy\right\}dx.$$

已知函数 $f(x,y)=e^{-xy}\sin x$ 在区域 $D(0\leqslant x<+\infty,a\leqslant y\leqslant b)$ 连续. 不难证明，$\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin x dx$ 在$[a,b]$一致收敛.

事实上，$\forall y\in[a,b]$，有

$$|e^{-xy}\sin x|\leqslant e^{-yx}\leqslant e^{-ax}.$$

已知 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx$ 收敛. 从而，$\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin x dx$ 在$[a,b]$一致收敛.

根据定理9，有

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin x dx=\int_0^{+\infty}\left\{\int_a^b e^{-xy}\sin x dy\right\}dx$$

$$=\int_a^b\left\{\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin x dx\right\}dy \quad (\text{应用 § 7.2 例 6})$$

$$=\int_a^b\left(\frac{-e^{-xy}(y\sin x+\cos x)}{1+y^2}\bigg|_0^{+\infty}\right)dy$$

$$=\int_a^b\frac{dy}{1+y^2}=\operatorname{arctg}y\bigg|_a^b=\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}a.$$

16. 证明：

(1) $$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^4}dx=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).$$

证 设 $t=x^4$， $dx=\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}dt$. 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^4}dx=2\int_0^{+\infty}e^{-x^4}dx \quad (\text{因 } e^{-x^4} \text{ 是偶函数})$$

$$= 2\cdot\frac{1}{4}\int_0^{+\infty} t^{-\frac{3}{4}}e^{-t}dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{3}{4}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).$$

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n}dx = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right),\quad n>0, m>-1.$

证 设 $t=x^n, dx=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$. 有

$$\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n}dx = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} t^{\frac{m}{n}}t^{\frac{1}{n}-1}e^{-t}dt$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} t^{\frac{m+1}{n}-1}e^{-t}dt = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}-1+1\right)$$

$$= \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right).$$

17. 用 Γ 函数与 B 函数求下列积分：

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx.$

解 设 $t=\frac{1}{1+x^4}, x^2=t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}, dx=-\frac{1}{4}t^{-\frac{5}{4}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}dt$. 有

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{1}{4}\int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}dt = \frac{1}{4}B\left(1-\frac{3}{4}, 1-\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}B\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{2}{4}-1}}\Gamma\left(\frac{2}{4}\right)\qquad\text{（应用例 18 的公式）}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx,\quad n\in\mathbf{N}.$

解 设 $t=x^2, dx=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$. 有

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx = 2\int_0^1(1-x^2)^n dx\quad\text{（因 }(1-x^2)^n\text{ 是偶函数）}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^n t^{-\frac{1}{2}} dt = B\left(1-\frac{1}{2}, n+1\right) = B\left(\frac{1}{2}, n+1\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n+1\right)} = \frac{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{2^{n+1}n!}{(2n+1)!!} = \frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

18. 证明：(2)

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\varphi d\varphi = \begin{cases} \dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\dfrac{\pi}{2}, & n = 2m, \\ \dfrac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n = 2m+1. \end{cases}$$

证 由公式(13)，有

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\varphi d\varphi = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

当 $n=2m$ 时，有(由(1))

$$I_{2m} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\frac{(2m-1)!!}{2^m}\sqrt{\pi}}{m!}$$

$$= \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

当 $n=2m+1$ 时，有(应用(1)的结果)

$$I_{2m+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{m!}{\frac{(2m+1)!!}{2^{m+1}}\cdot\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

注 此题是§8.4的例7. 这里直接应用 Γ 函数与 B 函数，比较简单.

*　　*　　*　　*

19. 证明：椭圆积分 $E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi$ 满足微分方程

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0,\quad 0<k<1.$$

证 已知 $E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi$，设

$$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad 0<k<1.$$

$$\begin{aligned}E'(k)&=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi\\&=\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-k^2\sin^2\varphi)-1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi\\&=\frac{1}{k}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right]\\&=\frac{1}{k}[E(k)-F(k)].\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}F'(k)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\sin^2\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}d\varphi\\&=\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-(1-k^2\sin^2\varphi)}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}d\varphi\\&=\frac{1}{k}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}d\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right]\\&=\frac{1}{k}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}d\varphi-F(k)\right].\end{aligned}\tag{2}$$

下面证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}d\varphi=\frac{E(k)}{1-k^2}$.

容易验证下面等式

$$(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{1-k^2}(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{k^2}{1-k^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\sin\varphi\cos\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\right).$$

事实上，上式等号两端对 φ 从0到$\frac{\pi}{2}$积分，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}d\varphi=\frac{1}{1-k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}d\varphi$$

$$-\frac{k^2}{1-k^2}\left(\sin\varphi\cos\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{E(k)}{1-k^2}.$$

从而，由(2)式，有

$$F'(k)=\frac{E(k)}{k(1-k^2)}-\frac{F(k)}{k}.$$

对(1)式的等号两端再对 k 求导数，有

$$E''(k)=-\frac{1}{k^2}[E(k)-F(k)]+\frac{1}{k}[E'(k)-F'(k)]$$

$$=-\frac{1}{k^2}[E(k)-F(k)]+\frac{1}{k}\left\{\frac{1}{k}[E(k)-F(k)]\right.$$

$$\left.-\frac{E(k)}{k(1-k^2)}+\frac{F(k)}{k}\right\}$$

$$=\frac{F(k)}{k^2}-\frac{E(k)}{k^2(1-k^2)}.$$

于是，$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{1}{1-k^2}E(k)$$

$$=\frac{F(k)}{k^2}-\frac{E(k)}{k^2(1-k^2)}+\frac{E(k)}{k^2}-\frac{F(k)}{k^2}+\frac{E(k)}{1-k^2}=0,$$

即 $E(k)$是此微分方程的解.

20. 证明：若函数 $f(x)$连续，且

$$k(x,y)=\begin{cases}y(1-x), & y<x,\\ x(1-y), & y\geqslant x.\end{cases}$$

则函数 $u(x)=\int_0^1 k(x,y)f(y)dy$ 满足微分方程($x\in[0,1]$)

$$\begin{cases} u''(x) + f(x) = 0, \\ u(0) = 0,\ u(1) = 0. \end{cases}$$

解 $\forall x: 0 \leqslant x \leqslant 1$，将函数 $u(x)$ 改写为

$$u(x) = \int_0^x y(1-x)f(y)dy + \int_x^1 x(1-y)f(y)dy$$

$$= (1-x)\int_0^x yf(y)dy + x\int_x^1 (1-y)f(y)dy.$$

根据定理4，有

$$u'(x) = -\int_0^x yf(y)dy + x(1-x)f(x)$$

$$+ \int_x^1 (1-y)f(y)dy - x(1-x)f(x)$$

$$u''(x) = -xf(x) - (1-x)f(x) = -f(x),$$

即 $u''(x) + f(x) = 0.$

显然，$u(0)=0, u(1)=0.$

于是，
$$\begin{cases} u''(x)+f(x)=0, \\ u(0)=0,\ u(1)=0. \end{cases} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

21. 证明：若函数 $f(x,u)$ 在矩形域 $R(a \leqslant x \leqslant b, \alpha \leqslant u \leqslant \beta)$ 连续，而函数 $a(u)$ 与 $b(u)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 也连续，$\forall u \in [\alpha,\beta]$，有

$$a \leqslant a(u) \leqslant b, \quad a \leqslant b(u) \leqslant b,$$

则函数 $\psi(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)dx$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 连续.

证 已知 $f(x,u)$ 在闭矩形域 R 连续，从而它在 R 有界，即

$$\exists\, M > 0, \forall\ (x,u) \in R, \text{有 } |f(x,u)| \leqslant M.$$

$\forall u \in [\alpha,\beta]$，使 $u+\Delta u \in [\alpha,\beta]$，有

$$\psi(u+\Delta u) = \int_{a(u+\Delta u)}^{b(u+\Delta u)} f(x,u+\Delta u)dx$$

$$= \int_{a(u+\Delta u)}^{a(u)} f(x,u+\Delta u)dx + \int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u+\Delta u)dx$$

$$+ \int_{b(u)}^{b(u+\Delta u)} f(x,u+\Delta u)dx.$$

其中 $\left|\int_{a(u+\Delta u)}^{a(u)} f(x,u+\Delta u)dx\right| \leqslant M|a(u+\Delta u)-a(u)|$,

$\left|\int_{b(u)}^{b(u+\Delta u)} f(x,u+\Delta u)dx\right| \leqslant M|b(u+\Delta u)-b(u)|$.

已知 $a(u)$ 与 $b(u)$ 在 u 连续，由上面两个不等式，有

$$\lim_{\Delta u\to 0}\int_{a(u+\Delta u)}^{a(u)} f(x,u+\Delta u)dx = 0,$$

$$与\lim_{\Delta u\to 0}\int_{b(u)}^{b(u+\Delta u)} f(x,u+\Delta u)dx = 0.$$

根据定理1，又有

$$\lim_{\Delta u\to 0}\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u+\Delta u)dx = \int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)dx.$$

于是，$\lim\limits_{\Delta u\to 0}\psi(u+\Delta u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)dx=\psi(u)$,

即函数 $\psi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)dx$ 在 u 连续，从而在 $[\alpha,\beta]$ 连续.

22. 证明定理7.

定理7. 若函数 $f(x,u)$ 在区域 $D(a\leqslant x<+\infty, u\in I)(a>0)$ 连续，且

$$F(x,u)=\int_a^x f(t,u)dt$$

在 D 有界，即 $\exists C>0, \forall (x,u)\in D$，有

$$|F(x,u)|=\left|\int_a^x f(t,u)dt\right|\leqslant C,$$

则当 $\lambda>0$ 时，无穷积分 $\int_a^{+\infty}\frac{f(x,u)}{x^\lambda}dx$ 在区间 I 一致收敛.

证 $\forall u\in I$，对 x 求微分

$$dF(x,u)=f(x,u)dx,\quad F(a,u)=0.$$

$\forall A>0, \forall u\in I$，有

$$\int_A^{+\infty}\frac{f(x,u)}{x^\lambda}dx=\int_A^{+\infty}\frac{1}{x^\lambda}dF(x,u)\quad（用分部积分法）$$

$$=\left.\frac{F(x,u)}{x^\lambda}\right|_A^{+\infty}+\lambda\int_A^{+\infty}\frac{F(x,u)}{x^{\lambda+1}}dx,$$

其中 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x,u)}{x^{\lambda}}=0$(因为 $F(x,u)$ 在 D 有界,$\lambda>0$). 从而,

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{f(x,u)}{x^{\lambda}}dx\right|\leqslant\left|-\frac{F(A,u)}{A^{\lambda}}\right|+\lambda\int_A^{+\infty}\frac{|F(x,u)|}{x^{\lambda+1}}dx$$

$$\leqslant\frac{C}{A^{\lambda}}+\lambda C\int_A^{+\infty}\frac{dx}{x^{\lambda+1}}=\frac{2C}{A^{\lambda}}\to 0\ (A\to+\infty),$$

即 $\forall\varepsilon>0,\exists A_0>0,\forall A>A_0,\forall u\in I$,有

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{f(x,u)}{x^{\lambda}}dx\right|<\varepsilon,$$

于是,无穷积分 $\int_a^{+\infty}\frac{f(x,u)}{x^{\lambda}}dx$ 在区间 I 一致收敛.

23. 证明:Γ 函数在区间 $(0,+\infty)$ 存在任意阶连续导数,$n\in\mathbf{N}$,有

$$\Gamma^{(n)}(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}(\ln x)^n dx.$$

证 已知 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx,\quad \alpha\in(0,+\infty)$.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}(x^{\alpha-1}e^{-x})dx=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x dx$$

$$=\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x dx+\int_1^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x dx.\tag{1}$$

$\forall\alpha>0$(暂时固定 α),$\exists a,b>0$,且 $a<b$,使 $a\leqslant\alpha\leqslant b$.

下面证明,广义积分(1)在区间 $[a,b]$ 一致收敛.

事实上,0可能是(1)的瑕点,$\forall x:0<x\leqslant1$,有

$$\lim_{x\to0^+}x^{\frac{a}{2}}\ln x=0\qquad(\text{可应用洛必达法则计算}).$$

从而函数 $x^{\frac{a}{2}}\ln x$ 在 $(0,1]$ 有界,即 $\exists M>0,\forall x\in(0,1]$,有

$$\left|x^{\frac{a}{2}}\ln x\right|\leqslant M.$$

$\forall\alpha\in[a,b]$,有

$$|x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x|\leqslant|x^{a-1}\ln x|$$

$$=\left|x^{a-1-\frac{a}{2}}\right|\left|x^{\frac{a}{2}}\ln x\right|\leqslant x^{a-1-\frac{a}{2}}M=Mx^{\frac{a}{2}-1}.$$

已知 $\int_0^1 x^{\frac{a}{2}-1}dx$ 收敛. 于是，瑕积分 $\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x dx$ 在$[a,b]$一致收敛.

$\forall x\geqslant 1$，有$0\leqslant \ln x< x$，$\forall \alpha>0$，$\exists a,b>0$，且 $a<b$，使 $a\leqslant\alpha\leqslant b$.

$$|x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x|\leqslant x^{\alpha}e^{-x}\leqslant x^b e^{-x}.$$

已知 $\int_1^{+\infty} x^b e^{-x}dx$ 收敛. 于是，无穷积分 $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x dx$ 在$[a,b]$一致收敛.

综上所证，广义积分 $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x dx$ 在区间$[a,b]$一致收敛.

根据定理10，$\forall \alpha\in(0,+\infty)$，有

$$\Gamma'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}(x^{\alpha-1}e^{-x})dx=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x dx,$$

且 $\Gamma'(\alpha)$在其定义域$(0,+\infty)$连续.

应用归纳法和上述同样方法，可证，$\forall n\in\mathbf{N}$，$\forall \alpha\in(0,+\infty)$，有

$$\Gamma^{(n)}(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}(\ln x)^n dx,$$

且 $\Gamma^{(n)}(\alpha)$在区间$(0,+\infty)$连续.

24. 证明：若 $f(t)=\left(\int_0^t e^{-x^2}dx\right)^2$，$g(t)=\int_0^1\frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2}dx$，则

$$f'(t)+g'(t)=0,\quad f(t)+g(t)=\frac{\pi}{4}\quad (t\geqslant 0).$$

由此求概率积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

证 $\forall t_0\geqslant 0$，在区域 $D(0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant t\leqslant t_0)$函数

$$\frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2}\quad 与\quad \left(\frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2}\right)_t'=-2te^{-(1+x^2)t^2}$$

连续. 根据定理2，有

$$g'(t)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2}\right)dx=-2\int_0^1 te^{-(1+x^2)t^2}dx$$

$$=-2e^{-t^2}\int_0^t e^{-x^2}dx\qquad (设\ tx=y)$$

$$=-2\int_0^t e^{-(t^2+x^2)}dx.$$

又有 $f'(t) = 2e^{-t^2}\int_0^t e^{-x^2}dx = 2\int_0^t e^{-(t^2+x^2)}dx.$

从而，有 $g'(t)+f'(t)=[g(t)+f(t)]'=0$，

即 $g(t)+f(t)=C$（常数）. 已知 $f(0)=0$，又有

$$g(0) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}, \quad \text{从而 } C = \frac{\pi}{4}.$$

于是，$\forall t \geqslant 0$，有

$$f(t) + g(t) = \frac{\pi}{4}. \tag{1}$$

根据定理1，

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = \int_0^1 \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2}dx = 0.$$

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2.$$

由(1)式，当 $t\to+\infty$ 时，有

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \frac{\pi}{4} \quad \text{或} \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

第十三章　重　积　分

练习题 13.1(一)

(《讲义》下册,第 317 页)

1. 按照二重积分的定义,求二重积分

$$\iint_R xydxdy,$$

其中 $R[0\leqslant x\leqslant 1;0\leqslant y\leqslant 1]$.

解　二元函数 $f(x,y)=xy$ 在闭正方形区域 R 连续,从而 $f(x,y)=xy$ 在 R 可积.可应用特殊的分法和点 P_{ik}的特殊取法.

用两组直线 $x=\frac{i}{n},y=\frac{k}{n}(n\in\mathbf{N},i,k=1,2,\cdots,n-1)$将 R 分成 n^2 个小的正方形区域 R_{ik},其面积 $\Delta R_{ik}=\frac{1}{n^2}$,取 $P_{ik}(\xi_i,\eta_k)=\left(\frac{i}{n},\frac{k}{n}\right)(i,k=1,2,\cdots,n)$.作积分和

$$\sum_{i,k=1}^{n}f(\xi_i,\eta_k)\Delta R_{ik}=\sum_{i,k=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$=\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}i\cdot\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2.$$

于是,$\iint_R xydxdy=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i,k=1}^{n}f(\xi_i,\eta_k)\Delta R_{ik}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{4}$.

3. 设 $R[0\leqslant x\leqslant 1;0\leqslant y\leqslant 1]$. $\forall(x,y)\in R$,定义函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x=y,\\0, & x\neq y.\end{cases}$$

证明：函数 $f(x,y)$ 在 R 可积，且 $\iint\limits_R f(x,y)dxdy = 0$.

证 二元函数 $f(x,y)$ 在 R 上的不连续点都分布在线段 $y=x$，$0\leqslant x\leqslant 1$ 上. 根据定理 3，$f(x,y)$ 在 R 可积. 因此，可应用特殊的分法和点 P_k 的特殊取法.

用任意分法 T 将正方形区域 R 分成 n 个小区域：$R_1,R_2,\cdots,R_n$. 设它们的面积分别是 $\Delta R_1,\Delta R_2,\cdots,\Delta R_n$. 在 R_k 上任取一点 $P_k(\xi_k,\eta_k)$，使 $\xi_k\neq\eta_k$（这总是可能的）. 从而 $f(\xi_k,\eta_k)=0$，$k=1,2,\cdots,n$. 作积分和

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta R_k = 0.$$

于是，$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta R_k = 0$.

5. 证明：若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 R 连续，且 $f(x,y)>0$，则

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy > 0.$$

证 已知 $f(x,y)$ 在有界闭区域 R 连续，根据 § 10.2 定理 6，$f(x,y)$ 在 R 取到最小值 m. 因为 $\forall (x,y)\in R$，有 $f(x,y)>0$，所以 $f(x,y)\geqslant m>0$. 从而，$f(x,y)$ 在 R 的积分和

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k \geqslant \sum_{k=1}^{n} m\Delta\sigma_k = m\sum_{k=1}^{n}\Delta\sigma_k = m\cdot\overline{R},$$

其中 $\overline{R}$ 是 R 的面积，是正数. 于是

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k \geqslant m\cdot\overline{R} > 0.$$

6. 证明：若函数 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 在有界闭区域 R 连续，且 $g(x,y)\geqslant 0$，则 $\exists (\xi,\eta)\in R$，使

$$\iint\limits_R f(x,y)g(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)\iint\limits_R g(x,y)dxdy.$$

证 已知 $f(x,y)$ 在 R 连续，根据 § 10.2 定理 6，$f(x,y)$ 在 R 取到最小值 m 与最大值 M，即 $\forall (x,y)\in R$，有

$$m \leqslant f(x,y) \leqslant M.$$

因为$\forall (x,y)\in R$,有 $g(x,y)\geqslant 0$,所以

$$mg(x,y) \leqslant f(x,y)g(x,y) \leqslant Mg(x,y).$$

从而,有

$$m\iint_R g(x,y)dxdy \leqslant \iint_R f(x,y)g(x,y)dxdy \leqslant M\iint_R g(x,y)dxdy.$$

根据定理 8, $\iint_R g(x,y)dxdy \geqslant 0$.

若$\iint_R g(x,y)dxdy = 0$,则$\iint_R f(x,y)g(x,y)dxdy = 0$. 于是,$\forall$ (ξ,η) $\in R$, 有

$$\iint_R f(x,y)g(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)\iint_R g(x,y)dxdy;$$

若 $\iint_R g(x,y)dxdy > 0$,有

$$m \leqslant \frac{\iint_R f(x,y)g(x,y)dxdy}{\iint_R g(x,y)dxdy} \leqslant M.$$

根据§10.2 定理 7(连续函数的介值性),$\exists$ $(\xi,\eta)\in R$,使

$$\frac{\iint_R f(x,y)g(x,y)dxdy}{\iint_R g(x,y)dxdy} = f(\xi,\eta),$$

即

$$\iint_R f(x,y)g(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)\iint_R g(x,y)dxdy.$$

7. 证明:若函数 $f(x,y)$在区域 R 连续,且对任意有界闭区域 $D\subset R$都有

$$\iint_D f(x,y)dxdy = 0,$$

则$\forall (x,y)\in R$,有 $f(x,y)=0$.

证 用反证法. 假设$\exists P(x_0,y_0)\in R$,而$f(x_0,y_0)\neq 0$,不妨设$f(x_0,y_0)>0$. 根据连续函数的保号性,$\exists r>0$,即存在以点$P(x_0,y_0)$为心以r为半径的邻域$U(P,r)$,使得$\forall (x,y)\in G=U(P,r)\cap R$,有

$$f(x,y)\geqslant \frac{f(x_0,y_0)}{2}(>0).$$

从而,

$$\iint_G f(x,y)dxdy\geqslant \frac{f(x_0,y_0)}{2}\iint_G dxdy=\frac{f(x_0,y_0)}{2}\overline{G}>0,$$

其中$\overline{G}$是区域G的面积,与已知条件矛盾. 于是,$\forall (x,y)\in R$,有

$$f(x,y)=0.$$

8. 证明:若函数$f(x,y)$与$g(x,y)$在有界闭区域R可积,则乘积函数$f(x,y)g(x,y)$在R也可积.

证 任给分法T将R分成n个小区域:$R_1,R_2,\cdots,R_n$. 设$\Delta\sigma_k$是R_k的面积,又设$\omega_k(f),\omega_k(g),\omega_k(fg)$分别是函数$f(x),g(x),f(x)g(x)$在第$k$个小区域$R_k$上的振幅. 又已知函数$f(x,y)$与$g(x,y)$在$R$有界(因它们可积),即

$\exists M>0,\forall (x,y)\in R$,有$|f(x,y)|\leqslant M$与$|g(x,y)|\leqslant M$.

$\forall$点$P'_k,P''_k\in R_k$,有

$$\begin{aligned}&|f(P'_k)g(P'_k)-f(P''_k)g(P''_k)|\\ \leqslant&|f(P'_k)g(P'_k)-f(P''_k)g(P'_k)|+|f(P''_k)g(P'_k)-f(P''_k)g(P''_k)|\\ \leqslant&|g(P'_k)||f(P'_k)-f(P''_k)|+|f(P''_k)||g(P'_k)-g(P''_k)|\\ \leqslant&M[\omega_k(f)+\omega_k(g)].\end{aligned}$$

于是, $\omega_k(fg)\leqslant M[\omega_k(f)+\omega_k(g)],\quad k=1,2,\cdots,n.$

$$\sum_{k=1}^n\omega_k(fg)\Delta\sigma_k\leqslant M\Big(\sum_{k=1}^n\omega_k(f)\Delta\sigma_k+\sum_{k=1}^n\omega_k(g)\Delta\sigma_k\Big).$$

已知$f(x,y)$与$g(x,y)$在R可积,即

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall T:\|T\|<\delta$,有

$$\sum_{k=1}^n\omega_k(f)\Delta\sigma_k<\varepsilon\qquad 与\qquad \sum_{k=1}^n\omega_k(g)\Delta\sigma_k<\varepsilon.$$

从而　有　$\sum_{k=1}^{n}\omega_k(fg)\Delta\sigma_k < M(\varepsilon+\varepsilon)=2M\varepsilon$,

即函数 $f(x,y)g(x,y)$ 在 R 也可积.

*　*　*　*

9. 证明：若函数 $f(x,y)$ 在正方形区域 D 可积，且在点 $(x_0,y_0)\in D$ 连续，则

$$\lim_{d(G)\to 0}\frac{1}{\overline{G}}\iint_G f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0),$$

其中 G 是满足 $(x_0,y_0)\in G\subset D$ 的任意区域，$d(G)$ 表 G 的直径，$\overline{G}$ 表 G 的面积.

证　已知 $f(x,y)$ 在 G 可积，从而 $f(x,y)$ 在 G 有界，设

$$m_G=\inf\{f(x,y)\,|\,(x,y)\in G\},\quad M_G=\sup\{f(x,y)\,|\,(x,y)\in G\}.$$

$\forall (x,y)\in G$，有　$m_G\leqslant f(x,y)\leqslant M_G$.

从而，
$$m_G\iint_G dxdy\leqslant\iint_G f(x,y)dxdy\leqslant M_G\iint_G dxdy$$

或
$$m_G\overline{G}\leqslant\iint_G f(x,y)dxdy\leqslant M_G\overline{G}.\qquad(\overline{G}>0)$$

$$m_G\leqslant\frac{1}{\overline{G}}\iint_G f(x,y)dxdy\leqslant M_G.$$

已知 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续，有

$$\lim_{d(G)\to 0}m_G=\lim_{d(G)\to 0}M_G=f(x_0,y_0).$$

于是由两边夹定理，有

$$\lim_{d(G)\to 0}\frac{1}{\overline{G}}\iint_G f(x,y)dxdy=f(x_0,y_0).$$

10. 证明：若连续函数列 $\{f_n(x,y)\}$ 在有界闭区域 R 上一致收敛于函数 $f(x,y)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\iint_R f_n(x,y)dxdy=\iint_R f(x,y)dxdy.$$

证　已知 $f(x,y)$ 在 R 连续，从而可积. 又已知 $\{f_n(x)\}$ 在 R 一致收敛于 $f(x,y)$，即

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n > N, \forall (x,y) \in R$，有

$$|f_n(x,y) - f(x,y)| < \varepsilon.$$

从而，

$$\left| \iint_R f_n(x,y)dxdy - \iint_R f(x,y)dxdy \right|$$

$$= \left| \iint_R [f_n(x,y) - f(x,y)]dxdy \right| \leqslant \iint_R |f_n(x,y) - f(x,y)|dxdy$$

$$< \varepsilon \cdot \overline{R},$$

其中 $\overline{R}$ 表 R 的面积(正常数)，即

$$\lim_{n \to \infty} \iint_R f_n(x,y)dxdy = \iint_R f(x,y)dxdy.$$

练习题 13.1(二)

(《讲义》下册，第 340 页)

2. 将二重积分 $\iint_R f(x,y)dxdy$ 化为不同次序(先对 x 后对 y 与先对 y 后对 x)的累次积分，其中区域 R 分别是：

(1) 以(0,0)，(2,1)，(−2,1)为顶点的三角形区域.

解 三角形区域 R 如图 13.a. 围成三角形区域 R 的三条直线方程是：$y=1, y=\frac{x}{2}, y=-\frac{x}{2}$.

先对 x 后对 y 积分

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x,y)dx.$$

先对 y 后对 x，用直线 $x=0$(y 轴)将区域 R 分成两个区域 A 与 B，如图 13.a，即

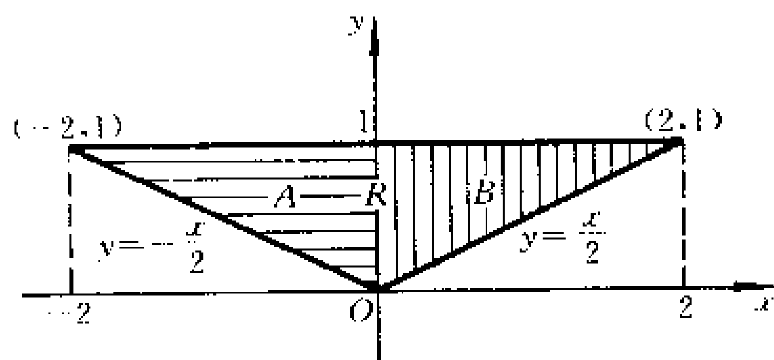


图 13.a

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy=\iint\limits_A f(x,y)dxdy+\iint\limits_B f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-2}^{0}dx\int_{-\frac{x}{2}}^{1}f(x,y)dy+\int_{0}^{2}dx\int_{\frac{x}{2}}^{1}f(x,y)dy.$$

(3)$x^2+y^2\leqslant 2y$.

解 $x^2+y^2\leqslant 2y$ 或 $x^2+(y-1)^2\leqslant 1$，区域 R 是以点(0，1)为心以 1 半径的圆域. 如图 13.b.

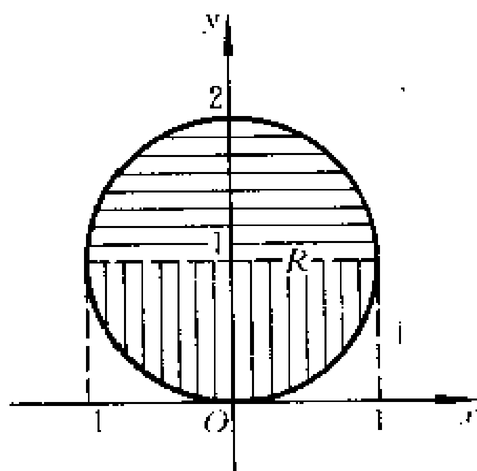


图 13.b

先对 x 后对 y 积分

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy=\int_0^2 dy\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)dx.$$

先对 y 后对 x 积分

$$\iint_R f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy.$$

3. 描绘下列积分区域，并改变累次积分的次序：

(1) $\int_0^2 dx\int_x^{2x}f(x,y)dy$

解 积分区域 R: $0\leqslant x\leqslant 2, x\leqslant y\leqslant 2x$，即 R 由直线 $y=x, y=2x$，$x=2$ 围成，如图 13. c. 改变累次积分的次序，先对 x 后对 y 积分，用

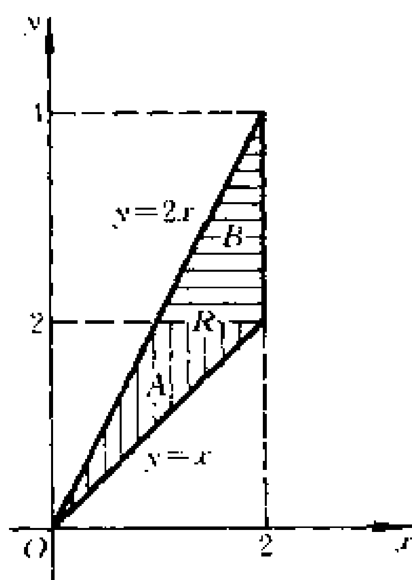


图 13. c

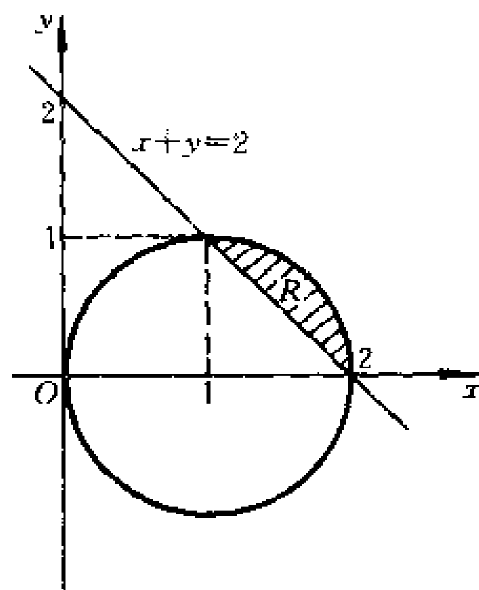


图 13. d

直线 $y=2$ 将区域 R 分成两个区域 A 与 B，即

$$\int_0^2 dx\int_x^{2x}f(x,y)dy=\iint_A f(x,y)dxdy+\iint_B f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y}f(x,y)dx+\int_2^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^{2}f(x,y)dx.$$

(2) $\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy$.

解 积分区域 R: $1\leqslant x\leqslant 2, 2-x\leqslant y\leqslant\sqrt{2x-x^2}$，即 R 是直线 $x+y=2$ 与圆周 $x^2+y^2=2x$ 围成，如图 13. d. 改变累次积分的次

序，先对 x 后对 y 积分

$$\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$$

(3) $\int_{-6}^2 dx\int_{\frac{x^2-4}{4}}^{2-x} f(x,y)dy$.

解　积分区域 R：$-6\leqslant x\leqslant 2$，$\frac{x^2-4}{4}\leqslant y\leqslant 2-x$，即 R 是抛物线 $x^2=4(y+1)$ 与直线 $x+y=2$ 围成，它们有两个交点，坐标是 $(-6,8)$ 与 $(2,0)$，如图 13.e. 改变累次积分的次序，先对 x 后对 y 积分，

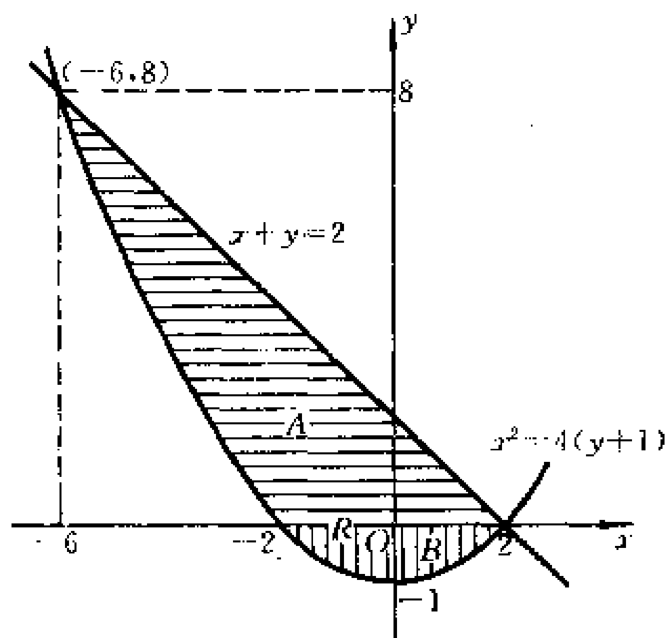


图 13.e

用直线 $y=0$(x 轴)将区域 R 分成两个区域 A 与 B，即

$$\int_{-6}^2 dx\int_{\frac{x^2-4}{4}}^{2-x} f(x,y)dy = \iint\limits_A f(x,y)dxdy + \iint\limits_B f(x,y)dxdy$$

$$= \int_0^8 dy\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx$$

$$+ \int_{-1}^0 dy\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx.$$

4. 求下列积分：

(1) $\int_0^1 dx\int_x^1 e^{-y^2}dy$.

解 积分区域 R 是直线 $y=x$, $y=1$ 与 $x=0$ 围成的三角形区

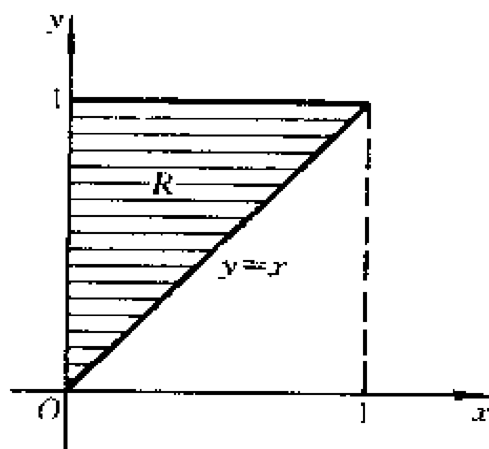


图13. f

域，如图13. f. 改变累次积分的次序，先对 x 后对 y 积分

$$\int_0^1 dx\int_x^1 e^{-y^2}dy=\int_0^1 dy\int_0^y e^{-y^2}dx$$

$$=\int_0^1 ye^{-y^2}dy=-\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-e^{-1}).$$

(2) $\int_\pi^{2\pi} dy\int_{y-\pi}^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx$.

解 积分区域 R 是直线 $x-y+\pi=0$, $y=\pi$、$x=\pi$ 围成的三角形区域，如图13. g. 改变累次积分的次序，先对 y 后对 x 积分

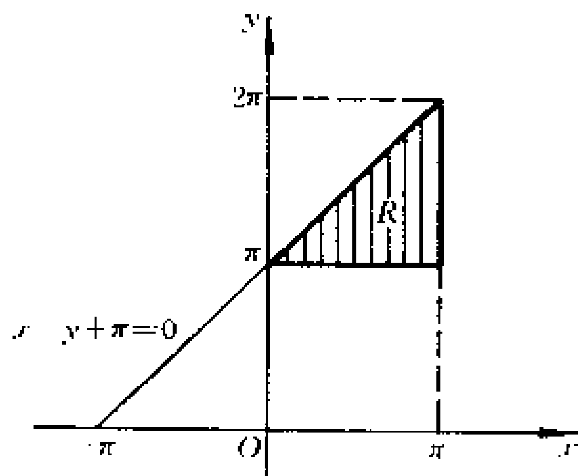


图13. g

$$\int_{\pi}^{2\pi}dy\int_{y-\pi}^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx=\int_{0}^{\pi}dx\int_{\pi}^{x+\pi}\frac{\sin x}{x}dy$$

$$=\int_{0}^{\pi}\sin xdx=2.$$

注 这两个累次积分不交换积分次序不能计算，因为初等函数e^{-y^2}与$\frac{\sin x}{x}$都不存在可求积的形式，但是交换累次积分的积分次序，却极易计算. 说明计算二重积分能否化为累次积分与积分次序有关.

5. 求下列限定在R上的曲顶柱体的体积：

(1)$f(x,y)=x^2y^2$，R是$xy=1$，$xy=2$，$y=x$与$y=4x(x>0)$所围成.

解 曲顶柱体的体积

$$V=\iint_R x^2y^2dxdy,$$

其中R是由$xy=1$，$xy=2$，$y=x$与$y=4x$所围成. 如图13.h(Ⅰ).

作变换，设$u=xy$，$v=\frac{y}{x}$.

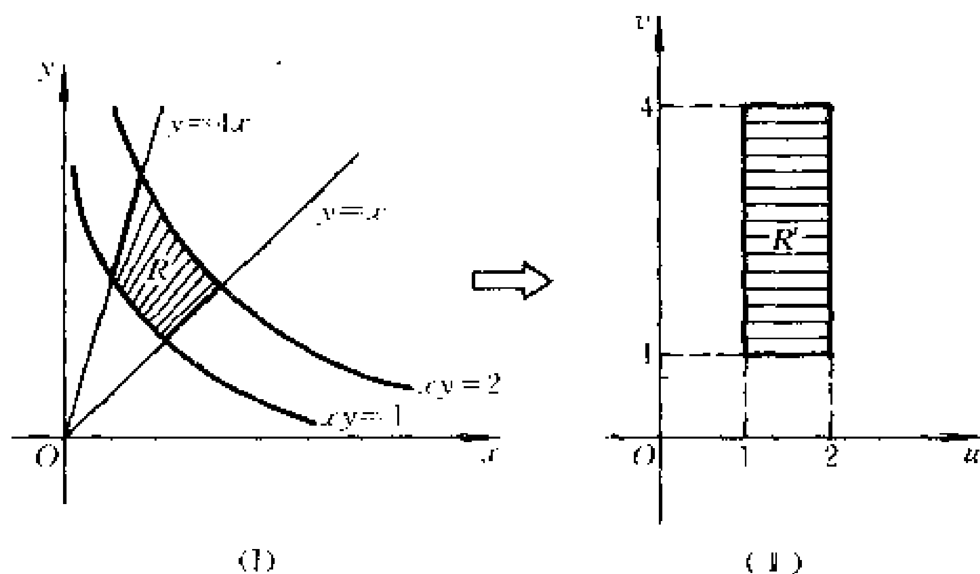


图13.h

这个变换将xy坐标面上的区域R变换为uv坐标面上四条直

线：$u=1, u=2, v=1, v=4$所围成的矩形区域 R'，如图13.h(Ⅱ).

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\end{vmatrix}=\frac{2y}{x}=2v$$

或
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{2v}.$$

于是，
$$V=\iint_R x^2y^2dxdy=\iint_{R'}u^2\cdot\frac{1}{2v}dudv$$

$$=\int_1^4 dv\int_1^2\frac{u^2}{2v}du=\frac{7}{3}\ln 2.$$

(2)$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，R 是 $a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2$，$a<b$.

解 曲顶柱体的体积

$$V=\iint_R\sqrt{x^2+y^2}dxdy,$$

其中 R 是 $a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2$. 这是以原点为心内外半径分别为 a 和 b 的环形区域.

作极坐标变换，设 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$，$|J|=r$. 这个变换将 R 变换为 $r\varphi$ 坐标面上四条直线：$r=a, r=b, \varphi=0, \varphi=2\pi$ 所围成的矩形区域 R'，于是

$$V=\iint_R\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_a^b r\cdot rdr=\frac{2\pi}{3}(b^3-a^3).$$

6. 求下列曲线围成区域的面积：

(1)椭圆 $(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$，$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$.

解 设$\begin{cases}u=a_1x+b_1y+c_1,\\ v=a_2x+b_2y+c_2.\end{cases}$

这个变换将椭圆域 R 变换为 uv 坐标面上圆心在原点半径为1的圆域 R'：$u^2+v^2\leqslant 1$.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1(\neq 0).$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

于是,椭圆域 R 的面积

$$A=\iint_R dxdy=\iint_{R'}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv=\frac{1}{|a_1b_2-a_2b_1|}\iint_{R'}dudv$$

$$=\frac{\pi}{|a_1b_2-a_2b_1|}.$$

(2)$y^2=2px,y^2=2qx,x^2=2ry,x^2=2sy,0<p<q,0<r<s$.

解 这是四条抛物线所围成的区域 R.如图13.i(Ⅰ).设

$$u=\frac{y^2}{x},v=\frac{x^2}{y}.$$

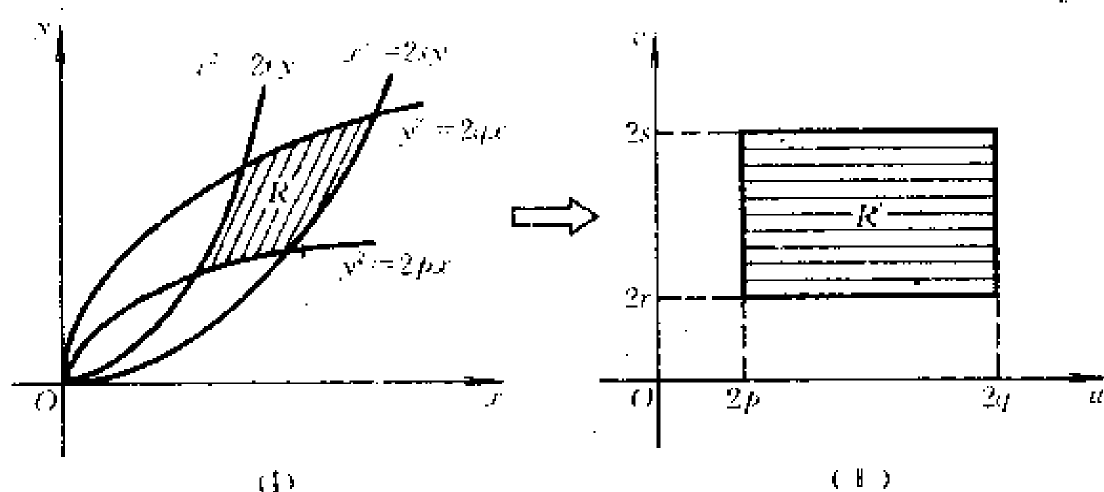


图13.i

这个变换将 xy 坐标面上的区域 R 变换为 uv 坐标面上的矩形区域 R':$2p\leqslant u\leqslant 2q,2r\leqslant v\leqslant 2s$,如图13.i(Ⅱ)

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}-\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x}\\ \dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2}\end{vmatrix}=-3,$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=-\frac{1}{3}.$$

于是，区域 R 的面积

$$A = \iint_R dxdy = \iint_{R'} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \frac{1}{3}\iint_{R'} dudv$$

$$= \frac{1}{3}(q-p)(s-r).$$

7. 证明下列等式：

(1) $\iint_R f(x+y)dxdy = \int_{-1}^{1} f(u)du$，　$R: |x| + |y| \leqslant 1$.

解　区域 $R: |x|+|y|\leqslant 1$ 由四条直线 $x+y=1, x+y=-1, x-y=1, x-y=-1$ 所围成，如图13. j. 设

$$u = x+y, v = x-y.$$

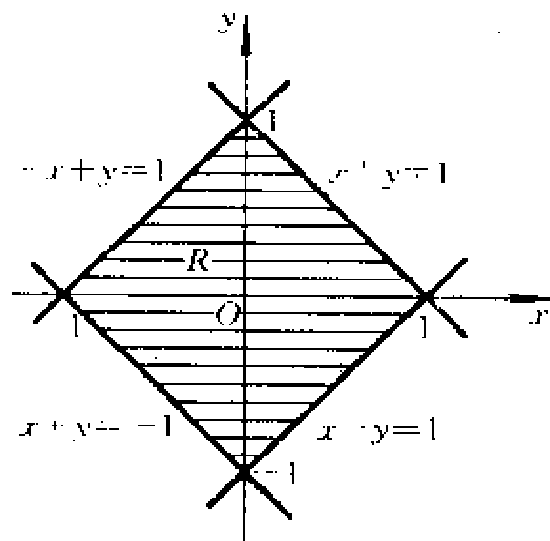


图13. j

这个变换将 xy 坐标面上的区域 R 变换为 uv 坐标面上的正方形区域 R'：$-1\leqslant u\leqslant 1, -1\leqslant v\leqslant 1$.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2. \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{2}.$$

于是，

$$\iint_R f(x+y)dxdy = \int_{-1}^{1} dv \int_{-1}^{1} f(u)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dv \int_{-1}^{1} f(u)du = \int_{-1}^{1} f(u)du.$$

(2) $\iint\limits_R f(xy)dxdy = \ln 2\int_1^2 f(u)du$，$R$ 是由 $xy=1, xy=2, y=x,$ $y=4x$ 所围成.

解 设 $u=xy, v=\frac{y}{x}$.

这个变换将 xy 坐标面的区域 R 变换为 uv 坐标面上的矩形区域 R'：$1\leqslant u\leqslant 2, 1\leqslant v\leqslant 4$.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2\cdot\frac{y}{x} = 2v, \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2v}.$$

于是，
$$\iint\limits_R f(xy)dxdy = \iint\limits_{R'} f(u)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{dv}{v}\int_1^2 f(u)du = \ln 2\int_1^2 f(u)du.$$

8. 设 $I(r)=\int_{-r}^{r} e^{-u^2}du$.

(1) 证明：$I^2(r)= \iint\limits_R e^{-(x^2+y^2)}dxdy$，

其中 $R[-r\leqslant x\leqslant r, -r\leqslant y\leqslant r]$.

证 $I^2(r) =[I(r)]^2 = \int_{-r}^{r} e^{-x^2}dx\cdot\int_{-r}^{r} e^{-y^2}dy$
$$=\int_{-r}^{r} dy\int_{-r}^{r} e^{-(x^2+y^2)}dx = \iint\limits_R e^{-(x^2+y^2)}dxdy,$$

其中 $R[-r\leqslant x\leqslant r, -r\leqslant y\leqslant r]$.

(2) 若 D_1 与 D_2 分别是正方形区域 R 的内切圆域与外接圆域，则
$$\iint\limits_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy < I^2(r) < \iint\limits_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

证 已知 $\forall(x,y)$，有 $e^{-(x^2+y^2)}>0$. 又 $D_1\subset R\subset D_2$，且 $D_1\neq R\neq D_2$，如图13. k. 于是，有

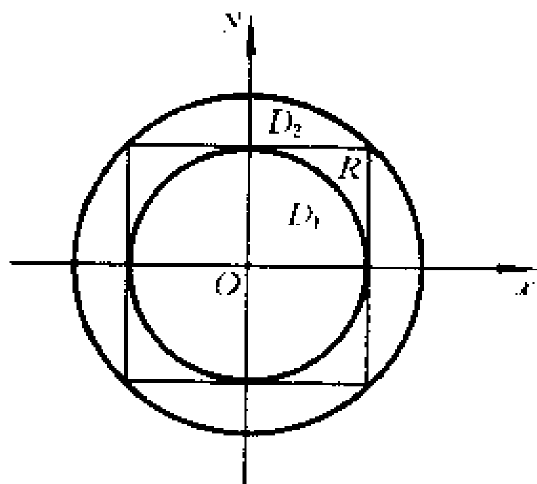


图13.k

$$\iint\limits_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy < \iint\limits_{R} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

$$< \iint\limits_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy,$$

即
$$\iint\limits_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy < I^2(r) < \iint\limits_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

(3) 求二重积分 $\iint\limits_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ 与 $\iint\limits_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$.

解 设 $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$. $|J|=\rho$.

$$\iint\limits_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^r e^{-\rho^2}\rho d\rho = \pi(1-e^{-r^2}).$$

$$\iint\limits_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}r} e^{-\rho^2}\rho d\rho = \pi(1-e^{-2r^2}).$$

(4) 证明：$\lim\limits_{r\to+\infty} I(r)=\sqrt{\pi}$，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi} \quad 或 \quad \int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

证 由上述的(2)与(3)，有

$$\pi(1-e^{-r^2}) < I^2(r) < \pi(1-e^{-2r^2}).$$

因为 $\lim\limits_{r\to+\infty}\pi(1-e^{-r^2})=\lim\limits_{r\to+\infty}\pi(1-e^{-2r^2})=\pi$,

所以 $\lim\limits_{r\to+\infty}I^2(r)=\pi$ 或 $\lim\limits_{r\to+\infty}I(r)=\sqrt{\pi}$,

即 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=\lim\limits_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$

或 $\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.（因为 $f(u)=e^{-u^2}$ 是偶函数）

9. 求下列曲面的面积：

(1) 柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与 $y^2+z^2=a^2$ 所围成立体的表面积.

解 两柱面围成立体的表面关于三个坐标面都对称. 图13.7仅画出它的第一卦限内那部分曲面. 由图13.7看到，这部分曲面由两部分组成，它们又关于平面 $z=x$ 对称. 因此它的一部分曲面 σ（方程是 $y=\sqrt{a^2-x^2}$）的面积是该立体表面积的$\frac{1}{16}$. 曲面 σ 在 xz 平面上的投影是三条直线 $z=x, z=0, x=a$ 围成的三角形区域 R，即

$$\sigma: y=\sqrt{a^2-x^2},\quad (x,z)\in R\ (0\leqslant z\leqslant x, 0\leqslant x\leqslant a).$$

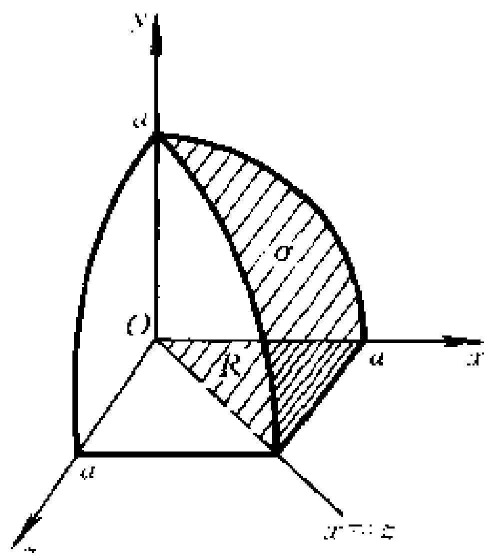


图13.7

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}},\frac{\partial y}{\partial z}=0,\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

于是,立体的表面积

$$A=16\iint_R\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dxdz=16a\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^x dz=16a^2.$$

(2) 环面

$$x=(a+b\cos\varphi)\sin\theta,\ y=(a+b\cos\varphi)\cos\theta,\ z=b\sin\varphi.$$

$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0<b<a.$$

解 $\frac{\partial x}{\partial\varphi}=-b\sin\varphi\sin\theta,\quad \frac{\partial x}{\partial\theta}=(a+b\cos\varphi)\cos\theta.$

$\frac{\partial y}{\partial\varphi}=-b\sin\varphi\cos\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial\theta}=-(a+b\cos\varphi)\sin\theta,$

$\frac{\partial z}{\partial\varphi}=b\cos\varphi,\quad \frac{\partial z}{\partial\theta}=0.$

有

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2=b^2,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2=(a+b\cos\varphi)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\theta}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial z}{\partial\theta}=0.$$

$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{b^2(a+b\cos\varphi)^2}=b(a+b\cos\varphi).$$

于是,环面的面积

$$A=b\int_0^{2\pi}(a+b\cos\varphi)d\varphi\cdot\int_0^{2\pi}d\theta=4ab\pi^2.$$

*　*　*　*

10. 求下列二重积分:

(1) $\iint_R|x+y|dxdy$, $R[-1\leqslant x\leqslant 1;-1\leqslant y\leqslant 1]$.

解 将正方形区域 R 用直线 $x+y=0$ 分成两部分. 一部分区域 A: $x+y\geqslant 0$ 与另一部分区域 B: $x+y\leqslant 0$, 如图13.m. 于是

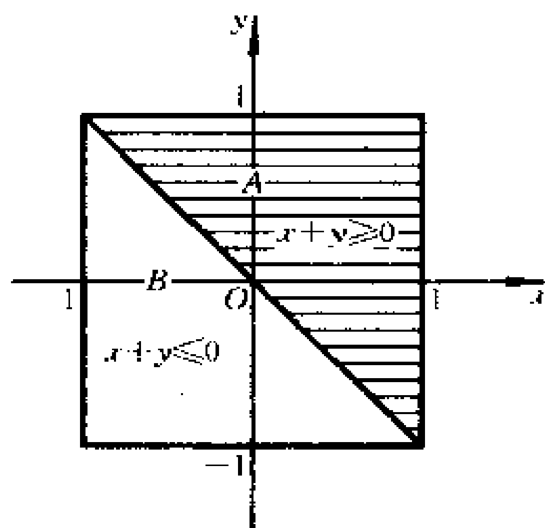


图13.m

$$\iint_R |x+y|dxdy = \iint_A (x+y)dxdy + \iint_B [-(x+y)]dxdy$$

$$= \int_{-1}^{1} dx\int_{-x}^{1}(x+y)dy - \int_{-1}^{1} dx\int_{-1}^{-x}(x+y)dy = \frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}.$$

(2) $\iint_R |\cos(x+y)|dxdy$, $R[0 \leqslant x \leqslant \pi; 0 \leqslant y \leqslant \pi]$

解 将正方形区域 R 用直线 $x+y=\frac{\pi}{2}$ 与 $x+y=\frac{3\pi}{2}$ 分成三个区域：R_1, R_2, R_3，如图13.n，即

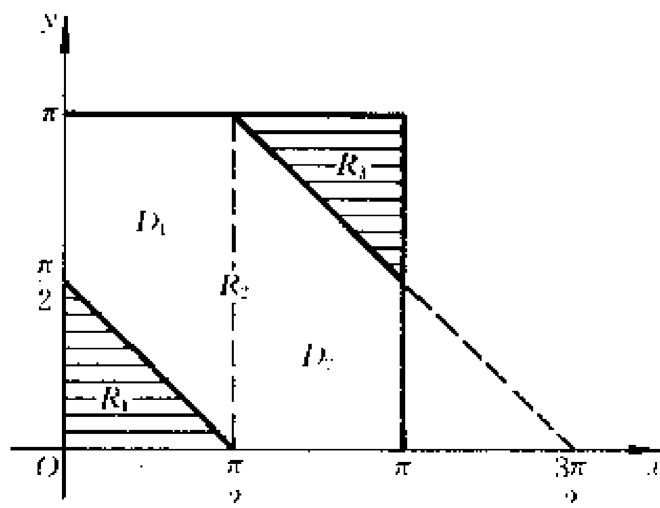


图13.n

$$|\cos(x+y)| = \begin{cases} \cos(x+y), & (x,y)\in R_1, \\ -\cos(x+y), & (x,y)\in R_2, \\ \cos(x+y), & (x,y)\in R_3. \end{cases}$$

于是

$$\iint_R |\cos(x+y)|dxdy = \iint_{R_1}\cos(x+y)dxdy - \iint_{R_2}\cos(x+y)dxdy$$

$$+\iint_{R_3}\cos(x+y)dxdy.$$

其中 $\displaystyle\iint_{R_1}\cos(x+y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)dy = \frac{\pi}{2}-1.$

$$\iint_{R_2}\cos(x+y)dxdy$$

($R_2 = D_1 \cup D_2$,D_1 与 D_2 没有公共内点,如图 13.n)

$$= \iint_{D_1}\cos(x+y)dxdy + \iint_{D_2}\cos(x+y)dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi}\cos(x+y)dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_0^{\frac{3\pi}{2}-x}\cos(x+y)dy = -(\pi+2).$$

$$\iint_{R_3}\cos(x+y)dxdy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\frac{3\pi}{2}-x}^{\pi}\cos(x+y)dy = \frac{\pi}{2}-1.$$

从而

$$\iint_R|\cos(x+y)|dxdy = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)+(\pi+2)+\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = 2\pi.$$

(3) $\displaystyle\iint_R[x+y]dxdy$, $R[0\leqslant x\leqslant 2;0\leqslant y\leqslant 2]$.

解 将正方形区域 R 用三条直线 $x+y=1$,$x+y=2$,$x+y=3$

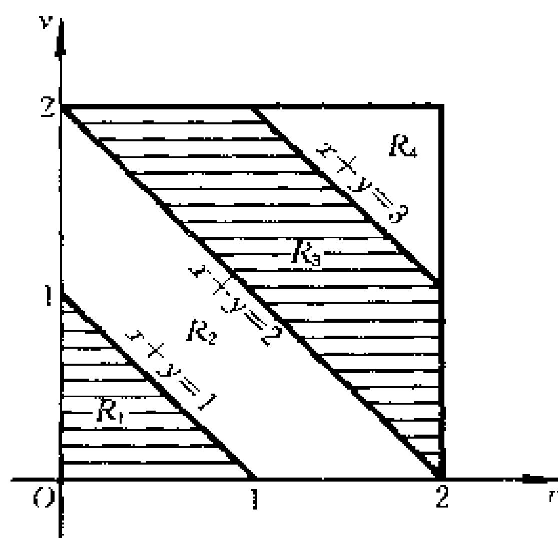


图13. o

分成四个开区域①：R_1, R_2, R_3, R_4，如图13. o，即

$$[x+y]=\begin{cases}0, & (x,y)\in R_1,\\ 1, & (x,y)\in R_2,\\ 2, & (x,y)\in R_3,\\ 3, & (x,y)\in R_4.\end{cases}$$

于是，
$$\iint_R [x+y]dxdy = \iint_{R_1} 0dxdy + \iint_{R_2} dxdy + \iint_{R_3} 2dxdy + \iint_{R_4} 3dxdy$$
$$= \iint_{R_2} dxdy + 2\iint_{R_3} dxdy + 3\iint_{R_4} dxdy$$
$$= \frac{3}{2} + 2\cdot\frac{3}{2} + 3\cdot\frac{1}{2} = 6.$$

11. 设函数 $f(x,y)$ 定义在 $R[0\leqslant x\leqslant 1; 0\leqslant y\leqslant 1]$，且 $\forall y\in[0,$

---

① 这里用开区域比较方便，因为补加在区域边界线上的重积分不改变在该区域上的重积分(值)。

1],

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x\text{ 是无理数},\\ 3y^2, & x\text{ 是有理数}.\end{cases}$$

证明 (1)$f(x,y)$在 R 不可积.

证 将区域 R 用直线 $y=\sqrt{\frac{2}{3}}$ 分成两个矩形域 $R_1\left[0\leqslant x\leqslant 1;0\leqslant y\leqslant\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ 与 $R_2\left[0\leqslant x\leqslant 1;\sqrt{\frac{2}{3}}\leqslant y\leqslant 1\right]$,如图13. p.

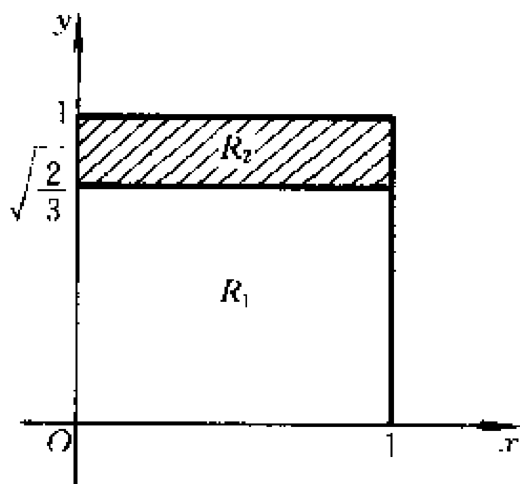


图13. p

用两组平行于坐标轴的直线(要求直线 $y=\sqrt{\frac{2}{3}}$ 总是属于平行 x 轴的直线组)分割 R,这个特殊的分法将区域 R 分成 n 个小矩形域:D_1,D_2,…,D_n. 设 D_k 的面积是 $\Delta\sigma_k$. 作振幅和

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta\sigma_k=\sum_{R_1}\omega_k\Delta\sigma_k+\sum_{R_2}\omega_k\Delta\sigma_k,$$

其中 $\sum\limits_{R_1}\omega_k\Delta\sigma_k$ 与 $\sum\limits_{R_2}\omega_k\Delta\sigma_k$ 分别是 $f(x,y)$在 R_1与 R_2上的振幅和.

在 R_2上, $\omega_k\geqslant\left|1-3\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\right|=1$.

从而, $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta\sigma_k\geqslant\sum\limits_{R_2}\omega_k\Delta\sigma_k\geqslant\sum\limits_{R_2}\Delta\sigma_k=1-\sqrt{\frac{2}{3}}$($R_2$的面积),即

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta\sigma_k\neq 0.$$

于是,函数 $f(x,y)$在 R 不可积.

(2) 累次积分 $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$ 存在.

证 $\forall x\in[0,1]$.

当 x 是有理数，$f(x,y)=3y^2$ 在$[0,1]$(关于 y)可积，且

$$\int_0^1 f(x,y)dy=\int_0^1 3y^2dy=1;$$

当 x 是无理数，$f(x,y)=1$ 在$[0,1]$(关于 y)可积，且

$$\int_0^1 f(x,y)dy=\int_0^1 dy=1.$$

从而，$\forall x\in[0,1]$，$f(x,y)$ 在$[0,1]$(关于 y)都可积，且

$$\int_0^1 f(x,y)dy=1.$$

于是，累次积分 $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$ 存在.

(3)先对 x 后对 y 的累次积分不存在.

证 $\forall y_0\in[0,1]$，且 $y_0\neq\frac{1}{\sqrt{3}}$，一元函数 $f(x,y_0)$ 在$[0,1]$不可积.

事实上，对$[0,1]$的任意分法 T. 在第 k 个小区间$[x_{k-1},x_k]$的振幅

$$\omega_k=|1-3y_0^2|(\text{正常数}),k=1,2,\cdots,n.$$

从而，
$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k=|1-3y_0^2|\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=|1-3y_0^2|,$$

即
$$\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{k}\omega_k\Delta x_k\neq 0.$$

于是，函数 $f(x,y_0)$ 在$[0,1]$不可积，从而先对 x 后对 y 的累次积分不存在.

13. 设函数 $f(x,y)$ 连续，$F(t)=\iint\limits_{R_t}f(x,y)dxdy$，其中 R_t: $x^2+y^2\leqslant t^2$，求 $F'(t)$.

解 设 $x=r\cos\varphi,y=r\sin\varphi,|J|=r$. 有

$$F(t)=\iint\limits_{R_t}f(x,y)dxdy=\int_0^t dr\int_0^{2\pi}rf(r\cos\varphi,r\sin\varphi)d\varphi,$$

根据§12.3定理1，其中被积函数 $\int_0^{2\pi}rf(r\cos\varphi,r\sin\varphi)d\varphi$ 是 r 的连续

函数. 根据§8.4定理1，有

$$F'(t)=\int_0^{2\pi}tf(t\cos\varphi,t\sin\varphi)d\varphi.$$

14. 证明：若函数 $f(x,y)$ 在 $R[a_1\leqslant x\leqslant b_1;a_2\leqslant y\leqslant b_2]$ 连续，$\forall(\alpha,\beta)\in R$，令 $R_{\alpha\beta}[a_1\leqslant x\leqslant\alpha;a_2\leqslant y\leqslant\beta]$，则

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\iint\limits_{R_{\alpha\beta}}f(x,y)dxdy=f(\alpha,\beta).$$

证 已知 $f(x,y)$ 在 R 连续，$\forall(\alpha,\beta)\in R$，设

$$F(\alpha,\beta)=\iint\limits_{R_{\alpha\beta}}f(x,y)dxdy=\int_{a_1}^{\alpha}dx\int_{a_2}^{\beta}f(x,y)dy.$$

已知 $\varphi(x)=\int_{a_2}^{\beta}f(x,y)dy$ 在$[a_1,\alpha]$连续. 根据§8.4定理1，有

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha}=\int_{a_2}^{\beta}f(\alpha,y)dy.$$

又已知 $f(\alpha,y)$ 在$[a_2,b_2]$连续，再根据§8.4定理1，有

$$\frac{\partial^2F}{\partial\alpha\partial\beta}=f(\alpha,\beta),$$

即

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\iint\limits_{R_{\alpha\beta}}f(x,y)dxdy=f(\alpha,\beta).$$

练习题　13.2

(《讲义》下册，第358页)

1. 求下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz$，其中 V 是曲面 $z=xy$ 与平面 $y=x,x=1,z=0$所围成.

解 体 V 是双曲抛物面 $z=xy$ 与三个平面 $y=x,x=1,z=0$所围成，如图13.q. 体 V 在 xy 坐标面上的投影是三条直线 $y=0,x=1,x=y$ 所围成的三角形区域 D，如图13.q. 先对 z 积分，其次在投

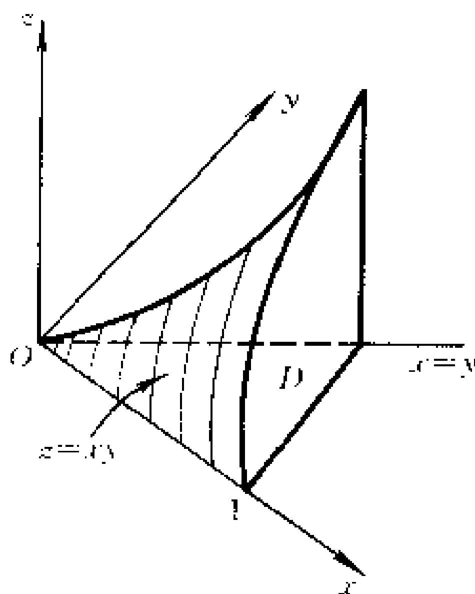


图13.q

影区域 D 作二重积分，即

$$\iiint\limits_V xy^2z^3dxdy = \iint\limits_D xy^2dxdy\int_0^{xy} z^3dz$$

$$= \int_0^1 xdx\int_0^x y^2dy\int_0^{xy} z^3dz = \frac{1}{4}\int_0^1 x^5dx\int_0^x y^6dy$$

$$= \frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}dx = \frac{1}{364}.$$

(3) $\iiint\limits_V xyzdxdydz$.

其中 $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0\}$.

解 体 V 是单位球体的四分之一，如图13.r. 体 V 在 xy 坐标面上的投影是区域 $D(x^2+y^2\leqslant 1; x\geqslant 0, y\geqslant 0)$. 先对 z 积分，其次在投影区域 D 作二重积分，即

$$\iiint\limits_V xyzdxdydz = \iint\limits_D xydxdy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y(1-x^2-y^2)dy = \frac{1}{8}\int_0^1 x(1-x^2)^2dx$$

$$= \frac{1}{48}.$$

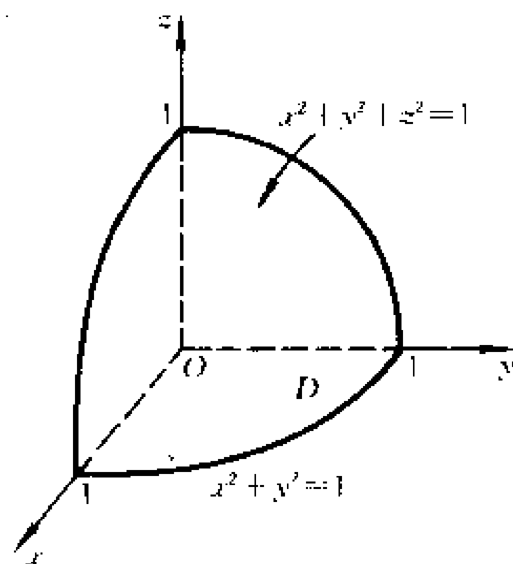


图13.r

2. 将下列三重积分按不同的次序安置积分限：

(1) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz.$

解 体V是：$0\leqslant z\leqslant x+y,0\leqslant y\leqslant 1-x,0\leqslant x\leqslant 1$，即体$V$是五个平面：$x=0,y=0,z=0,x+y=z,x+y=1$所围成，如图13.s.

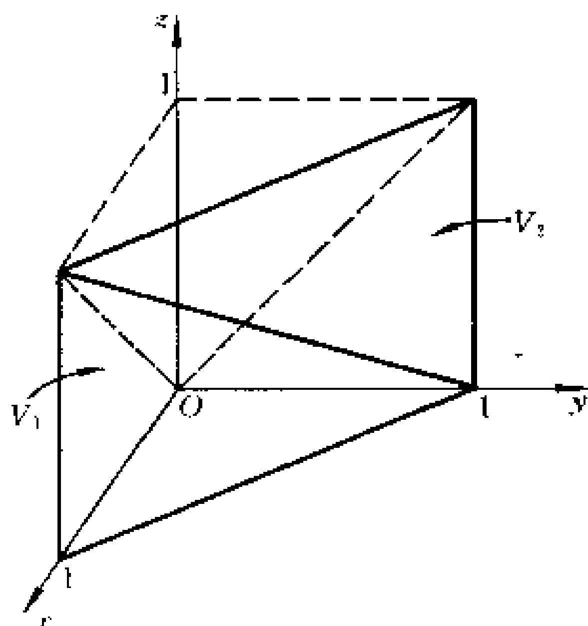


图13.s

先对y积分. 将体V投影到xz坐标面上，投影是正方形区域$D(0\leqslant x\leqslant 1;0\leqslant z\leqslant 1)$. 用平面$z=x$将体$V$分成两个体：$V_1$与$V_2$，如

图13.s. 于是

$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}f(x,y,z)dz$$

$$=\iiint\limits_{V_1}f(x,y,z)dxdydz+\iiint\limits_{V_2}f(x,y,z)dxdydz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x dz\int_0^{1-x}f(x,y,z)dy+\int_0^1 dx\int_x^1 dz\int_{z-x}^{1-x}f(x,y,z)dy.$$

先对 x 积分，将体 V 投影到 yz 坐标面上. 投影是正方形区域 $G(0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1)$. 用平面 $z=y$ 将体 V 分成两个体：V_1 与 V_2. 于是，同法有

$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}f(x,y,z)dz$$

$$=\int_0^1 dz\int_z^1 dy\int_0^{1-y}f(x,y,z)dx+\int_0^1 dz\int_0^z dy\int_{z-y}^{1-y}f(x,y,z)dx.$$

(2) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)dz.$

解 体 V 是：$\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$，$-\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}$，$-1\leqslant x\leqslant 1$，即体 V 是锥面 $z^2=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 所围成，如图13.t.

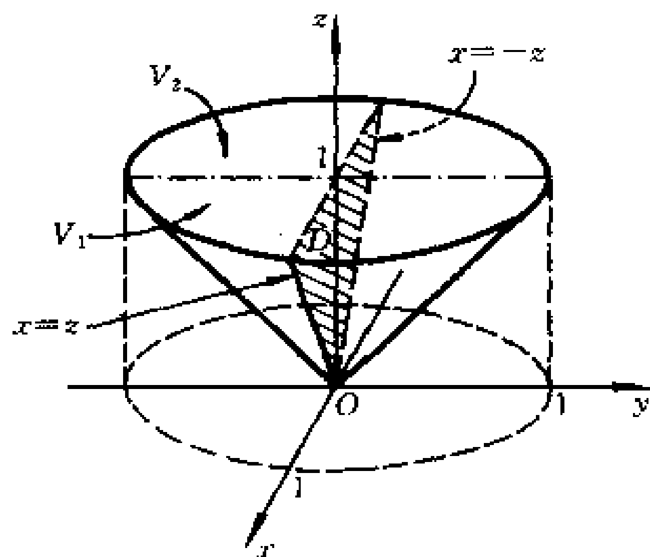


图13.t.

先对 y 积分，将体 V 投影到 xz 坐标面上，投影是三角形区域

$D(x=z, x=-z, z=1$所围成). 于是,先对 y 积分,其次对 x 积分,最后对 z 积分,有

$$\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)dz=\int_{0}^{1}dz\int_{-z}^{z}dx\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}}f(x,y,z)dy.$$

先对 y 积分,其次对 z 积分,最后对 x 积分. 用平面 $x=0$(yz 坐标面)将体 V 分成两个体 V_1 与 V_2,如图13. t. 于是,

$$\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)dz$$

$$=\iiint\limits_{V_1}f(x,y,z)dxdydz+\iiint\limits_{V_2}f(x,y,z)dxdydz$$

$$=\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{1}dz\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}}f(x,y,z)dy+\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{1}dz\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}}f(x,y,z)dy.$$

先对 x 积分,解法同上,从略.

3. 用适当的变换求下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{V}(x^2+y^2)dxdydz$, 其中 V 是曲面 $x^2+y^2=2z$ 与平面 $z=2$ 所围成.

解 体 V 是旋转抛物面 $x^2+y^2=2z$ 与平面 $z=2$所围成,如图13. u.

用柱面坐标替换:

$$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z=z.$$

$|J|=r$. 它将体 V 变换为体 V':

$$\frac{r^2}{2}\leqslant z\leqslant 2, 0\leqslant r\leqslant 2, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

于是,
$$\iiint\limits_{V}(x^2+y^2)dxdydz=\iiint\limits_{V'}r^2\cdot r\cdot drd\varphi dz$$

$$=\int_{0}^{2\pi}d\varphi\int_{0}^{2}r^3dr\int_{\frac{r^2}{2}}^{2}dz=\frac{16}{3}\pi.$$

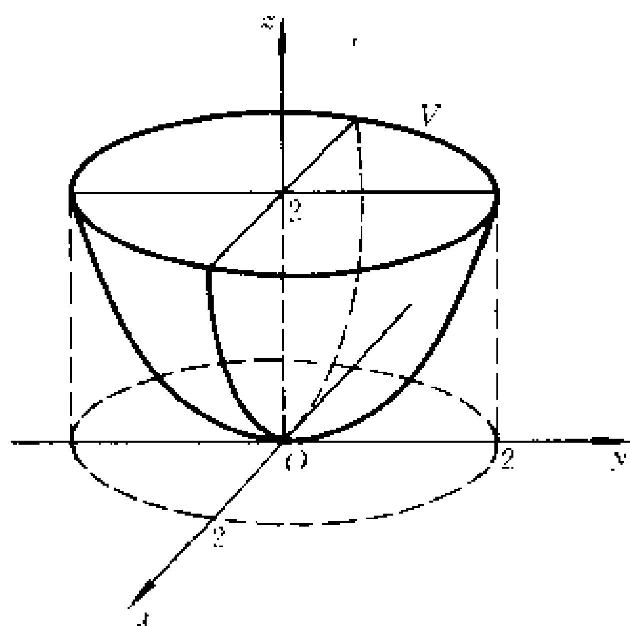


图13.u

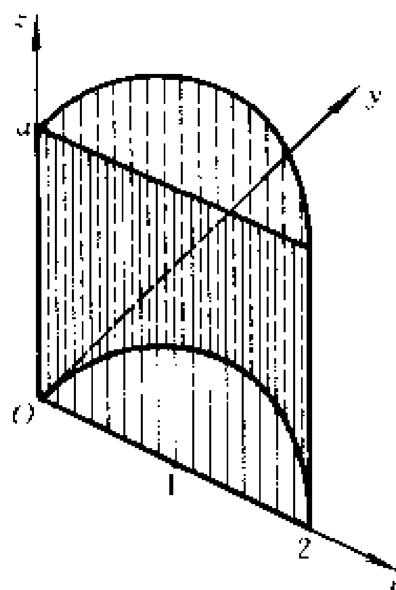


图13.v

(2) $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$，其中$V$是曲面$y=\sqrt{2x-x^2}$与平面$z=0, z=a, y=0$所围成$(a>0)$.

解 体V是上下底都是半圆$(x-1)^2+y^2\leqslant 1\ (y\geqslant 0)$高为$a$平行$z$轴的正半圆柱体，如图13.v.

用柱面坐标替换：

$$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z=z, |J|=r.$$

它将体V变换为体V'：$0\leqslant z\leqslant a, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant 2\cos\varphi$. 于是

$$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\int_0^a dz\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}zr\cdot rdr$$

$$=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi=\frac{8}{9}a^2.$$

(3) $\iiint\limits_V\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dxdydz$，其中$V$是椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$.

解 用广义球面坐标替换：

$$x = ar\sin\varphi\cos\theta,\quad y = br\sin\varphi\sin\theta,\quad z = cr\cos\varphi.$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} a\sin\varphi\cos\theta & ar\cos\varphi\cos\theta & -ar\sin\varphi\sin\theta \\ b\sin\varphi\sin\theta & br\cos\varphi\sin\theta & br\sin\varphi\cos\theta \\ c\cos\varphi & -cr\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= abcr^2\sin\varphi.$$

它将椭球体 V 变换为体 V'：$0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. 于是

$$\iiint_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dxdydz$$

$$= abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\ r^2dr = 4\pi abc\int_0^1 r^2\ \sqrt{1-r^2}\ dr$$

$$= \frac{\pi^2}{4}abc.$$

(4) $\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz$，其中 V 是曲面 $z=\sqrt{b^2-x^2-y^2}$ 与 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(b>a>0)$ 及平面 $z=0$ 所围成.

解 体 V 是球心在原点半径为 a 与 b 的两个上半球面与 xy 坐标面所围成.

用球坐标替换：

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases}\qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = r^2\sin\varphi.$$

它将体 V 变换为体 V'：$a\leqslant r\leqslant b, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. 于是

$$\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi d\varphi\int_a^b r^2\cdot r^2dr$$

$$= \frac{2\pi}{5}(b^5-a^5)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi d\varphi = \frac{2\pi}{5}(b^5-a^5)\cdot\frac{2}{3} = \frac{4\pi}{15}(b^5-a^5).$$

4. 求下列曲面所围成体的体积：

(1) $z=xy, x^2+y^2=x, z=0$.

解 体 V 在 xy 坐标面的投影是圆域 $D:x^2+y^2\leqslant x$. x 轴将圆域 D 分成两个半圆域 $D_1:x^2+y^2\leqslant x$, $y\geqslant 0$ 与 $D_2:x^2+y^2\leqslant x, y\leqslant 0$. 如图13. w. 在 D_1 上的双曲抛物面 $z=xy\geqslant 0$ 在 xy 坐标面的上方，在 D_2 上的双曲抛物面 $z=xy\leqslant 0$ 在 xy 坐标面的下方，且体 V 关于 x 轴对称. 因此，体 V 的体积是第一卦限那部分体积的2倍. 于是，体 V 的体积

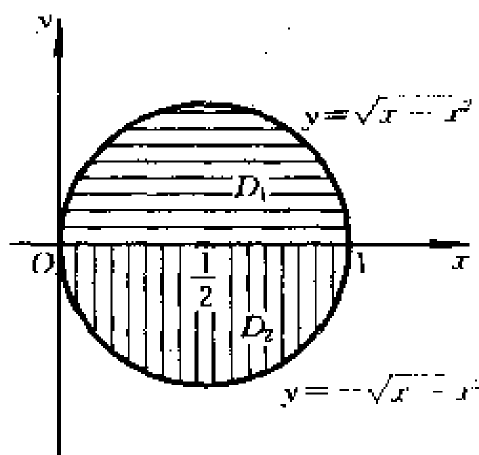


图13. w

$$I=2\iint\limits_{D_1}dxdy\int_0^{xy}dz=2\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}dy\int_0^{xy}dz$$

$$=2\int_0^1xdx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}ydy=\int_0^1x(x-x^2)dx=\frac{1}{12}.$$

(2) $z=x^2+y^2, z=2(x^2+y^2), y=x, y=x^2$.

解 体 V 在 xy 坐标面上的投影是区域 D: $y=x$ 与 $y=x^2$ 所围成. 体 V 在 xy 坐标面的上方，下面的曲面是旋转抛物面 $z=x^2+y^2$，上面的曲面是旋转抛物面 $z=2(x^2+y^2)$. 于是，体 V 的体积

$$I=\iiint\limits_V dxdydz=\int_0^1dx\int_{x^2}^{x}dy\int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)}dz$$

$$=\int_0^1dx\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)dy=\frac{3}{35}.$$

(3) $x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2+z^2=b^2, x^2+y^2=z^2(z\geqslant 0, 0<a<b)$.

解 体 V 如图13. x.

用球面坐标替换：

$$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta, & |J|=r^2\sin\varphi.\\ z=r\cos\varphi.\end{cases}$$

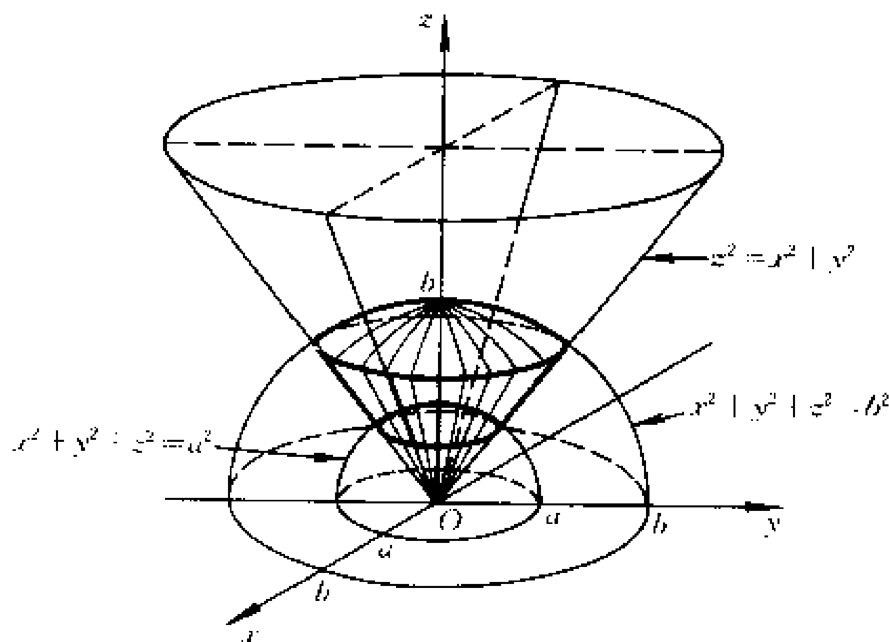


图13.x

球面与锥面在球面坐标系中分别是

$$r=a,r=b,\varphi=\frac{\pi}{4},0\leqslant\theta\leqslant2\pi.$$

即体Γ在球面坐标系中是长方体Γ′：$a\leqslant r\leqslant b,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. 于是，体Γ的体积

$$I=\iiint\limits_{\Gamma}dxdydz=\iiint\limits_{\Gamma'}r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_a^b r^2\sin\varphi dr=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_a^b r^2dr$$

$$=2\pi\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{b^3-a^3}{3}=\frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})(b^3-a^3).$$

(4) $(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=h^2$，其中 $h>0$.

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\neq0.$$

解 作变换

$$\begin{cases} u = a_1x + b_1y + c_1z, \\ v = a_2x + b_2y + c_2z, \\ w = a_3x + b_3y + c_3z. \end{cases} \quad \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \Delta \neq 0.$$

从而，
$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \frac{1}{\left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|} = \frac{1}{|\Delta|}.$$

经过上述变换，体 V 在新坐标系中是球心在原点，半径为 h 的球体 V'：

$$u^2 + v^2 + w^2 \leqslant h^2.$$

于是，体 V 的体积

$$I = \iiint\limits_{V} dxdydz = \iiint\limits_{V'} \frac{1}{|\Delta|} dudvdw$$

$$= \frac{1}{|\Delta|} \iiint\limits_{V'} dudvdw = \frac{4}{3|\Delta|}\pi h^3. \quad \text{(由球的体积公式)}$$

5. 求下列曲面所围成的均匀物体（设 $\rho(x,y,z)=1$）的重心坐标：

(2) $z=x^2+y^2, z=\frac{1}{2}(x^2+y^2), |x|+|y|=1.$

解 设曲面所围成的均匀物体 V 的重心坐标是 (α,β,γ). 因为均匀体 V 关于 z 轴对称，所以 $\alpha=\beta=0$, 下面求坐标 γ.

作变换

$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = x - y, \\ z = z. \end{cases} \quad \frac{\partial(u,v,z)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

从而，
$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,z)}\right| = \frac{1}{\left|\frac{\partial(u,v,z)}{\partial(x,y,z)}\right|} = \frac{1}{|-2|} = \frac{1}{2}.$$

体 V 在新坐标系中是体 V'：

$$-1 \leqslant u \leqslant 1, -1 \leqslant v \leqslant 1, \frac{u^2+v^2}{4} \leqslant z \leqslant \frac{u^2+v^2}{2}.$$

于是，均匀物体 V 的体积

$$I=\iiint\limits_{V}dxdydz=\iiint\limits_{V'}\frac{1}{2}dudvdw$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}dv\int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}}dz=\frac{1}{8}\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}(u^2+v^2)dv$$

$$=\frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\left(2u^2+\frac{2}{3}\right)du=\frac{1}{3}.$$

再由重心坐标的公式，有

$$\gamma=\frac{1}{I}\iiint\limits_{V}zdxdydz=\frac{1}{2\cdot I}\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}dv\int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}}zdz$$

$$=\frac{3}{64\cdot I}\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}(u^4+2u^2v^2+v^4)dv$$

$$=\frac{3}{64\cdot I}\int_{-1}^{1}\left(2u^4+\frac{4}{3}u^2+\frac{2}{5}\right)du=\frac{7}{20}.$$

于是，重心坐标是 $\left(0,0,\frac{7}{20}\right)$.

6. 求下列曲面所围成的均匀物体（设 $\rho(x,y,z)\equiv1$）关于 z 轴的转动惯量：

(2) $x^2+y^2+z^2=2$, $x^2+y^2=z^2$ $(z\geqslant0)$.

解 作柱面坐标替换：

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi,\\ z=z.\end{cases}\qquad |J|=r.$$

体 V 在柱面坐标系是体 V'：

$$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant1,\ r\leqslant z\leqslant\sqrt{2-r^2}.$$

由关于 z 轴的转动惯量公式，有

$$J_z=\iiint\limits_{V}(x^2+y^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1dr\int_r^{\sqrt{2-r^2}}r^2\cdot rdz$$

$$=2\pi\int_0^1 r^3(\sqrt{2-r^2}-r)dr=\frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2}-5).$$

*　　*　　*　　*

7. 证明：

$$\int_0^x dv\int_0^v du\int_0^u f(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt.$$

证　将上面等式等号的左端化为三重积分，积分域是体 V：$0\leqslant t\leqslant u, 0\leqslant u\leqslant v, 0\leqslant v\leqslant x$，即体 V 是 tuv 空间直角坐标系中四个平面：$t=0$、$t=u$, $u=v$ 和 $v=x$ 所围成，如图13. y.

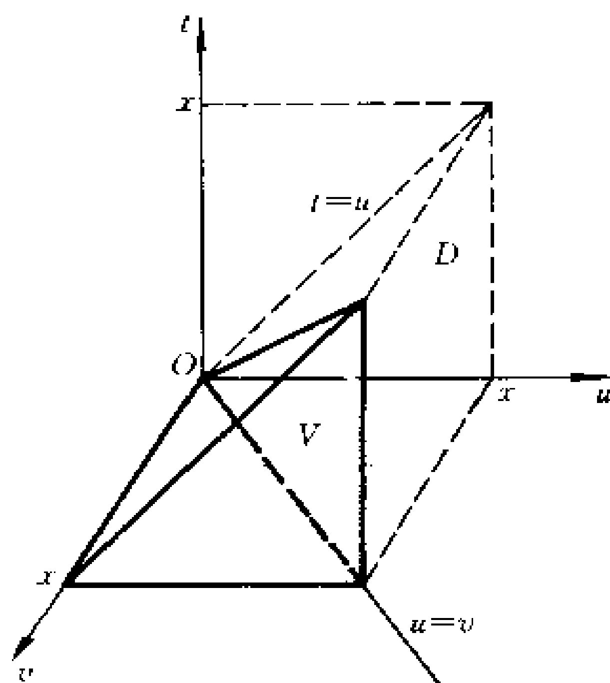


图13. y

将上面等式等号左端的累次积分交换次序：先对 v 积分，其次对 u 积分，最后对 t 积分. 将体 V 投影到 tu 坐标平面上，它是三条直线 $t=u, u=x, t=0$所围成的三角形区域 D，如图13. y. 于是

$$\int_0^x dv\int_0^v du\int_0^u f(t)dt=\int_0^x dt\int_t^x du\int_u^x f(t)dv$$

$$=\int_0^x dt\int_t^x f(t)(x-u)du=-\int_0^x f(t)dt\int_t^x (x-u)d(x-u)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt.$$

8. 设 $F(t)=\iiint\limits_V f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$，其中 $V: x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2$，$f$ 是可微函数，求 $F'(t)$.

解 用球面坐标替换：

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases} \qquad |J| = r^2\sin\varphi.$$

经过球面坐标替换，体 V 在球面坐标系中是长方体 V'：

$$0 \leqslant r \leqslant t,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

从而，有

$$F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^t f(r^2) r^2 \sin\varphi dr$$

$$= 4\pi \int_0^t r^2 f(r^2) dr.$$

于是，$$F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2).$$

9. 设函数 $f(x,y,z)$ 在体 $V: x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$ 连续，$V_r: x^2+y^2+z^2 \leqslant r^2$，$(0<r\leqslant 1)$. 求极限

$$\lim_{r\to 0} \frac{3}{r^3} \iiint\limits_{V_r} f(x,y,z)dxdydz.$$

解 已知 $f(x,y,z)$ 在 V 连续，根据三重积分的中值定理(本定理是二重积分中值定理的自然推广，易证)，存在一点 $(\xi,\eta,\zeta) \in V_r$，使

$$\iiint\limits_{V_r} f(x,y,z)dxdydz = f(\xi,\eta,\zeta)\overline{V}_r,$$

其中 $\overline{V}_r$ 是半径为 r 的球的体积. 从而

$$\iiint\limits_{V_r} f(x,y,z)dxdydz = \frac{4}{3}\pi r^3 f(\xi,\eta,\zeta).$$

已知 $f(x,y,z)$ 在原点 $(0,0,0)$ 连续，当 $r\to 0$，有 $(\xi,\eta,\zeta)\to(0,$

0,0). 于是,

$$\lim_{r\to 0}\frac{3}{r^3}\iiint_{V_r} f(x,y,z)dxdydz$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{3}{r^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 f(\xi,\eta,\zeta) = 4\pi f(0,0,0).$$

10. 求下列曲面所围成的体积:

(1) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$.

解 显然,如果点$(\pm x,\pm y,\pm z)$(任取正负号)在曲面上,则它关于原点对称的点$(\mp x,\mp y,\mp z)$也在曲面上. 因此,曲面所围成的体V关于原点对称,从而体V的体积是第一卦限那部分体积的8倍. 为了计算第一卦限那部分体V_1的体积,作球面坐标替换:

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases} \qquad |J| = r^2\sin\varphi.$$

曲面在球面坐标中的方程是

$$r^2 = a^2(-\cos 2\varphi) \quad 或 \quad r = a\sqrt{-\cos 2\varphi}.$$

为了使 $r\geqslant 0$,在第一卦限中,要求$\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$. 从而第一卦限那部分的体$V_1$:

$$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant a\sqrt{-\cos 2\varphi}.$$

于是,体V的体积

$$I=\iiint_V dxdydz = 8\iiint_{V_1} r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{-\cos 2\varphi}} r^2\sin\varphi dr$$

$$=8\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a^3}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}\sin\varphi d\varphi$$

$$=\frac{4}{3}\pi a^3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}\sin\varphi d\varphi \quad (设\ u=\cos\varphi)$$

$$=\frac{4}{3}\pi a^3\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(1-2u^2)^{\frac{3}{2}}du \qquad (设\ u=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t)$$

$$=\frac{4}{3}\pi a^3\ \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t dt=\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}.$$

(2) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^3=\frac{x}{h}\quad(h>0).$

解 显然，$x\geqslant 0$，即曲面所围成的体 V 位于 yz 坐标面 x 轴正方向的一侧. 如果点 $(x,\pm y,\pm z)$（任取正负号，$x\geqslant 0$）在曲面上，则它关于 x 轴对称的点 $(x,\mp y,\mp z)$ 也在曲面上. 因此，曲面所围成的体 V 关于 x 轴对称. 从而体 V 的体积是第一卦限那部分的体 V_1 的体积的4倍. 为了计算第一卦限那部分体 V_1 的体积，作广义球面坐标替换：

$$\begin{cases}x=ar\sin\varphi\cos\theta,\\ y=br\sin\varphi\sin\theta,\\ z=cr\cos\varphi.\end{cases}\qquad |J|=abcr^2\sin\varphi.$$

曲面在球面坐标系中的方程是

$$r^4=\frac{a}{h}r\sin\varphi\cos\theta \quad 或 \quad r=\sqrt[3]{\frac{a}{h}\sin\varphi\cos\theta}.$$

第一卦限那部分的体 V_1 是

$$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant\sqrt[3]{\frac{a}{h}\sin\varphi\cos\theta}.$$

于是，体 V 的体积

$$I=\iiint\limits_V dxdydz=4\iiint\limits_{V_1}dxdydz$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sqrt[3]{\frac{a}{h}\sin\varphi\cos\theta}}abcr^2\sin\varphi dr$$

$$= \frac{4a^2bc}{3h}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi = \frac{\pi a^2bc}{3h}.$$

11. 求三重积分

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}},$$

其中 V 是球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，且 $a>1$.

解 用球面坐标替换：

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases} \qquad |J| = r^2\sin\varphi.$$

球体 V：$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$在球面坐标系中是长方体 V'：

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, 0\leqslant r\leqslant 1.$$

于是，

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_0^{\pi}\frac{r^2\sin\varphi}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\varphi}}d\varphi$$

$$= 2\pi\int_0^1\left(\frac{r}{a}\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\varphi}\right)\Big|_0^{\pi}dr$$

$$= \frac{4\pi}{a}\int_0^1 r^2dr = \frac{4\pi}{3a}.$$

12. 证明：若函数 $f(x,y,z)$连续，则

$$\iiint\limits_V f(ax+by+cz)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(ku)dudvdw,$$

其中 V：$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$；V'：$u^2+v^2+w^2\leqslant 1$；$k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

证 将 xyz 的直角坐标系以原点为心旋转. 取平面 $ax+by+cz=0$为 vw 坐标面(v 轴与 w 轴垂直)，取 u 轴是经过原点，且垂直于 vw 坐标面的坐标轴，要求 u,v,w 轴构成右手系. 由空间解析几何的坐标旋转公式，有

$$\begin{cases} u = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1, \\ v = x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2, \\ w = x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3. \end{cases}$$

其中 $\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1$；$\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2$；$\cos\alpha_3, \cos\beta_3, \cos\gamma_3$ 分别是 u、v、w 轴关于 x、y、z 轴的方向余弦，则

$$\cos\alpha_1 = \frac{a}{k}, \cos\beta_1 = \frac{b}{k}, \cos\gamma_1 = \frac{c}{k}, k = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

则 $$u = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 = \frac{1}{k}(ax + by + cz)$$

或 $$ax + by + cz = ku.$$

因为 u、v、w 三个坐标轴互相垂直，所以

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix} = 1.$$

从而，$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}} = 1,$$

而 $$V': u^2 + v^2 + w^2 = (x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1)^2 + (x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2)^2 + (x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3)^2 = 1.$$

于是

$$\iiint_V f(ax + by + cz)\,dxdydz = \iiint_{V'} f(ku)\,dudvdw.$$

第十四章　曲线积分与曲面积分

练习题　14.1

（《讲义》下册，第392页）

1. 求下列第一型曲线积分：

(2) $\oint\limits_{c} xyds$，其中 c：$|x|+|y|=a(a>0)$.

解　闭曲线 c 是正方形的边界，如图14.a. 设 $c=c_1+c_2+c_3+c_4$.

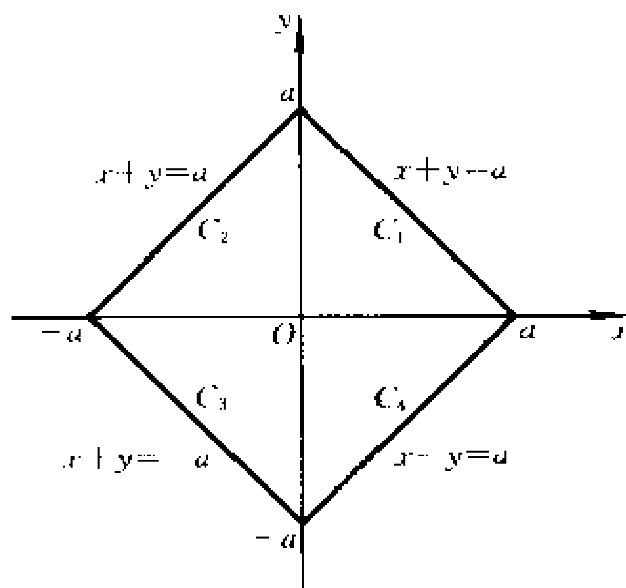


图14.a

c_1：$x+y=a$ 或 $y=-x+a$.

c_1的弧长微分 $ds=\sqrt{2}\,dx$.

同样，c_2,c_3,c_4的弧长微分也是 $ds=\sqrt{2}\,dx$. 于是，

$$\oint_c xyds = \int_{c_1} xyds + \int_{c_2} xyds + \int_{c_3} xyds + \int_{c_4} xyds$$

$$= \sqrt{2}\left[\int_0^a x(a-x)dx + \int_a^0 x(a+x)dx + \int_a^0 x(-a-x)dx + \int_0^a x(-a+x)dx\right] = 0.$$

(4) $\int_c \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$，其中 $c: x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

解 $x'=-a\sin t, y'=a\cos t, z'=b$. 从而

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\,dt.$$

于是

$$\int_c \frac{ds}{x^2+y^2+z^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2t^2}dt$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}t\right)^2}dt = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}t\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\operatorname{arctg}\frac{2b\pi}{a}.$$

3. 证明：若函数 $f(x,y)$ 在光滑曲线 $C(A,B)$ 连续. 且 $\min\limits_{(x,y)\in C}\{f(x,y)\}=m$, $\max\limits_{(x,y)\in C}\{f(x,y)\}=M$，则$\exists (x_0,y_0)\in C(A,B)$，使

$$\int_{C(A,B)} f(x,y)ds = f(x_0,y_0)\bar{s},$$

其中 $\bar{s}$ 是曲线 $C(A,B)$ 的长.

证 已知$\forall (x,y)\in C$，有

$$m\leqslant f(x,y)\leqslant M.$$

在曲线 C 上分别作第一型曲线积分，根据第2题，有

$$\int_C mds \leqslant \int_C f(x,y)ds \leqslant \int_C Mds$$

或

$$m\int_C ds \leqslant \int_C f(x,y)ds \leqslant M\int_C ds,$$

其中 $\int_C ds$ 是曲线 C 的长，即 $\int_C ds = \bar{s}$. 上式可以写为

$$m \leqslant \frac{1}{\bar{s}} \int_C f(x,y) ds \leqslant M.$$

再根据连续函数介值性的证明知，$\exists (x_0, y_0) \in C$，使

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{\bar{s}} \int_C f(x,y) ds \quad 或 \quad \int_C f(x,y) ds = f(x_0, y_0) \bar{s}.$$

6. 求下列第二型曲线积分：

(2) $\int_C (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$，其中 $C: y = 1 - |1 - x|, 0 \leqslant x \leqslant 2$，从 $(0,0)$ 到 $(2,0)$.

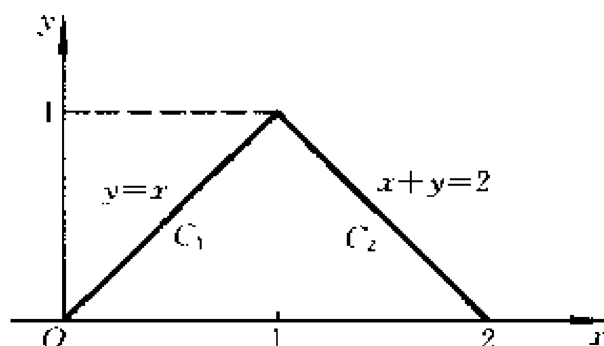


图14.b

解 曲线 C 如图14.b. 设 $C = C_1 + C_2$. $C_1: y = x$, $C_2: x + y = 2$.

$$\int_{C_1} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

$$\int_{C_2} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$$

$$= \int_1^2 [x^2 + (2 - x)^2] dx + [x^2 - (2 - x)^2](-dx) = \frac{2}{3}.$$

于是，

$$\int_C (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy = \int_{C_1} + \int_{C_2} = \frac{4}{3}.$$

(4) $\int_C y^2dx + xydy + zxdz$, 其中 C 从点(0,0,0)到(1,1,1).沿着①直线段;②从点(0,0,0)出发,经过点(1,0,0)和(1,1,0)最后到(1,1,1)的折线.

解 ①直线段 C_1,它的参数方程是

$$x = t,\ y = t,\ z = t,\quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

$$x' = y' = z' = 1,\quad dx = dy = dz = dt.$$

于是, $$\int_{C_1} y^2dx + xydy + zxdz = \int_0^1 (t^2 + t^2 + t^2)dt = 1.$$

②折线,C_2:$OA+AB+BD$.如图14.c.

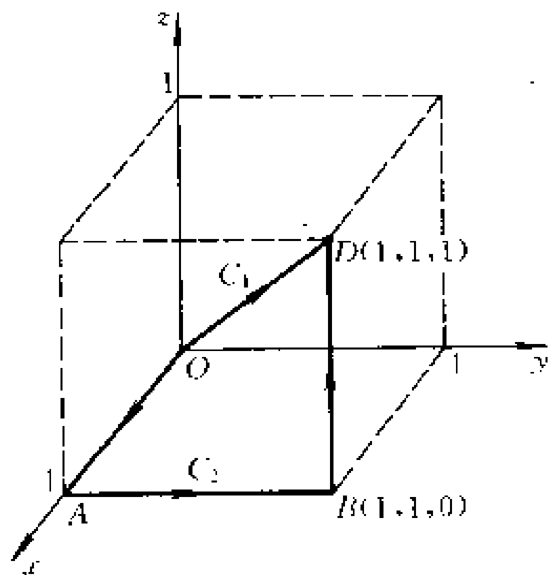


图14.c

OA 的参数方程:

$$x = t,\ y = 0,\ z = 0,\quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

有 $$\int_{OA} y^2dx + xydy + zxdz = 0.$$

AB 的参数方程:

$$x = 1,\ y = t,\ z = 0,\quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

有 $$\int_{AB} y^2dx + xydy + zxdz = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}.$$

BD 的参数方程：

$$x=1,\ y=1,\ z=t,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

有
$$\int_{BD} y^2dx+xydy+zxdz=\int_0^1 tdt=\frac{1}{2}.$$

于是，
$$\int_{C_2} y^2dx+xydy+zxdz=\int_{OA}+\int_{AB}+\int_{BD}=0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

7. 应用格林公式求下列曲线积分：

(2) $\oint_C \ln\left(\frac{2+y}{1+x^2}\right)dx+\frac{x(y+1)}{2+y}dy$，其中 C 是四条直线 $x=\pm 1, y=\pm 1$ 围成正方形的边界.

解 设这四条直线所围成的区域是正方形区域 $D(-1\leqslant x\leqslant 1, -1\leqslant y\leqslant 1)$.

$$P(x,y)=\ln\left(\frac{2+y}{1+x^2}\right),\qquad Q(x,y)=\frac{x(y+1)}{2+y}.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{2+y},\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y+1}{2+y}.$$

显然，它们在闭正方形区域 D 都连续. 由格林公式，有

$$\oint_C \ln\left(\frac{2+y}{1+x^2}\right)dx+\frac{x(y+1)}{2+y}dy=\iint_D\left(\frac{y+1}{2+y}-\frac{1}{2+y}\right)dxdy$$

$$=\iint_D \frac{y}{2+y}dxdy=\int_{-1}^1 dx\int_{-1}^1\frac{y}{2+y}dy=4(1-\ln 3).$$

(3) $\int_C (e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$，其中 m 是常数，C 是沿上半圆周 $x^2+y^2=ax(y\geqslant 0)$，由点 $A(a,0)$ 到点 $O(0,0)$.

解 上半圆周 $C: x^2+y^2=ax(y\geqslant 0)$，如图14.d. 补加线段 OA，得到逐段光滑的闭曲线 $l=C+OA$. 设 l 所围成的半圆域是 D，如图14.d.

$$P(x,y)=e^x\sin y-my,\quad Q(x,y)=e^x\cos y-m.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-m,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y.$$

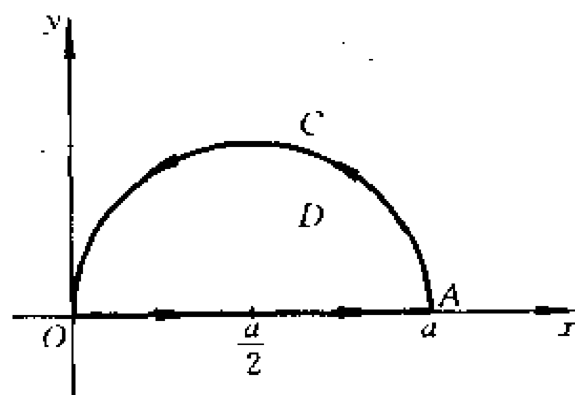


图14.4

显然，它们在闭区域 D 连续. 由格林公式，有

$$\oint_{l}(e^{x}\sin y - my)dx + (e^{x}\cos y - m)dy = \int_{C} + \int_{OA}$$

$$= \iint_{D}(e^{x}\cos y - e^{x}\cos y + m)dxdy = m\iint_{D}dxdy = \frac{m\pi}{8}a^{2},$$

其中 OA 的方程是 $y=0, 0\leqslant x\leqslant a$. 有

$$\int_{OA}(e^{x}\sin y - my)dx + (e^{x}\cos y - m)dy = 0.$$

于是，
$$\int_{C}(e^{x}\sin y - my)dx + (e^{x}\cos y - m)dy$$

$$= \frac{m\pi}{8}a^{2} - \int_{OA} = \frac{m\pi}{8}a^{2}.$$

8. 求下列闭曲线围成区域的面积：

(2) $x=a\cos^{3}t, y=b\sin^{3}t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$

解 $\quad dx=-3a\cos^{2}t\sin t dt,$

$\quad dy=3b\sin^{2}t\cos t dt.$

由计算面积的公式，曲线围成区域 D 的面积

$$A = \iint_{D}dxdy = \frac{1}{2}\oint_{C}xdy - ydx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}[a\cos^{3}t\cdot 3b\sin^{2}t\cos t - b\sin^{3}t(-3a\cos^{2}t\sin t)]dt$$

$$=\frac{3ab}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2t\cos^2tdt=\frac{3}{8}\pi ab.$$

9. 求下列各题的原函数 $u(x,y)$：

(2) $du=(3x^2-2xy+y^2)dx-(x^2-2xy+3y^2)dy.$

解 $P(x,y)=3x^2-2xy+y^2$，$Q(x,y)=-x^2+2xy-3y^2$.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-2x+2y.$$

显然，它们在 $\mathbf{R}^2$ 连续. 从而，曲线积分与路线无关.

为便于计算，取 $(x_0,y_0)=(0,0)$. 于是，$\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2$，有

$$u(x,y)=\int_0^x 3x^2dx-\int_0^y(x^2-2xy+3y^2)dy+C$$

$$=x^3-x^2y+xy^2-y^3+C,$$

即原函数 $u(x,y)=x^3-x^2y+xy^2-y^3+C$（$C$ 是任意常数）.

* * * *

10. 设函数 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在区域 R 存在二阶连续偏导数，且满足柯西一黎曼方程：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. 证明：若已知函数 $u(x,y)$，则函数 $v(x,y)$ 除相差一常数外唯一确定.

证 已知 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},$$

即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

从而，

$$dv(x,y)=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy,$$

其中

$$P(x,y)=-\frac{\partial u}{\partial y},\quad Q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}.$$ 已知

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

从而，曲线积分与路线无关. 于是，函数

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy$$

与 $u(x,y)$除相差一个常数外唯一确定.

11. 证明:若函数 $P(x,y)$与 $Q(x,y)$在光滑曲线 C 连续,则

$$\left|\int_C Pdx + Qdy\right| \leqslant M\bar{s},$$

其中 $\bar{s}$ 是曲线 C 的长,$M=\max\limits_{(x,y)\in C}\{\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}\}$. 应用这个不等式,估计

$$I_R = \oint_C \frac{ydx - xdy}{(x^2+xy+y^2)^2},$$

其中 $C:x^2+y^2=R^2$. 证明:$\lim\limits_{R\to+\infty} I_R=0$.

证 将第一型曲线积分化为第二型曲线积分,有

$$\left|\int_C Pdx + Qdy\right| = \left|\int_C (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)ds\right|.$$

$\forall (x,y)\in C$,有

$|P\cos\alpha + Q\sin\alpha| = |(P,Q)\cdot(\cos\alpha,\sin\alpha)|$ (向量数量积)

$\leqslant |(P,Q)|\cdot|(\cos\alpha,\sin\alpha)|$

$= \sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}\cdot\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$

$= \sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)} \leqslant M.$

于是,$\left|\int_C Pdx + Qdy\right| \leqslant \int_C |P\cos\alpha + Q\sin\alpha|ds$

$$\leqslant \int_C Mds = M\int_C ds = M\bar{s},$$

其中 $\bar{s}$ 是曲线 C 的长.

将圆周 $C:x^2+y^2=R^2$化为参数方程:

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

$$P = \frac{y}{(x^2+xy+y^2)^2} = \frac{\sin t}{R^3\left(1+\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2}.$$

$$Q = \frac{-x}{(x^2+xy+y^2)^2} = \frac{-\cos t}{R^3\left(1+\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2}.$$

$$P^2+Q^2=\frac{1}{R^6\left(1+\frac{1}{2}\sin 2t\right)^4}.$$

$$M=\max_{t\in[0,2\pi]}\{\sqrt{P^2+Q^2}\}=\max_{t\in[0,2\pi]}\left\{\frac{1}{R^3\left(1+\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2}\right\}=\frac{4}{R^3}.$$

从而，
$$|I_R|\leqslant M\bar{s}=\frac{4}{R^3}\cdot 2\pi R=\frac{8\pi}{R^2}.$$

因为 $\lim\limits_{R\to+\infty}\frac{8\pi}{R^2}=0$，所以 $\lim\limits_{R\to+\infty}I_R=0$.

12. 证明：若 C 是平面光滑闭曲线，且 l 是任意确定方向的射线，则

$$\oint_C\cos(l,n)ds=0,$$

其中 n 是 C 的外法线.

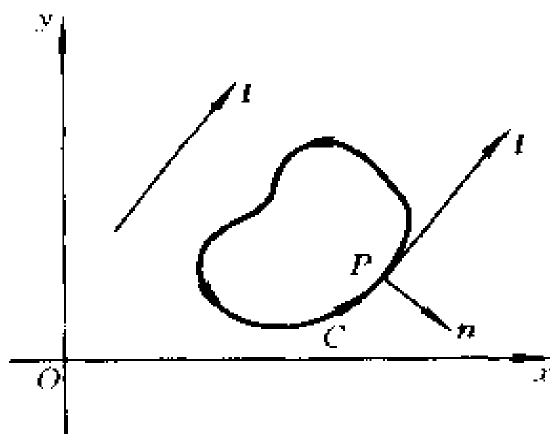


图14.e

证 已知 (l,n) 是 l 的正向与外法线 n 交角. 设 (n,x) 和 (l,x) 分别是外法线 n 和 l 与 x 轴正方向的夹角，如图14.e. 有

$$(l,x)=(l,n)+(n,x).$$

$$\cos(l,n)=\cos[(l,x)-(n,x)]$$
$$=\cos(l,x)\cos(n,x)+\sin(l,x)\sin(n,x).$$

已知 $\cos(n,x)ds=dy$，$-\sin(n,x)ds=dx$（见 § 14.1，第二段），有

$$\oint_C \cos(l,n)ds = \oint_C \cos(l,x)\cos(n,x)ds + \sin(l,x)\sin(n,x)ds$$

$$= \oint_C \cos(l,x)dy - \sin(l,x)dx.$$

其中 $P(x,y)=-\sin(l,x)$，$Q(x,y)=\cos(l,x)$ 都是常数，有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

根据格林公式，有

$$\oint_C \cos(l,n)ds = 0.$$

13. 证明：$\oint_C [x\cos(n,x) + y\cos(n,y)]ds = 2A$，其中 A 是光滑闭曲线 C 围成区域的面积，(n,x) 与 (n,y) 是曲线 C 外法线 n 分别与 x 轴正向与 y 轴正向的交角.

证 已知 $\cos(n,x)ds=dy$，(见§14.1，第三段)

$$-\cos(n,y)ds = -\cos\left[\frac{\pi}{2} - (n,x)\right]ds = -\sin(n,x)ds = dx.$$

有 $$\oint_C [x\cos(n,x) + y\cos(n,y)]ds = \oint_C xdy - ydx.$$

由曲线积分计算面积的公式，有

$$\oint_C [x\cos(n,x) + y\cos(n,y)]ds = 2\left(\frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx\right) = 2A.$$

14. 若函数 $f(x,y)$ 存在连续二阶偏导数，在区域 G 满足方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

则称 $f(x,y)$ 在 G 是调和函数. 函数 $f(x,y)$ 在 G 是调和函数 $\Leftrightarrow$ 对 G 内任意逐段光滑闭曲线 C，有

$$\oint_C \frac{\partial f}{\partial n}ds = 0.$$

证 $\Rightarrow$ 已知 $f(x,y)$ 在 G 是调和函数，则 $\forall(x,y)\in G$，有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

设 C 是 G 内任意光滑闭曲线，它围成的区域是 D. 由已知的方向导数和格林公式，有

$$\oint_C \frac{\partial f}{\partial n}ds=\oint_C\left[\frac{\partial f}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial f}{\partial y}\cos(n,y)\right]ds$$

$$=\oint_C \frac{\partial f}{\partial x}dy-\frac{\partial f}{\partial y}dx$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy=0.$$

$\Leftarrow$ 用反证法　假设$\exists P_0\in G$，使$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\Big|_{P_0}\neq 0$.

不妨设　$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\Big|_{P_0}=A>0$. 由连续函数的保号性，$\exists U(P_0,r)$，$\forall(x,y)\in U(P_0,r)\cap G$，有$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\geqslant\frac{A}{2}$.

设区域 $U(P_0,r)\cap G$ 的边界是逐段光滑的闭曲线是 C_r，它围成的区域是 D_r，有(同上)

$$\int_{C_r}\frac{\partial f}{\partial n}ds=\iint_{D_r}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy\geqslant\frac{A}{2}\iint_{D_r}dxdy$$

$$=\frac{A}{2}\cdot\bar{D}_r>0,$$

其中 $\bar{D}_r$ 是区域 D_r 的面积. 与已知条件矛盾，于是，$\forall(x,y)\in G$，有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,$$

即 $f(x,y)$在 G 是调和函数.

15. 证明：若 $u(x,y)$有连续的二阶偏导数，则

$$\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=-\iint_G u\Delta u dxdy+\oint_C u\frac{\partial u}{\partial n}ds,$$

其中 G 是光滑闭曲线 C 所围成的区域，$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

证 由方向导数和第一、二型曲线积分之间关系，有

$$\oint_C u\frac{\partial u}{\partial n}ds = \oint_C u\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y)\right]ds$$

$$= \oint_C u\frac{\partial u}{\partial x}dy - u\frac{\partial u}{\partial y}dx,$$

其中 $P=-u\frac{\partial u}{\partial y}, Q=u\frac{\partial u}{\partial x}$. 由格林公式，有

$$\oint_C u\frac{\partial u}{\partial n}ds = \iint_G\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dxdy$$

$$= \iint_G\left[u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

$$= \iint_G u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy + \iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

$$= \iint_G u\Delta u dxdy + \iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

或

$$\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy = -\iint_G u\Delta u dxdy + \oint_C u\frac{\partial u}{\partial n}ds.$$

16. 求高斯积分

$$I(\xi,\eta) = \oint_C \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}ds,$$

其中 C 是无重点的光滑闭曲线，$\boldsymbol{r}$ 是连结曲线 C 上动点 $M(x,y)$ 与不在 C 上的定点 $A(\xi,\eta)$ 的矢径，$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$，$\boldsymbol{n}$ 是曲线 C 在点 $M(x,y)$ 的外法线向量.

解 见《讲义》下册，第395页，图14.19.

$$(x,\boldsymbol{n}) = (x,\boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}) \quad 或 \quad (\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}) = (x,\boldsymbol{n}) - (x,\boldsymbol{r}).$$

$$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}) = \cos[(x,\boldsymbol{n}) - (x,\boldsymbol{r})]$$

$$= \cos(x,\boldsymbol{n})\cos(x,\boldsymbol{r}) + \sin(x,\boldsymbol{n})\sin(x,\boldsymbol{r})$$

$$= \frac{x-\xi}{r}\cos(x,\boldsymbol{n}) + \frac{y-\eta}{r}\sin(x,\boldsymbol{n}).$$

于是，　$$I(\xi,\eta)=\oint_C\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}ds$$

$$=\oint_C\left[\frac{x-\xi}{r^2}\cos(x,\boldsymbol{n})+\frac{y-\eta}{r^2}\sin(x,\boldsymbol{n})\right]ds$$

$$=\oint_C\frac{x-\xi}{r^2}dy-\frac{y-\eta}{r^2}dx.$$

$$P(x,y)=-\frac{y-\eta}{r^2},\qquad Q(x,y)=\frac{x-\xi}{r^2}.$$ 有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{(y-\eta)^2-(x-\xi)^2}{r^4}.$$

下面分两种情况讨论：

1)　当点 $A(\xi,\eta)$ 位于闭曲线 C 之外，由格林公式，有

$$I(\xi,\eta)=\oint_C\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}ds=\oint_C\frac{x-\xi}{r^2}dy-\frac{y-\eta}{r^2}dx$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0,$$

其中 D 是闭曲线 C 围成的区域；

2)当点 $A(\xi,\eta)$ 位于闭曲线 C 围成区域 D 的内部，即 $A(\xi,\eta)$ 是 D 的内点．取以点 $A(\xi,\eta)$ 为心任意充分小的 $\delta>0$ 为半径的圆域 D_δ，使 $D_\delta\subset D$，如图14.f．设小圆域 D_δ 的边界(圆周)是 C_δ．显然，函数

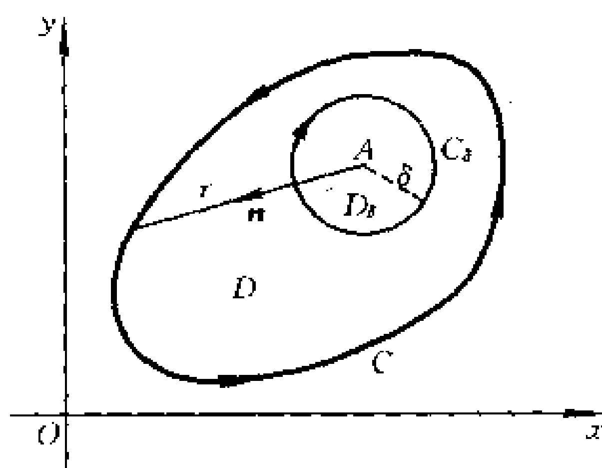


图14.f

$$P(x,y)=-\frac{y-\eta}{r^2},\ Q(x,y)=\frac{x-\xi}{r^2}$$

在区域 $D-D_\delta$ 上满足定理4的条件，有

$$\oint_{C+C_\delta}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}ds=\oint_{C+C_\delta}\frac{x-\xi}{r^2}dy-\frac{y-\eta}{r^2}dx=0$$

或 $$\oint_{C}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}ds=-\oint_{C_\delta}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{\delta}ds=\oint_{C_\delta^-}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{\delta}ds,$$

其中 C_δ 的正向是顺时针方向，C_δ^- 表示 C_δ 的相反方向，即逆时针的方向. C_δ^- 的外法线 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 在一条直线上，即

$$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=0,\quad 从而\quad \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=1,$$

于是

$$I(\xi,\eta)=\oint_{C}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}ds=\oint_{C_\delta^-}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{\delta}ds$$

$$=\frac{1}{\delta}\oint_{C_\delta^-}ds=\frac{1}{\delta}\cdot 2\pi\delta=2\pi.$$

综上可得

$$I(\xi,\eta)=\oint_{C}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}ds=\begin{cases}0, & A\text{ 在 }C\text{ 之外},\\ 2\pi, & A\text{ 在 }C\text{ 之内}.\end{cases}$$

练习题 14.2

（《讲义》下册，第417页）

1. 求下列第一型曲面积分：

(1) $\iint\limits_{S}(x+y+z)d\sigma$，其中 S 是 $x^2+y^2+z^2=a^2, z\geqslant 0$.

解 $S: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 在 xy 坐标面的投影是区域 $D: x^2+y^2\leqslant a^2$.

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

于是，$\iint_S (x+y+z)d\sigma$

$$= \iint_D (x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$= a\iint_D \left(\frac{x+y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+1\right)dxdy \quad \left(设\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}\right)$$

$$= a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left[\frac{r(\cos\varphi+\sin\varphi)}{\sqrt{a^2-r^2}}+1\right]rdr$$

$$= a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left[\frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}(\cos\varphi+\sin\varphi)+r\right]dr$$

$$= a\int_0^{2\pi}(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi\int_0^a \frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}dr + a\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a rdr = \pi a^3.$$

(2) $\iint_S z^2 d\sigma$，其中 S 是 $x = r\cos\varphi\sin\alpha, y = r\sin\varphi\sin\alpha, z = r\cos\alpha$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \alpha$ 是常数) $0 \leqslant r \leqslant a, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

解 首先求 E, G, F.

$$E = x_r'^2 + y_r'^2 + z_r'^2$$
$$= \cos^2\varphi\sin^2\alpha + \sin^2\varphi\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$
$$G = x_\varphi'^2 + y_\varphi'^2 + z_\varphi'^2 = r^2\sin^2\varphi\sin^2\alpha + r^2\cos^2\varphi\sin^2\alpha = r^2\sin^2\alpha,$$
$$F = x_r'x_\varphi' + y_r'y_\varphi' + z_r'z_\varphi'$$
$$= -r\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\alpha + r\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\alpha = 0.$$

从而，$d\sigma = \sqrt{EG-F^2}drd\varphi = r\sin\alpha drd\varphi$.

于是，$\iint_S z^2 d\sigma = \iint_D r^3\cos^2\alpha\sin\alpha drd\varphi \quad (D: 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant a)$

$$= \cos^2\alpha\sin\alpha\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r^3 dr = \frac{a^4\pi}{2}\cos^2\alpha\sin\alpha.$$

2. 证明：若 D 是 xy 平面上的有界区域，$z=z(x,y)$ 是 D 上的光滑曲面 S，函数 $f(x,y,z)$ 在 S 连续，则 $\exists\,(\xi,\eta,\zeta)\in S$，使

$$\iint_S f(x,y,z)d\sigma = f(\xi,\eta,\zeta)A,$$

其中 A 是曲面 S 的面积.

证 已知 $d\sigma=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy$，由公式(3)，有

$$\iint_S f(x,y,z)d\sigma$$

$$= \iint_D f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy.$$

已知被积函数在有界闭区域 D 连续，且 $\forall(x,y)\in D$，有

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\geqslant 0.$$

根据练习题13.1(一)第6题，$\exists(\xi,\eta)\in D$(设 $\zeta=z(\xi,\eta)$)，使

$$\iint_D f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy$$

$$= f[\xi,\eta,z(\xi,\eta)]\iint_D \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy,$$

其中 $\iint_D \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy$ 是曲面 S 的面积($\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy$ 是面积微元)，即

$$\iint_D \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy = A.$$

于是，$\exists(\xi,\eta,\zeta)\in S(\zeta=z(\xi,\eta))$，使

$$\iint_S f(x,y,z)d\sigma = f(\xi,\eta,\zeta)\cdot A.$$

3. 求下列第二型曲面积分：

(1) $\oiint_S zdxdy$，其中 S 是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，外法线是正向.

解 椭球面 S 在 xy 坐标面上的投影是椭圆域 D：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$. 在椭圆域 D 上，椭球面 S 分为上与下两部分曲面：S_1 与 S_2，它们的

方程分别是

$$S_1:\quad z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

与
$$S_2:\quad z=-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

S_1的外法线与z轴正向的夹角是锐角，S_2的外法线与z轴的正向夹角是钝角. 于是

$$\oiint_S zdxdy=\iint_{S_1}zdxdy+\iint_{S_2}zdxdy$$

$$=c\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy-c\iint_D\left(-\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)dxdy$$

$$=2c\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy\quad\left(\text{设}\begin{matrix}x=ar\cos\varphi,\\ y=br\sin\varphi.\end{matrix}\right)$$

$$=2abc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2}rdr=\frac{4}{3}\pi abc.$$

(2) $\oiint_S yzdydz+zxdzdx+xydxdy$，其中$S$是四面体$x+y+z=a$ $(a>0)$，$x=0$，$y=0$，$z=0$的表面，外法线是正向.

解 这是三个第二型曲面积分之和. 首先计算第二型曲面积分

$$\oiint_S xydxdy.$$

曲面S是由四个有向的三角形区域：ABC(上)，AOB(下)，BOC(后)，COA(左)组成，如图14.g. 其中BOC(后)与COA(左)在xy坐标面的面积微元$dxdy=0$，ABC(上)与AOB(下)在xy坐标面的投影都是三角形区域D($x=0$，$y=0$，$x+y=a$围成)，如图14.g. 从而，

$$\oiint_S xydxdy=\iint_{ABC(\text{上})}xydxdy+\iint_{AOB(\text{下})}xydxdy$$

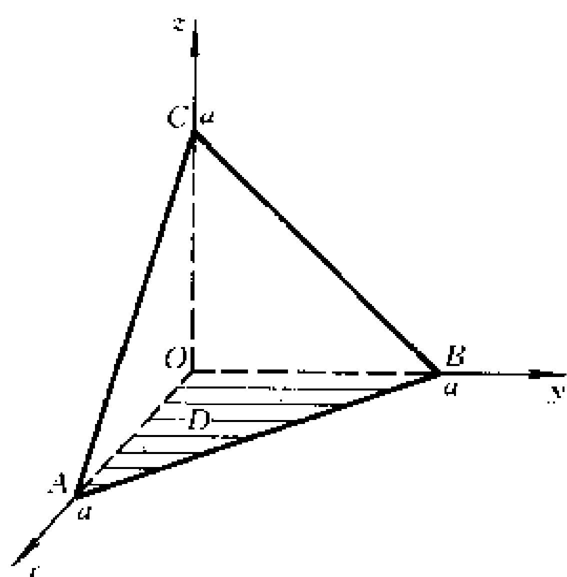


图14.g

$$+ \iint_{BOC(后)} xydxdy + \iint_{COA(左)} xydxdy$$

$$= \iint_D xydxdy - \iint_D xydxdy + 0 + 0 = 0.$$

因为将这个第二型曲面积分被积函数的 x 与 y 分别换为 y,z 或 z,x,此时曲面 S 在 yz 坐标面或 zx 坐标面的投影也是同样的三角形区域,所以

$$\oiint_S yzdydz = \oiint_S zxdzdx = 0.$$

于是,
$$\oiint_S yzdydz + zxdzdx + xydxdy = 0.$$

5. 应用奥高公式求下列第二型曲面积分:

(2) $\oiint_S xz^2dxdz + (x^2y - z^3)dzdx + (2xy + y^2z)dxdy$,

其中 S 是 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 和 $z=0$ 围成体的表面,外法线为正向.

解 $P=xz^2$, $Q=x^2y-z^3$, $R=2xy+y^2z$.

$$\frac{\partial P}{\partial x}=z^2,\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=x^2,\quad \frac{\partial R}{\partial z}=y^2.$$

曲面 S 围成的体 V 是上半球体：

$$0 \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D: x^2 + y^2 \leqslant a^2.$$

由奥高公式，有

$$\oiint\limits_S xz^2 dydz + (x^2 y - z^3) dzdx + (2xy + y^2 z) dxdy$$

$$= \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r^2 \cdot r^2 \sin\varphi dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^a r^4 dr$$

$$= \frac{2}{5}\pi a^5.$$

$$\left(\text{设} \begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant r \leqslant a. \quad |J| = r^2 \sin\varphi. \right)$$

7. 应用斯托克斯公式计算下列曲线积分：

(1) $\oint\limits_C y dx + z dy + x dz$，其中 C 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 相交的圆周，从 x 轴正向看逆时针方向为正.

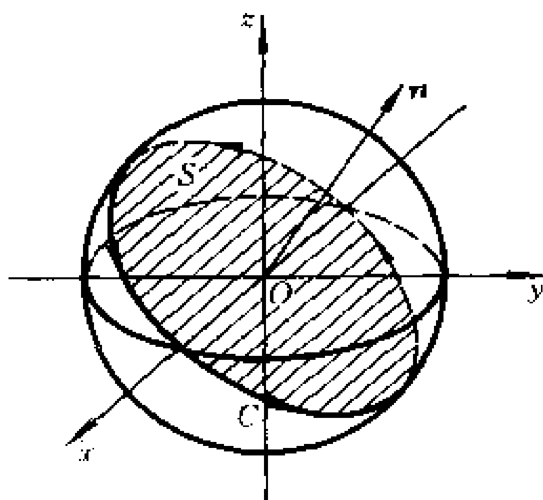


图 14. h

解 $P=y$, $Q=z$, $R=x$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 1.$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial R}{\partial y}=0.$$

在平面 $x+y+z=0$上，设曲线 C(大圆)围成的圆域为光滑曲面块 S. 法线 n 的正方向，如图14. h. 由斯托克斯公式，有

$$\oint_C ydx+zdy+xdz=-\iint_S dydz+dzdx+dxdy$$

$$=-\iint_S(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)d\sigma,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是平面 $x+y+z=0$法线 n 正方向的方向余弦. 从而，

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

于是，$$\oint_C ydx+zdy+xdz=-\frac{3}{\sqrt{3}}\iint_S d\sigma=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

(2) $\oint_C x^2y^3dx+dy+dz$，其中 C 是抛物面 $x^2+y^2=a^2-z$ 与平面 $z=0$相交的圆周，其正方向与 z 轴构成左手螺旋系.

解 $P=x^2y^3,\quad Q=1,\quad R=1.$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2y^2,\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}=0.$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial R}{\partial y}=0.$$

取平面 $z=0$(即 xy 坐标面)上，曲线 C 所围成的圆域 $D:x^2+y^2\leqslant a^2$为曲面 S，它的法线 n 的正方向与 z 轴的正向相反，如图14. i. 由斯托克斯公式，有

$$\oint_C x^2y^3dx+dy+dz=-\iint_S 3x^2y^2dxdy$$

$$=3\iint_D x^2y^2dxdy\qquad(x=r\cos\varphi,y=r\sin\varphi)$$

$$=3\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi\int_0^a r^5dr=\frac{1}{8}\pi a^6.$$

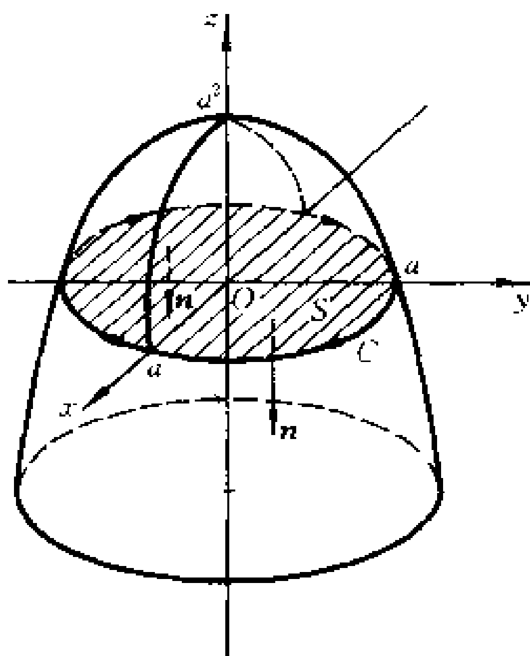


图14.i

8. 证明：定理4中的一个等式

$$\oint_C Q(x,y,z)dy = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z}dydz.$$

证 首先设平行于三个坐标轴的直线与曲面 S 至多有一个交点（S 上有平行坐标轴的线段除外）. 以 x 与 y 为自变量的曲面 S 可表为方程

$$z = f(x,y),(x,y) \in D.$$

其中 D 是曲面 S 在 xy 坐标面上的投影区域. 设区域 D 的边界闭曲线是 Γ.

由计算曲线积分的公式，有

$$\oint_C Q(x,y,z)dy = \oint_\Gamma Q[x,y,f(x,y)]dy. \tag{1}$$

为了将 yz 坐标面上的面积微元 $dydz$ 换为 xy 坐标面上的面积微元 $dxdy$，要应用 § 10.3的公式(3)，即

$$\cos\alpha = \frac{f'_x(x,y)}{\pm\Delta},\cos\beta = \frac{f'_y(x,y)}{\pm\Delta},\cos\gamma = \frac{-1}{\pm\Delta},$$

其中 $\Delta = \sqrt{1+f'^2_x(x,y)+f'^2_y(x,y)}$，$\alpha,\beta,\gamma$ 是曲面 S 法线正向分别

与 x 轴，y 轴，z 轴的正方向夹角. 不妨设 γ 是锐角，有 $\cos\gamma>0$，Δ 之前必取负号. 已知

$$dydz=\cos\alpha d\sigma=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta}d\sigma$$

$$=-\frac{\partial f}{\partial x}\cos\gamma d\sigma=-\frac{\partial f}{\partial x}dxdy.$$

由计算曲面积分的公式和格林公式，有

$$\iint_S\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy-\frac{\partial Q}{\partial z}dydz=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\right)dxdy$$

$$=\iint_D\frac{\partial}{\partial x}Q[x,y,f(x,y)]dxdy=\oint_C Q[x,y,f(x,y)]dy. \qquad (2)$$

由(1)式与(2)式，有

$$\oint_C Q(x,y,z)dy=\iint_S\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy-\frac{\partial Q}{\partial z}dydz.$$

如果曲面 S 与平行三个坐标轴的直线交点多于一个，则可将 S 分成若干个小曲面块，使得在每个小曲面块上，上述结论成立，则在曲面 S 上上述结论也成立.

10. 设 $du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$，求原函数 $u(x,y,z)$.

解 $P=x^2-2yz,\quad Q=y^2-2xz,\quad R=z^2-2xy.$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-2z,\qquad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}=-2y,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=-2x.$$

曲线积分与路线无关. 取 $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$，$\forall(x,y,z)\in\mathbf{R}^2$，有

$$u(x,y,z)=\int_0^x t^2dt+\int_0^y t^2dt+\int_0^z(t^2-2xy)dt$$

$$=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz.$$

于是，$$u(x,y,z)=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C.$$

*　　*　　*　　*

11. 证明：若 S 是光滑闭曲面，$\boldsymbol{l}$ 是任意常向量，则

$$\oiint_S \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})d\sigma = 0,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 的外法线向量.

证　设 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是外法线 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦.

$\cos(l,x),\cos(l,y),\cos(l,z)$ 是常向量 l 的方向余弦.

$$\begin{aligned}\cos(l,n) &= \frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\\ &=(\cos(l,x),\cos(l,y),\cos(l,z))(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\\ &=\cos(l,x)\cos\alpha+\cos(l,y)\cos\beta+\cos(l,z)\cos\gamma.\end{aligned}$$

从而，

$$\begin{aligned}&\oiint_S \cos(l,n)d\sigma\\ =&\oiint_S \cos(l,x)\cos\alpha d\sigma+\cos(l,y)\cos\beta d\sigma+\cos(l,z)\cos\gamma d\sigma\\ =&\oiint_S \cos(l,x)dydz+\cos(l,y)dzdx+\cos(l,z)dxdy,\end{aligned}$$

其中 $\cos(l,x),\cos(l,y),\cos(l,z)$ 是常数，它们的偏导数都是零. 由奥高公式，有

$$\oiint_S \cos(n,l)d\sigma = \iiint_V 0dxdydz = 0.$$

12. 求曲面积分

$$\oiint_S (x-y+z)dydz+(y-z+x)dzdx+(z-x+y)dxdy,$$

其中 S 是 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$，外侧为正.

解　闭曲面 S 是八个平面：

$$\pm(x-y+z)\pm(y-z+x)\pm(z-x+y)=1$$

所围成体 V 的表面.

$$P=x-y+z,\quad Q=y-z+x,\quad R=z-x+y.$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial z}=1.$$

由奥高公式，有

$$\oiint_S (x-y+z)dydz+(y-z+x)dzdx+(z-x+y)dxdy$$

$$=\iiint_V (1+1+1)dxdydz=3\iiint_V dxdydz.$$

作变量替换，设

$$\begin{cases}u=x-y+z, \\ v=y-z+x, \\ w=z-x+y.\end{cases} \qquad \begin{aligned}\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}&=4.\\ \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}&=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

设闭曲面 S 在 uvw 直角坐标系中变换为 S'，体 V 变换为体 V'：$|u|+|v|+|w|\leqslant 1$，即 V' 是八个平面：$\pm u\pm v\pm w=1$所围成的正八面体，如图14. j. 显然，体 V' 关于原点(0,0,0)对称，其体积是

$$8\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{3}.$$

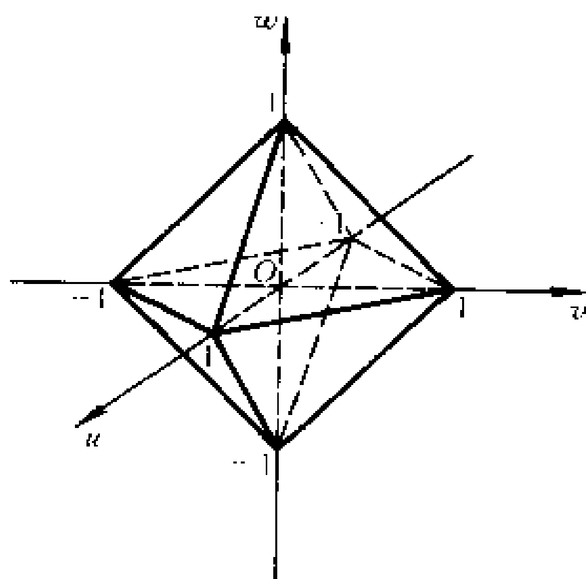


图14. j

于是，$\oiint\limits_S (x-y+z)dydz+(y-z+x)dzdx+(z-x+y)dxdy$

$$= 3\iiint\limits_V dxdydz = 3\iiint\limits_{V'} \frac{1}{4}dudvdw = \frac{3}{4}\iiint\limits_{V'} dudvdw$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3} = 1.$$

13. 证明：泊松公式

$$\oiint\limits_S f(ax+by+cz)d\sigma = 2\pi\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})du,$$

其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

证 将 xyz 直角坐标系以原点(0,0,0)为心旋转为 uvw 直角坐标系，使平面 $ax+by+cz=0$是 vw 坐标面，且通过原点(0,0,0)与 vw 坐标面垂直的直线是 u 轴. 由直角坐标系的旋转公式，有

$$\begin{cases} u = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1, \\ v = x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2, \\ w = x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3. \end{cases}$$

其中 $\cos\alpha_1,\cos\beta_1,\cos\gamma_1;\cos\alpha_2,\cos\beta_2,\cos\gamma_2;\cos\alpha_3,\cos\beta_3,\cos\gamma_3$分别是 u 轴，v 轴，w 轴关于 xyz 直角坐标系的方向余弦. 因为它们互相垂直，有

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}} = 1.$$

球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$变换到 uvw 直角坐标系中也是球面 S'：$u^2+v^2+w^2=1$. 将球面 S' 化为参数方程：

$$u=u,\ v=\sqrt{1-u^2}\cos t,\ w=\sqrt{1-u^2}\sin t.$$
$$-1\leqslant u\leqslant 1,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dt = \sqrt{\frac{1}{1-u^2}(1-u^2)}\,du\,dt = du\,dt.$$

因为 u 轴垂直平面 $ax+by+cz=0$，所以 u 的方向余弦是

$$\cos\alpha_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \cos\beta_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

从而
$$u = \frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

或 $$ax+by+cz = u\sqrt{a^2+b^3+c^2}.$$

于是，
$$\oiint_S f(ax+by+cz)d\sigma = \int_0^{2\pi} dt \int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})du$$

$$= 2\pi\int_{1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})du.$$

14. 求高斯积分

$$I(\xi,\eta,\zeta) = \oiint_S \frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{r^2}d\sigma,$$

其中 S 是光滑闭曲面，$\mathbf{n}$ 是在曲面 S 上点 (x,y,z) 的外法线. $\mathbf{r}$ 是连结曲面 S 上动点 $M(x,y,z)$ 与曲面 S 外定点 (ξ,η,ζ) 的矢径，$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$.

讨论两种情况：(1) 曲面 S 不包围点 (ξ,η,ζ)；(2) 曲面 S 包围点 (ξ,η,ζ).

解 设 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是外法线 n 的方向余弦.

$\cos(\mathbf{r},x),\cos(\mathbf{r},y),\cos(\mathbf{r},z)$ 是 $\mathbf{r}$ 的方向余弦. 有（见第11题）

$$\cos(\mathbf{r},n) = \cos(\mathbf{r},x)\cos\alpha + \cos(\mathbf{r},y)\cos\beta + \cos(\mathbf{r},z)\cos\gamma$$

$$= \frac{x-\xi}{r}\cos\alpha + \frac{y-\eta}{r}\cos\beta + \frac{z-\zeta}{r}\cos\gamma.$$

从而，

$$I(\xi,\eta,\zeta) = \oiint_S \frac{\cos(\mathbf{r},n)}{r^2}d\sigma$$

$$= \oiint_S \frac{x-\xi}{r^3}\cos\alpha d\sigma + \frac{y-\eta}{r^3}\cos\beta d\sigma + \frac{z-\zeta}{r^3}\cos\gamma d\sigma$$

$$= \oiint_S \frac{x-\xi}{r^3}dydz + \frac{y-\eta}{r^3}dzdx + \frac{z-\zeta}{r^3}dxdy,$$

其中 $\quad P = \frac{x-\xi}{r^3},\quad Q = \frac{y-\eta}{r^3},\quad R = \frac{z-\zeta}{r^3}.$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(x-\xi)^2}{r^5},\quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(y-\eta)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(z-\zeta)^2}{r^5}.$$

$\forall (x,y,z) \neq (\xi,\eta,\zeta)$，有

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

(1) 当 S 不包围点(ξ,η,ζ)时，由奥高公式，有

$$I(\xi,\eta,\zeta) = \oiint_S \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}d\sigma$$

$$= \oiint_S \frac{x-\xi}{r^3}dydz + \frac{y-\eta}{r^3}dzdx + \frac{z-\zeta}{r^3}dxdy$$

$$= \iiint_V 0dxdydz = 0,$$

其中 V 是闭曲面 S 所围成的体（下同）.

(2) 当 S 包围点(ξ,η,ζ)时，取以点(ξ,η,ζ)为心，以任意充分小的 $\delta>0$为半径的球体 V_δ，使 $V_\delta \subset V$. 设球体 V_δ 的表面（球面）是 S_δ. 显然，P,Q,R 在 $V-V_\delta$ 上满足奥高公式的条件，由奥高公式，有

$$\oiint_{S+S_\delta} \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}d\sigma = \oiint_{S+S_\delta} \frac{x-\xi}{r^2}dydz + \frac{y-\eta}{r^2}dzdx + \frac{z-\zeta}{r^2}dxdy$$

$$= \iiint_{V-V_\delta} 0dxdydz = 0,$$

其中 S_δ 法线的正向向着球心(ξ,η,ζ). 从而

$$\oiint_S \frac{\cos(\boldsymbol{r},n)}{r^2}d\sigma = -\oiint_{S_\delta} \frac{\cos(\boldsymbol{r},n)}{r^2}d\sigma = \oiint_{S_\delta^-} \frac{\cos(\boldsymbol{r},n)}{r^2}d\sigma,$$

其中 S_δ^- 是球面 S_δ，其法线正向与 S_δ 正向相反，即与 S 的外法线 n 的正向相同．有 $(\boldsymbol{r},n)=0$，从而 $\cos(\boldsymbol{r},n)=1$．于是

$$I(\xi,\eta,\zeta) = \oiint_S \frac{\cos(\boldsymbol{r},n)}{r^2}d\sigma = \oiint_{S_\delta^-} \frac{1}{r^2}d\sigma$$

$$= \frac{1}{\delta^2}\oiint_{S_\delta^-} d\sigma = \frac{1}{\delta^2}\cdot 4\pi\delta^2 = 4\pi.$$

15．证明：若 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，则

(1) $\iint_S \frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = \iiint_V \Delta u dxdydz$

(2) $\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz$

$$+\iiint_V u\Delta u dxdydz,$$

其中 S 是包围有界体 V 的光滑闭曲面，$\frac{\partial u}{\partial n}$是曲面 S 外法线 n 的方向导数．

证 (1) 由奥高公式，有

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = \iint_S \left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u}{\partial z}\cos(n,z)\right]d\sigma$$

$$= \iint_S \frac{\partial u}{\partial x}dydz+\frac{\partial u}{\partial y}dzdx+\frac{\partial u}{\partial z}dxdy$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dxdydz = \iiint_V \Delta u dxdydz.$$

(2) 由奥高公式，有

$$\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=\iint_S\left[u\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)+u\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y)+u\frac{\partial u}{\partial z}\cos(n,z)\right]d\sigma$$

$$=\iint_S u\frac{\partial u}{\partial x}dydz+u\frac{\partial u}{\partial y}dzdx+u\frac{\partial u}{\partial z}dxdy$$

$$=\iiint_V\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]dxdydz$$

$$=\iiint_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz+\iiint_V u\Delta u dxdydz.$$

练习题　14.3

（《讲义》下册，第435页）

1. 求下列数量场在点(x,y,z)的梯度：

(3)　$f(x,y,z)=\ln(x^2+2y^2-3z^2)$.

解　$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+2y^2-3z^2}$，　$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{4y}{x^2+2y^2-3z^2}$，

$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{-6z}{x^2+2y^2-3z^2}$.

于是，

$$\mathbf{grad}f=\frac{2x}{x^2+2y^2-3z^2}\mathbf{i}+\frac{4y}{x^2+2y^2-3z^2}\boldsymbol{j}+\frac{-6z}{x^2+2y^2-3z^2}\boldsymbol{k}$$

$$=\frac{2}{x^2+2y^2-3z^2}(x\mathbf{i}+2y\boldsymbol{j}-3z\boldsymbol{k}).$$

2. 证明：

(2)　$\mathbf{grad}\left(\frac{u}{r}\right)=\frac{1}{r^2}(r\,\mathbf{grad}u-u\,\mathbf{grad}r)$.

证 $\mathbf{grad}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right)\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{v}\right)\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u}{v}\right)\boldsymbol{k}$

$$=\frac{v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}}{v^2}\boldsymbol{i}+\frac{v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}}{v^2}\boldsymbol{j}+\frac{v\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial v}{\partial z}}{v^2}\boldsymbol{k}$$

$$=\frac{1}{v^2}\left[v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)-u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{v^2}(v\mathbf{grad}u-u\mathbf{grad}v).$$

6. 证明：

(2) $\mathbf{div}(u\mathbf{grad}u)=u\Delta u+(\mathbf{grad}u)^2$.

证 $\mathbf{div}(u\mathbf{grad}u)=\mathbf{div}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+u\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+u\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$=u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$=u\Delta u+(\mathbf{grad}u)^2.$$

7. 已知向量 $r=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$. 求(1)通过圆柱 $x^2+y^2=a^2(0\leqslant z\leqslant h)$表面的流量；(2)通过锥 $x^2+y^2=z^2(0\leqslant z\leqslant h)$表面的流量.

解 (1)设圆柱的表面是 S，取外法线为正，它所围成的是柱体 V：$x^2+y^2\leqslant a^2, 0\leqslant z\leqslant h$. 由流量公式，通过圆柱表面 S 的流量

$$Q=\oiint_S xdydz+ydzdx+zdxdy.$$

$$P=x, Q=y, R=z.\quad \frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial z}=1.$$

由奥高公式，有

$$Q=\iiint_V 3dxdydz=3\iiint_V dxdydz=3\pi a^2h;$$

(2) 同法可计算通过锥 $x^2+y^2=z^2, 0\leqslant z\leqslant h$ 的表面的流量.

9. 求下列向量场的旋度：

(1) $A=xyz(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$.

解 $P=Q=R=xyz$.

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=x(z-y),\qquad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=y(x-z),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=z(y-x).$$

于是， $\mathbf{rot}\boldsymbol{A}=x(z-y)\boldsymbol{i}+y(x-z)\boldsymbol{j}+z(y-x)\boldsymbol{k}$

(2) $\boldsymbol{B}=(y^2+z^2)\boldsymbol{i}+(z^2+x^2)\boldsymbol{j}+(x^2+y^2)\boldsymbol{k}$.

解 $P=y^2+z^2$， $Q=z^2+x^2$， $R=x^2+y^2$.

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=2(y-z),\qquad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=2(z-x),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2(x-y).$$

于是， $\mathbf{rot}\boldsymbol{B}=2[(y-z)\boldsymbol{i}+(z-x)\boldsymbol{j}+(x-y)\boldsymbol{k}]$.

10. 证明：若 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{a}$ 是常向量，则 $\mathbf{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=2\boldsymbol{a}$.

证 设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

$$=(a_2z-a_3y)\boldsymbol{i}+(a_3x-a_1z)\boldsymbol{j}+(a_1y-a_2x)\boldsymbol{k}.$$

$$P=a_2z-a_3y,\quad Q=a_3x-a_1z,\quad R=a_1y-a_2x.$$

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=2a_1,\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=2a_2,\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2a_3.$$

于是， $\mathbf{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=2(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})=2\boldsymbol{a}$.

11. 求向量场 $\boldsymbol{A}=yz(2x+y+z)\boldsymbol{i}+zx(x+2y+z)\boldsymbol{j}+xy(x+y+2z)\boldsymbol{k}$ 的势函数.

解 $P=yz(2x+y+z)$，$Q=zx(x+2y+z)$，$R=xy(x+y+2z)$.

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=(x^2+2xy+2xz)-(x^2+2xy+2xz)=0.$$

同样， $\dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x}=0$ 与 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=0$.

从而，在 $\mathbf{R}^3$中曲线积分与路线无关. 取 $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$，$\forall(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$. 于是，向量场 $\boldsymbol{A}$ 的势函数

$$u(x,y,z)=\int_0^x 0dt+\int_0^y 0dt+\int_0^z xy(x+y+2t)dt+C$$

$$=xyz(x+y+z)+C.$$

12. 证明:若 S 是光滑闭曲面,向量场 $\boldsymbol{F}$ 的分量(函数)有连续偏导数,则

$$\oiint_S \mathbf{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma=0,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 的外法线向量.

证 用 S 上一条光滑闭曲线 C 将 S 分成两个曲面块 S_1 与 S_2,C 既是 S_1 的边界闭曲线,又是 S_2 的边界闭曲线,但是方向向反,表为 C 与 C^-. 设 $\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}$. 由斯托克斯公式,有

$$\oiint_S \mathbf{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma=\iint_{S_1}\mathbf{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma+\iint_{S_2}\mathbf{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma$$

$$=\oint_C\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{l}ds+\oint_{C^-}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{l}ds=\oint_C\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{l}ds-\oint_C\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{l}ds=0,$$

其中 $\boldsymbol{l}$ 是曲线 C 上切线单位向量(正向).